

$$\chi(\tau) = \frac{\gamma_0 \left[\exp \left(\pm i \sqrt{\frac{P_{кр} - P}{\rho}} A_2 \frac{\tau}{R} \right) \right] \left[\exp \left(-i \sqrt{\frac{P_{кр} - P}{\rho}} A_6 \tau \right) \right]}{\gamma_0 \left[\exp \left(\pm i \sqrt{\frac{P_{кр} - P}{\rho}} A_2 \frac{\tau}{R} \right) \right] \left[\exp \left(-i \sqrt{\frac{P_{кр} - P}{\rho}} A_6 \tau \right) \right] \times} \\ \times A_1 \sqrt{\frac{P_{кр} - P}{\rho}} + \gamma_0.$$

При $P > P_{кр}$ и $\tau \rightarrow \infty$ имеем

$$|\chi| = \frac{1}{A_1 \sqrt{\left| \frac{P - P_{кр}}{\rho} \right|}}. \quad (4.3)$$

Величина $|\chi|$, определенная по формуле (4.3), характеризует послекритическое поведение исходного возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости: Л., Гостехиздат, 1948.
2. Грузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1971.
3. Бестужева Н. П., Быковцев Г. И., Дурова В. Н. Об условиях совместности на поверхностных разрывах. — В сб.: Механика деформируемого твердого тела. 1976. вып. 2 (Куйбышевский гос. ун-т).
4. Eringen A. C. Nonlinear theory of continuons. Media. N.-York, 1962.
5. Заварзина Н. А. Лучевой метод решения динамических задач в гипотупругой среде. — «Труды НИИМ ВГУ», 1972, вып. 6.
6. Соболев С. Л. Некоторые вопросы распространения колебаний. — В кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные уравнения математической физики. Гл. 12, М., Гостехиздат, 1937.
7. Бабич В. М. О распространении волн Релея вдоль поверхности однородного упругого тела произвольной формы. ДАН СССР, 1961, т. 137, № 6.
8. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., «Наука», 1961.
9. Biot M. A. Mechanics of incremental deformations. John Wileyand Sons 1965. N.-4.

УДК 539.3

В. Ф. Терентьев, А. П. Господариков

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЗАКРИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

1. Геометрически нелинейные проблемы статики одномерных упругих систем [1, 2] могут быть записаны как двуточечные краевые задачи вида

$$\frac{d\bar{V}}{ds} = \bar{g}(\bar{V}, s); \quad 0 < s < l; \quad \bar{D}(\bar{V}_0, \bar{V}_l) = 0. \quad (1)$$

Здесь $\bar{V}(s)$ — искомая вектор-функция независимой переменной s ; \bar{g} и \bar{D} — заданные вектор-функции указанных аргументов, имеющие размерность вектора \bar{V} ; $\bar{V}_0 \equiv \bar{V}(0)$; $\bar{V}_l \equiv \bar{V}(l)$. В задаче о геометрически нелинейной осесимметричной деформации произвольной оболочки вращения (ОВ) вектор \bar{V} содержит шесть компонент $\bar{V}(s) = (u, v, \vartheta, M_r, Q_r, T_r)$, где u и v — перемещения точки меридиана опорной поверхности соответственно по оси вращения z и радиальной r ; ϑ — угол поворота касательной к меридиану; $M_r = M_1 \cdot (r_0 + v)$; $Q_r = Q_1 \cdot (r_0 + v)$; $T_r = T_1 \cdot (r_0 + v)$; M_1, Q_1, T_1 — меридиональные оболочечные усилия, r_0 — координата вдоль r в исходном недеформированном состоянии.

При выборе в качестве s длины дуги недеформированного меридиана опорной поверхности правые части уравнений (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} g_1 &= (1+e) \cos \vartheta' - \cos \vartheta_0; & g_4 &= (1+e) [-Q_r + M_2 \sin \vartheta' + (r_0 + v)m]; \\ g_2 &= (1+e) \sin \vartheta' - \sin \vartheta_0; & g_5 &= -T_r \chi + (1+e) [-T_2 \cos \vartheta' + (r_0 + v)q]; \\ g_3 &= -\chi; & g_6 &= Q_r \chi + (1+e) [T_2 \sin \vartheta' + (r_0 + v)t]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ϑ_0 — угол наклона касательной к меридиану в исходном положении относительно оси z :

$$\vartheta' = \vartheta_0 + \vartheta; \quad \chi = \chi_0 + \chi; \quad \chi_0 = \frac{d\vartheta_0}{ds};$$

l и χ — удлинение и измерение кривизны меридиана; T_2 и M_2 — окружные усилия; m, q, t — распределенные нагрузки.

В случае линейно-упругого однородного по высоте ОВ ортотропного материала с модулями упругости E_1, E_2 и коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 ($E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$) величины, e, χ, T_2, M_2 выражаются через компоненты \bar{V} в явном виде:

$$\begin{aligned} e &= -\frac{\nu_2}{r_0} v + \frac{(1 - \nu_1 \nu_2) T_r}{E_1 h_0 (r_0 + v)}; & T_2 &= \frac{\nu_2 T_r}{r_0 + v} + \frac{E_2 h_0}{r_0} v; \\ \chi &= \frac{\nu_2}{r_0} \varphi(\vartheta, s) + \frac{12(1 - \nu_1 \nu_2) M_r}{E_1 h_0^3 (r_0 + v)}; & M_2 &= \frac{\nu_2 M_r}{r_0 + v} - \frac{E_2 h_0^3}{12 r_0} \varphi(\vartheta, s); \\ & & \varphi(\vartheta, s) &\equiv 2 \sin(\vartheta_0 + \vartheta/2) \sin \vartheta/2. \end{aligned} \quad (3)$$

Вывод оболочечных упругих соотношений (3) основывается на использовании обеих частей гипотезы Кирхгоффа-Лява при некоторых упрощениях, допускаемых в силу тонкости оболочки и погрешности указанной гипотезы [3]. Уравнения (2) и (3), совпадая по основным предпосылкам вывода с исходной формой системы Рейсснера [4], не содержат допущений о малости перемещений, углов поворота и деформаций и удобны для численного решения.

В практике численного решения нелинейных краевых задач теории упругих осесимметричных *ОВ* используются несколько групп методов [5]. Развиваемый здесь алгоритм, основные идеи которого для случая распадающихся граничных условий и итерационного продолжения по параметру нагрузки λ сформулированы в [1, 2], относится к числу сеточных.

Как показывает численный эксперимент, продолжение по λ возможно лишь до предельной точки $\lambda = \lambda_n$ операторного уравнения $T(x, \lambda) = 0$, символизирующего задачу (1) с числовым параметром λ . В этой точке однопараметрическое семейство элементов $x(\lambda)$ имеет неограниченную производную $\frac{dx}{d\lambda}$.

Для продолжения диаграммы «нагрузка — перемещение» за предельную точку предлагается, начиная с некоторого $\lambda < \lambda_n$, считать λ неизвестным, одновременно задавая значение некоторого характерного перемещения — функционала $X = f(x, \lambda)$. В результате, приходим к задаче нахождения x и λ при заданном \tilde{x} из системы

$$T(x, \lambda) = 0, \quad \tilde{x} = f(x, \lambda). \quad (4)$$

Для семейства $y(\tilde{x}) \equiv [x(\tilde{x}), \lambda(\tilde{x})]$, определяемого из решения уравнения $B(y, \tilde{x}) = 0$, эквивалентного системе (4), точка $\lambda = \lambda_n$ соответствует точке $\tilde{x}_* = f[x(\lambda_n), \lambda_n]$, в которой $\frac{dy}{d\tilde{x}} = 0$. Отсю-

да построение $y(\tilde{x})$ вблизи $\lambda = \lambda_n$ можно осуществлять на основе нормальной формы процесса итерационного продолжения по x . Последнее можно выполнить лишь до предельной точки оператора $B(y, \tilde{x})$, каковой является точка, где $\frac{dx}{d\lambda} = 0$, для прохождения которой достаточно вернуться к продолжению по λ .

Применительно к системе (4) итерационное продолжение по x , здесь означает, что для некоторого фиксированного набора значений $\{\tilde{x}_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, решение $x_k = x(\tilde{x}_k)$ строится как предел итераций $\{x_k^n, \lambda_k^n\}$ $n = 1, 2, \dots$, определяемых из линейной системы метода линеаризации при условии

$$x_k^0 = x_{k-1}; \quad \lambda_k^0 = \lambda_{k-1};$$

$$[T_x(x_k^{n-1}, \lambda_k^{n-1})] x_k^n + [T_\lambda(x_k^{n-1}, \lambda_k^{n-1})] \lambda_k^n + T_1(x_k^{n-1}, \lambda_k^{n-1}) = 0;$$

$$[f_x(x_k^{n-1}, \lambda_k^{n-1})] x_k^n + [f_\lambda(x_k^{n-1}, \lambda_k^{n-1})] \lambda_k^n + f_1(x_k^{n-1}, \lambda_k^{n-1}) = \tilde{x}_k. \quad (5)$$

В случае использования метода квазилинеаризации (Ньютона-Канторовича) в качестве операторов T_x , T_λ и функционалов

f_x, f_λ выступают производные Фреше от T и f по соответствующим аргументам. Конкретизация системы линейных операторных уравнений (5) для уравнений краевой задачи (1) приводит к необходимости решения при каждой итерации линейной двуточечной краевой задачи с условием типа интегрального относительно вектор-функции $\bar{V}^n(s)$ и параметра λ^n (индекс k опущен):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}^n}{ds} &= G^{n-1} \bar{V}^n + G_\lambda^{n-1} \lambda^n + \bar{h}^{n-1}; \\ A^{n-1} \bar{V}_0^n + B^{n-1} \bar{V}_l^n + \bar{D}_\lambda^{n-1} \lambda^n &= \bar{C}^{n-1}; \\ f_x^{n-1} \bar{V}^n + f_\lambda^{n-1} \lambda^n + f_1^{n-1} &= \tilde{x}. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (6) для матриц Якоби G^{n-1} , G_λ^{n-1} и A^{n-1} , B^{n-1} , \bar{D}_λ^{n-1} от вектор-функций $\bar{g}(\bar{V}, S, \lambda)$ и $\bar{D}(\bar{V}_0, \bar{V}_l, \lambda)$ использовано обозначение типа: $G^{n-1} = G(\bar{V}^{n-1}, s, \lambda^{n-1})$. Вид линейных функционалов f_x^{n-1} , f_λ^{n-1} — производных от $f(x, \lambda)$ — при конкретизации последнего также легко устанавливается.

Решение задачи (6) осуществляется методом конечных разностей. Для этого отрезок $[0, l]$ разбивается на l промежутков $\{\Delta_i s\}$ точками $\{S_i\}$, $i=0, 1, 2, \dots, l$. Пусть \bar{V}_i — приближенное значение $\bar{V}(s)$ при $s=S_i$. Заменяем линейное дифференциальное уравнение из (6) разностным уравнением второго порядка аппроксимации (относительно точки $S_{i-\frac{1}{2}} = 0,5(S_i + S_{i-1})$):

$$(\bar{V}_i - \bar{V}_{i-1})/\Delta_i s = G_{i-\frac{1}{2}} \cdot 0,5(\bar{V}_i + \bar{V}_{i-1}) + G_{\lambda, i-\frac{1}{2}} \cdot \lambda + \bar{h}_{i-\frac{1}{2}},$$

в котором индексы n и k опущены и введено обозначение

$$G_{i-\frac{1}{2}} = G[0,5(\bar{V}_i + \bar{V}_{i-1}), s_{i-\frac{1}{2}}, \lambda].$$

В принятом подходе замена граничных условий очевидна и не связана с внесением погрешности. В качестве разностного представления интегрального соотношения из (6) с достаточной общностью можно записать

$$\sum_{i=0}^l (f_x)_i \bar{V}_i + (f_\lambda) \lambda + f_1 = \tilde{x}.$$

После несложных преобразований получается при каждом n линейная алгебраическая задача о нахождении векторов \bar{V}_i , $i=0, 1, 2, \dots, l$, и скаляра λ из системы вида

$$\begin{aligned} A_i \bar{V}_i + B_i \bar{V}_{i-1} + \lambda \bar{P}_i &= \bar{C}_i; \\ A \bar{V}_0 + B \bar{V}_l + \lambda \bar{P} &= \bar{C}; \\ \sum_{i=0}^l \bar{K}_i \cdot \bar{V}_i + \lambda \cdot p &= c. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы (7) проводится методом циклической прогонки, обобщающим методику [6] на случай окаймленной матрицы.

Пусть ранг A равен m_1 , где $1 \leq m_1 \leq m$, m — размерность \bar{V} . Полагая, что квадратная обратимая матрица порядка m_1 соответствует m_1 первым строкам матрицы A , запишем с помощью блочного разбиения равенства

$$A = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \end{bmatrix}; \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}^1 \\ \bar{P}^2 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}^1 \\ \bar{C}^2 \end{bmatrix},$$

где блоки A^1, B^1, P, C^1 имеют m_1 строк. Разобьем также матрицы и векторы разностного уравнения при $i=1$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_1^1 \\ B_1^2 \end{bmatrix}; \quad \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} \bar{P}_1^1 \\ \bar{P}_1^2 \end{bmatrix}; \quad \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} \bar{C}_1^1 \\ \bar{C}_1^2 \end{bmatrix},$$

где блоки $A_1^1, B_1^1, \bar{P}_1^1, \bar{C}_1^1$ имеют по $m - m_1$ строк. Разделим искомые неизвестные на две группы

$$\bar{V}_y = [\bar{V}_0, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_{l-1}]'; \quad \bar{V}_1^* = [\bar{V}_1, \lambda]'$$

где штрих означает блочное транспонирование.

Система (7) представляется в виде

$$R_y \bar{V}_y = \alpha \bar{V}_1^* = \bar{S}_y; \quad \beta \bar{V}_y + \delta \bar{V}_1^* = \bar{S}_1. \quad (8)$$

Для матриц $R_y, \alpha, \beta, \delta$ и векторов \bar{S}_y, \bar{S}_1 имеем следующие представления:

$$R_y = \begin{bmatrix} A^1, & 0, & 0, & & & \\ B_1, & A_1, & 0, & & & 0 \\ 0, & B_2, & A_2, & & & \\ 0 & & & & & \\ & & & & 0, & B_{l-1}, & A_{l-1} \\ & & & & 0, & & B_1^1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} B^1, & \bar{P}^1 \\ 0, & \bar{P}_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0, & \bar{P}_{l-1} \\ \bar{A}_1^1, & \bar{P}_1^1 \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_y = \begin{bmatrix} \bar{C}^1 \\ \bar{C}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{C}_{l-1} \\ \bar{C}_1^1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & B_I^2 \\ A^2, & 0, & \dots, & & 0 \\ \bar{K}_0, & \bar{K}_1, & \dots, & & \bar{K}_{I-1} \end{bmatrix},$$

$$\delta = \begin{bmatrix} A_I^2, & \bar{P}_I^2 \\ B^2, & \bar{P}^2 \\ \bar{K}_I, & \rho \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_I = \begin{bmatrix} \bar{C}_I^2 \\ \bar{C}^2 \\ c \end{bmatrix}$$

Рассмотрим системы уравнений:

$$R_y X = \alpha; \quad R_y \bar{Y} = \bar{S}_y.$$

Так как усеченная матрица R_y имеет строго диагональную структуру и ранг матрицы A^1 размерности $m_1 \times m$ равен m_1 , то решения этих систем легко получаются с помощью метода матричной прогонки [6]. Тогда

$$\bar{V}_I^* = (\delta - \beta X)^{-1} (\bar{S}_I - \beta \bar{Y}).$$

Обратив квадратную матрицу $\delta - \beta X$ порядка $m + 1$, найдем \bar{V}_I^* , а затем из первого уравнения (8) — вектор \bar{V}_y .

Изложенный алгоритм реализован в программе, составлен-

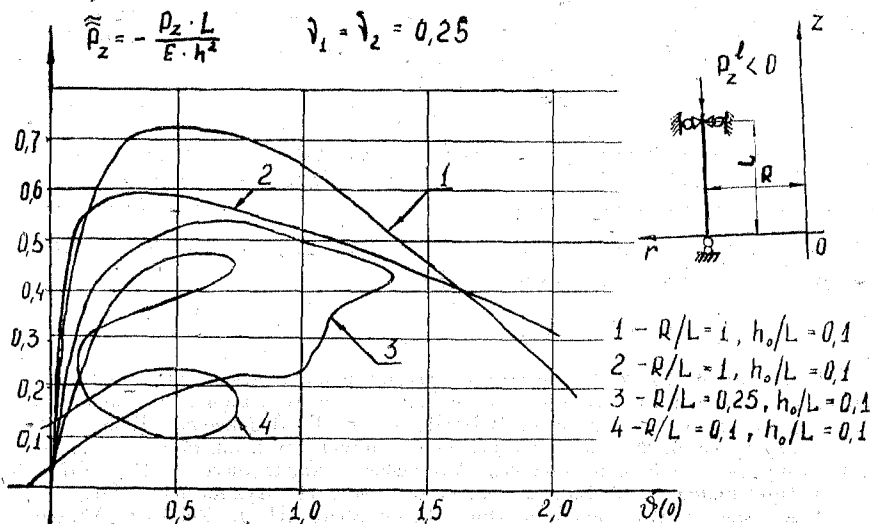


Рис. 1

ной на языке АЛГОЛ-60 для транслятора ТА-1М. Численные эксперименты проводились на ЭЦВМ М-222.

3. На рис. 1 приведены результаты решения задачи об осе-

вом сжатии круговой шарнирно-опертой цилиндрической оболочки. Параметром нагрузки λ служит значение осевого усилия, а «характерным» функционалом — угол поворота торца. Результаты решения этой небифуркационной (при $\nu \neq 0$) задачи подтверждают отсутствие нижней критической нагрузки [7].

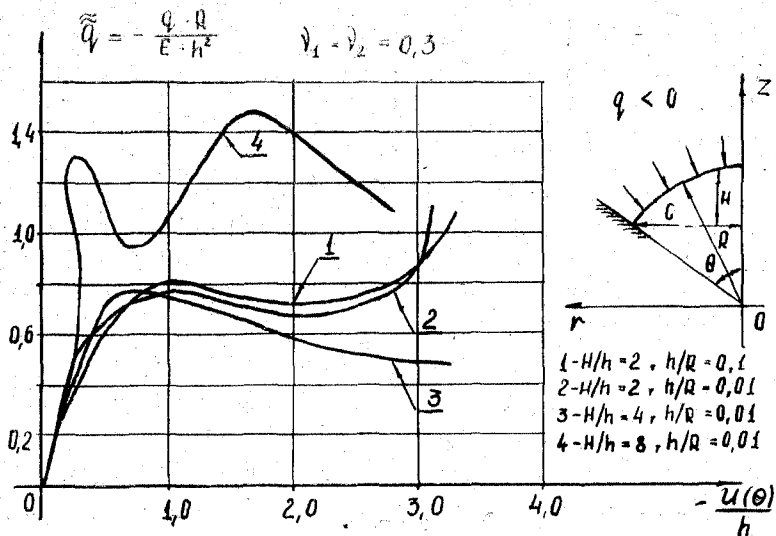


Рис. 2.

На рис. 2 изображены диаграммы «нагрузка—перемещение» в задаче о сжатии пологих и непологих сферических жестко заделанных куполов гидростатическим давлением. За параметр x принято перемещение вершин купола. Для пологих куполов результаты решения совпадают [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев В. Ф. О расчете осесимметричной деформации оболочек вращения из нелинейно-упругого материала с учетом изменения формы средней поверхности.—«Известия ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева», 1969, т. 91.
2. Терентьев В. Ф. Численное решение одномерных нелинейных задач статики упругих стержней и оболочек. Автореферат канд. диссерт. ЛГУ, 1971.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
4. Reissner E. On Theory of Thin Elastic Shells H. J. Reissner Anniversary Volume, Contributions to Applied Mechanics, Ann Arbor, Michigan, 1949.
5. Валишвили Н. В. Конечные перемещения осесимметричных пологих оболочек вращения. — «Изв. АН СССР, МТТ», 1974, № 2, с. 125—131.
6. Русанов В. В. Об устойчивости метода матричной прогонки. — «Вычислительная математика», 1960, № 6.
7. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.