Рисунок 3 - Угольник проходной

УДК 519.633

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Ю. Ю. Кривошеева[1]

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

Научный руководитель: А. А. Дегтярев, к.т.н., доцент

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, разностная схема, погрешность решения

Целью данной работы является качественное исследование погрешности численного решения уравнения теплопроводности в разрывной среде при помощи численного моделирования.

Для получения погрешности разложим разностное решение для шагов по пространству, отличающихся между собой в два раза:

$$u_{h_x,h_\tau} = [u]_{h_x,h_\tau} + Dh_\tau + Eh_x + O(h_\tau^2, h_x^2);$$

[1] Кривошеева Юлиана Юрьевна, студент группы 6230-010402D, email: akinava.love@gmail.com

$$u_{\frac{h_x}{2},h_t} = [u]_{\frac{h_x}{2},h_t} + Dh_t + E\frac{h_x}{2} + O\left(h_t^2,\frac{h_x^2}{4}\right),$$

где u – разностное решение, $[u]$ – точное аналитическое решение в узлах сетки, D,E – коэффициенты разложения.

Вычтем одно выражение из другого. При этом будем учитывать разность двух аналитических решений даст ноль. Таким образом получим часть погрешности $\Delta(h_x)$, связанную с измельчением шага по пространству:

$$\Delta(h_x) = \left|u_{h_x,h_t} - u_{\frac{h_x}{2},h_t}\right| = E\frac{h_x}{2} + O\left(h_t^2,\frac{h_x^2}{4}\right).$$

Также получим формулу для части погрешности, связанной с шагом по пространству, для более мелкой сетки:

$$\Delta\left(\frac{h_x}{2}\right) = \left|u_{\frac{h_x}{2},h_t} - u_{\frac{h_x}{4},h_t}\right| = E\frac{h_x}{4} + O\left(h_t^2,\frac{h_x^2}{16}\right).$$

Из полученных формул видно, что скорость убывания погрешности при измельчении сетки по пространству в два раза примерно равна двум. Аналогичный результат получим и для части погрешности, связанной с измельчением шага сетки по времени. Используя коэффициенты *E* и *D*, можно построить формулу, связывающую полную погрешность с шагами дискретизации. С помощью такой формулы можно получать решение с интересующим уровнем погрешности, варьируя шаги сетки

В таблицах 1 и 2 представлены результаты исследования скорости убывания погрешности решения, полученного с помощью неявной консервативной схемы для шагов по пространству и времени.

Таблица 1 – Скорость убывания погрешности, связанной с шагом по пространству для консервативной неявной схемы

I	h_x	E	$\Delta(h_x)$	$\dfrac{\Delta(h_x)}{\Delta(\frac{h_x}{2})}$
5	2	0,00599	0,00599	1,7
10	1			
10	1	0,00708	0,00354	
20	0,5			2,3
20	0,5	0,00612	0,00153	
40	0,25			
40	0,25	0,00616	0,00077	2,0
80	0,125			

I	h_x	E	$\Delta(h_x)$	$\frac{\Delta(h_x)}{\Delta(\frac{h_x}{2})}$
80	0,125	0,00672	0,00042	1,8
160	0,0625			
160	0,0625	0,00640	0,00020	2,1
320	0,03125			

Таблица 2 – Скорость убывания погрешности, связанной с шагом по времени, для консервативной неявной схемы

K	h_t	D	$\Delta(h_t)$	$\frac{\Delta(h_t)}{\Delta(\frac{h_t}{2})}$
100	0,2	0,221	0,02213	2,05
200	0,1			
200	0,1	0,216	0,01079	
400	0,05			2,04
400	0,05	0,212	0,00529	
800	0,025			
800	0,025	0,209	0,00261	2,03
1600	0,0125			
1600	0,0125	0,208	0,00130	2,01
3200	0,00625			
3200	0,00625	0,205	0,00065	2,00
6400	0,003125			

Из таблиц видно, что скорость убывания погрешности (последний столбец таблиц) равна двум, что соответствует теории. Кроме того, можно видеть стабильное поведение коэффициентов разложения, что говорит о том, что можно использовать их для прогнозирования погрешности.