УДК 517.928

СЦЕНАРИЙ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛАЗЕРА

© Кипкаева О.С., Щепакина Е.А.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: o_kipkaeva@mail.ru

В работе исследуется модель лазерного диода с оптоэлектронной обратной связью, которая в безразмерном виде описывается системой:

$$\begin{gathered} \dot{x} = x(y-1), \\ \dot{y} = \gamma[\delta_0 - y + f(x+w) - xy], \\ \dot{w} = -\varepsilon(w+x), \end{gathered} \tag{1}$$

где $f(x+w) = \alpha\frac{w+x}{1+s(w+x)}$.

Установлено, что в системе (1) может наблюдаться явление затягивания потери устойчивости интегральным многообразием системы [1]. Это явление заключается в том, что фазовая точка не сразу уходит от положения равновесия, потерявшего устойчивость, а через некоторое время. Существует несколько сценариев такого явления [2]. Рассмотрим случай, когда пара комплексно сопряженных чисел с отрицательной вещественной частью под действием возмущений становится парой вещественных характеристических чисел с разными знаками. В работе получены условия реализации такого сценария смены устойчивости в виде соотношения между значениями параметров системы.

Данный сценарий смены устойчивости интегрального многообразия может быть обобщен на класс дифференциальных систем вида

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \varepsilon\frac{dy}{dt} = z, \\ \varepsilon\frac{dz}{dt} = axy + bxz. \end{gathered} \tag{2}$$

Рассматриваемый сценарий затягивания потери устойчивости наблюдается в случае, когда параметры a и b имеют одинаковый знак. Быстрая подсистема системы (2) имеет две точки бифуркации при $x = 0$ и $x = -4a/b^2$. Если a и b – положительные числа, то, проходя через точку $x = -4a/b^2$, собственные числа из отрицательных вещественных переходят в комплексные с отрицательной вещественной частью. В точке $x = 0$ происходит одновременное обнуление вещественных и мнимых частей собственных чисел. При $x > 0$ собственные числа вновь становятся вещественными, но уже с разными знаками. Если a и b отрицательны, то состояние быстрой подсистемы изменяется аналогичным образом, но при $x \to -\infty$. В работе исследуется изменение динамики решений системы в окрестности точки $x = 0$.

Отметим, что систему (2) можно свести к уравнению Эйри

$$y'' = xy.$$

Действительно, вид решения этого уравнения меняется при $x = 0$. На отрицательной полуоси оба решения описывают колеблющиеся процессы, а на положительной – одно решение экспоненциально растет, а другое решение убывает к нулю. Такое поведение аналогично исследуемому сценарию смены устойчивости в системе (2).

Если положить $t = x$ в системе (2), то получим эквивалентное ей уравнение

$$\varepsilon^2 y'' = xy + \varepsilon xy'.$$

Чтобы свести это уравнение к уравнению Эйри, можно использовать замены, приведенные в книге [3].

Библиографический список

1. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций. Момква: ВИНИТИ, 1986. Т. 5. 218 с.

2. Shchepakina E.A. Three scenarios for changing of stability in the dynamic model of nerve conduction // Information Technology and Nanotechnology – Samara State Aerospace University, 2016. C. 664–673.

3. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МИР, 1968. 464 с.