

5. Коднир Д. С. Контактно-гидродинамическая теория смазки и расчет подшипников качения и зубчатых передач. Сб. «Теория трения и износа». Материалы IV Всесоюзной конференции по трению и смазке, «Наука», 1965.

6. Коровчинский М. В. О некоторых вопросах эластореологии, имеющих приложение в теории трения. «Трение и износ в машинах», сб. XVIII, «Наука» 1966.

7. D. Dowson, G. K. Higginson. Elastohydrodynamic Lubrication, Pergamon Press, London 1966.

8. Кристенсен Г. Уругогидродинамическая теория нормального сближения сферических тел. Труды Американского общества инженеров-механиков «Проблемы трения и смазки», № 1, 1970.

9. Херребрух К. Уругогидродинамическая теория сдвливания смазки при нормальном сближении двух цилиндров. Труды Американского общества инженеров-механиков «Проблемы трения и смазки», № 2, 1970.

10. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика деталей машин. Куйбышевский авиационный институт им. С. П. Королева, 1970.

11. A. J. Petronsevitch, D. S. Kodnir, R. G. Salukvadze, D. L. Bakashvili, V. Sh. Schwarzman. The Investigation of Oil Film Thickness in Lubricated Ball-Race Rolling Contact, Wear v 19, N 4, 1972.

В. Г. ШАХОВ, Б. П. ДЬЯЧЕНКО

## ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОБЪЕМА И КРИВИЗНЫ СТЕНКИ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТЕЙ ВИБРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

При рассмотрении теории вибрационных вискозиметров, как правило, пользуются результатами Мэзона [1]. Однако предположение Мэзона о малости глубины проникновения поперечных волн применимо только для маловязких ньютоновских жидкостей.

При исследовании вибрационными методами максвелловских и высоковязких ньютоновских жидкостей глубина проникновения поперечных волн может равняться нескольким сантиметрам. Это может привести, с одной стороны, к невыполнению условий неограниченности объема при плоском и круговом течениях, выражающемуся в искажающем влиянии на результаты измерений отраженных от стенок поперечных волн и, с другой стороны, — к необходимости учета влияния кривизны при исследованиях жидкостей круговыми цилиндрическими резонаторами. Влияние этих двух факторов на результаты измерений вязкости вибрационными методами не оценивается ни в одной из известных авторам работ по вибрационной вискозиметрии. Последнее обстоятельство послужило основанием для рассмотрения вопросов, изложенных в данной статье.

# 1. Основные соотношения, устанавливающие связь вязкоупругих свойств жидкостей с характеристиками колебательной системы плоский резонатор — жидкость

При движении максвелловской жидкости между двумя безграничными плоскими стенками, одна из которых неподвижная, а другая движется в своей плоскости со скоростью  $W(t) = W_0 e^{j\omega t}$  уравнение, определяющее профиль скорости, имеет вид [2]

$$\bar{w} = \text{Re exp}(\omega_1 \tau) \frac{\text{sh}[\Gamma(1 - \psi)]}{\text{sh} \Gamma}, \quad (1)$$

где используются безразмерные переменные

$$\bar{w} = \frac{w}{W_0}; \quad \Gamma = j\omega_1 - \tau_1 \omega_1; \quad \omega_1 = \frac{\omega h^2}{\nu}; \quad \psi = \frac{y}{h}; \quad (2)$$

$$\tau = \frac{\nu t}{h^2}; \quad \tau_1 = \frac{\nu t_{\text{рел}}}{h^2}.$$

Здесь  $w$  — скорость в зазоре  $h$  между пластинами;  
 $y$  — расстояние по нормали от движущейся поверхности;  
 $\rho, \eta, t_{\text{рел}}$  — плотность, вязкость и время релаксации жидкости;  
 $\nu$  — кинематическая вязкость;  
 $\omega$  — циклическая частота;

$\text{Re } Z$  — действительная часть комплексного числа  $Z$ .

Для неограниченного объема, при  $h \rightarrow \infty$ , из (1) следует результат [3]

$$\bar{w} = \text{Re exp} \left( j\omega t - \sqrt{\frac{j\omega - t_{\text{рел}} \omega^2}{\nu}} y \right). \quad (3)$$

Напряжение на поверхности движущейся пластины, обусловленное действием сил вязкоупругого демпфирования, на основании [4] с использованием (1), (2) определится выражением

$$\tau_{yx}|_{y=0} = \frac{\eta \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0}}{1 + t_{\text{рел}} \frac{\partial}{\partial t}} = W(t) \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}} \left( \frac{1}{s} \gamma_1 + j s \gamma_2 \right), \quad (4)$$

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{\text{sh } 2H_s + s^2 \text{sh } 2 \frac{H}{s}}{ch } 2H_s - \cos 2 \frac{H}{s}}, \quad \gamma_2 = \frac{\text{sh } 2H_s - \frac{1}{s^2} \text{sh } 2 \frac{H}{s}}{ch } 2H_s - \cos 2 \frac{H}{s}}; \quad (5)$$

$$H = \sqrt{\frac{\omega \rho}{2\eta}} h - \text{модифицированное число Рейнольдса}; \quad (6)$$

$$\eta(\omega) = \frac{\eta}{1 + \omega^2 t_{\text{рел}}^2} - \text{динамическая вязкость}; \quad (7)$$

$$s = \left( \sqrt{1 + \omega^2 t_{\text{рел}}^2} - \omega t_{\text{рел}} \right)^{1/2} - \text{коэффициент неьютоновости.} \quad (8)$$

Для неограниченного объема ( $h \rightarrow \infty$ ) напряжение на поверхности пластины из (3) определится в виде

$$\tau_{yx}|_{y=0} = W(t) \left( \frac{1}{s} + js \right) \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}}. \quad (9)$$

Вводя понятие механического импеданса, равного отношению напряжения на поверхности к ее мгновенной скорости ( $Z_M = \frac{\tau_{yx}}{W(t)} = R_M + jX_M$ ), определим составляющие импеданса на движущейся поверхности:

В неограниченном объеме

$$R_M = \frac{k}{s} \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}}, \quad X_M = ks \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}}. \quad (10)$$

В ограниченном объеме

$$R'_M = \frac{k}{s} \gamma_1 \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}}, \quad X'_M = ks \gamma_2 \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}}. \quad (11)$$

В (9), (10)  $k$  — геометрическая постоянная плоского резонатора, равная эффективной площади поверхности, контактирующей с жидкостью.

Из теории колебаний известно, что затухание линейных систем и частота свободных колебаний определяются выражениями

$$\delta = \frac{R_M}{2M}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{M}}. \quad (12)$$

Здесь  $R_M$  — коэффициент вязкоупругого демпфирования (действительная часть механического импеданса);

$M$  — эффективная масса системы резонатор — жидкость (для цилиндрического резонатора — эффективный момент инерции);

$D$  — жесткость резонатора.

Эффективная масса равна сумме массы резонатора  $M_0$  и присоединенной массы жидкости  $M_{ж}$ .

Присоединенная масса (момент инерции для цилиндрического резонатора) определится выражением

$$M_{ж} = k \frac{I_m \tau_{yx}|_{y=0}}{dW(t)} = \frac{kX_M}{\omega}. \quad (13)$$

Изменение собственной частоты резонатора, нагруженного жидкостью, по сравнению с частотой в вакууме равняется

$$\Delta f = \frac{\omega_0 - \omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{M_{ж}}{M_0}}} \right), \quad (14)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{M_0}}$  — собственная частота резонатора в вакууме.

При исследовании жидкостей вибрационными методами  $M_{ж} \ll M_0$  и, следовательно,  $\omega \approx \omega_0$ . Тогда (13) с использованием (12) может быть записано в виде

$$\Delta f \approx K_1 X_M; \quad K_1 = \frac{k}{4\pi M_0}. \quad (15)$$

Исходя из соотношений (10), (11), (12), (13), (15), запишем основные уравнения, устанавливающие связь вязкоупругих свойств жидкостей с коэффициентом затухания и изменением частоты плоского резонатора по сравнению с вакуумом.

Неограниченный объем

$$\varepsilon_{пл} = \frac{2\varepsilon_0 M_0 + \frac{k}{s} \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}}}{2 \left( M_0 + \frac{k s}{\omega} \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}} \right)}; \quad \Delta f = K_1 s \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}}. \quad (16)$$

Ограниченный объем

$$\varepsilon'_{пл} = \frac{2\varepsilon_0 M_0 + \frac{k}{s} \gamma_1 \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}}}{2 \left( M_0 + \frac{k s}{\omega} \gamma_2 \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}} \right)}; \quad \Delta f' = K_1 s \gamma_2 \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}}. \quad (17)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  — коэффициент затухания резонатора в вакууме, обусловленный внутренним трением в материале резонатора и влиянием заделки.

## 2. Влияние ограниченности объема на результаты измерений вязкоупругих свойств жидкостей вибрационными методами

Оценка влияния ограниченности объема на результаты измерений вязкоупругих свойств жидкостей проводилась исходя из анализа отношений изменений частот по сравнению с вакуумом и коэффициентов затухания нагруженного жидкостью резонатора для случаев ограниченного и неограниченного объемов.

Эти отношения на основании (16) и (17) имеют вид

$$\frac{\Delta f'_{пл}}{\Delta f_{пл}} = \gamma_2; \quad \frac{\varepsilon'_{пл}}{\varepsilon_{пл}} = \gamma_1 \frac{1 + ms}{1 + ms \gamma_2}, \quad (18)$$

где

$$m = \frac{k}{\omega M_0} \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}}.$$

В (18) не учтено внутреннее трение резонатора, т. к. для вязких жидкостей  $2\varepsilon_0 M_0 \ll R_M$ .

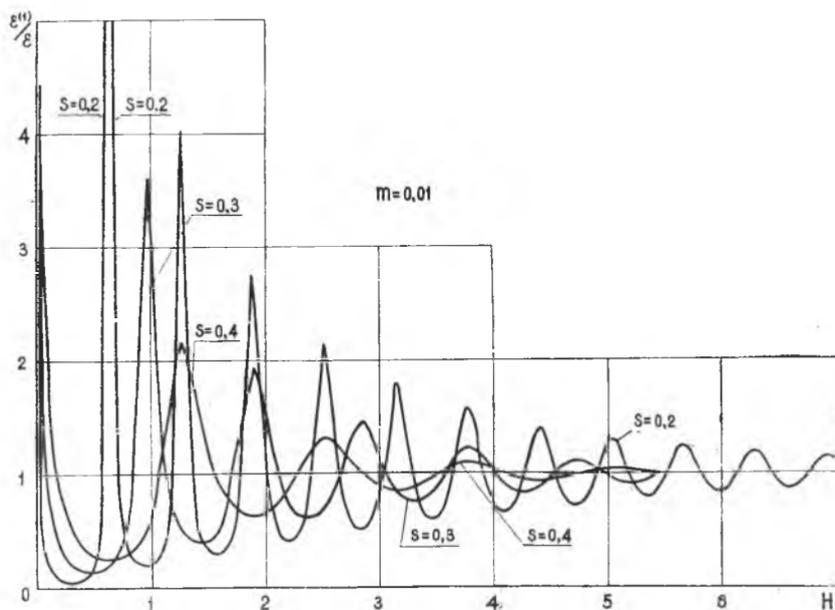
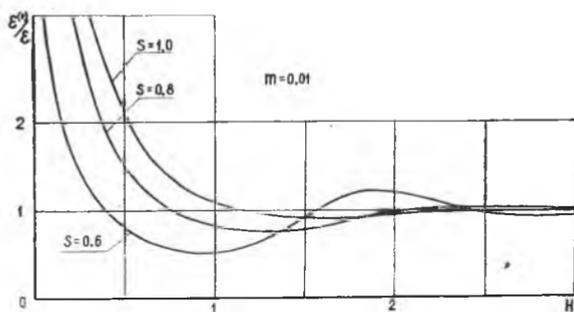


Рис. 1. Влияние конечности объема на коэффициент затухания плоского резонатора

Результаты расчетов отношений (18) для различных значений параметра  $H$  и коэффициента неньютоновости  $s$  представлены на рис. 1 и 2.

Расчеты проводились для значения безразмерного параметра  $m=0,01$ . Это значение  $m$  реально во всем возможном диапазоне измеряемых величин вязкости при исследовании вязкоупругих свойств жидкостей кварцевыми крутильноколеблющимися резонаторами.

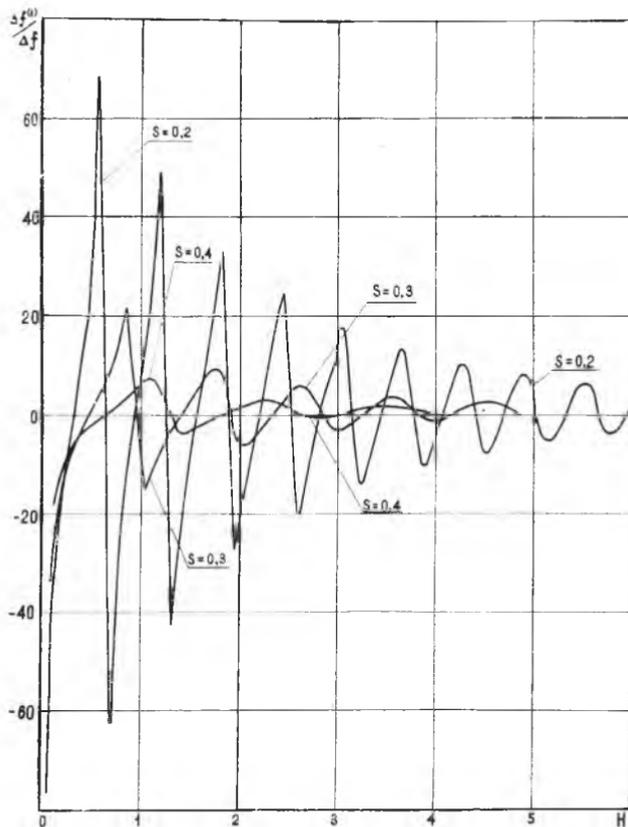


Рис. 2. Влияние конечности объема на частоту колебаний плоского резонатора

Анализ кривых, представленных на рис. 1 и 2, показывает, что в ограниченном объеме жидкости при распространении поперечных колебаний возможно возникновение поперечных стоячих волн. Это, в свою очередь, может привести к резонансным явлениям в столбе жидкости между ограничивающей поверхностью и стенкой резонатора и, как следствие, к ошибкам измерений.

Условие возникновения стоячих волн в столбе вязкоупругой жидкости определяется выражением

$$n = \frac{2}{\pi} \frac{H(1+s^4)}{s\sqrt{1-s^4}}$$

Здесь  $n$  — число целых полупериодов стоячих волн, укладывающихся в столбе жидкости.

### 3. Основные соотношения, устанавливающие связь вязкоупругих свойств жидкостей с характеристиками колебательной системы цилиндрический резонатор—жидкость

При круговом течении в неограниченном объеме максвелловской жидкости, движение которой вызывается крутильными колебаниями кругового цилиндра, уравнение, определяющее профиль скорости, имеет вид [2]

$$\bar{w} = \text{Re} \left[ e^{j\omega_1 \tau} \frac{H_1^{(1)}(j\Gamma r)}{H_1^{(1)}(j\Gamma)} \right], \quad (19)$$

где используются безразмерные переменные

$$\bar{w} = \frac{w}{W_0}; \quad \Gamma = j\omega_1 - \tau_1 \omega_1; \quad \omega_1 = \frac{\omega R^2}{\nu}; \quad \tau = \frac{\nu t}{R^2};$$

$$\tau_1 = \frac{\nu t_{\text{пер}}}{R^2}; \quad r = \frac{r}{R}.$$

Здесь  $r$  — цилиндрическая координата;

$R$  — радиус цилиндра;

$H^{(1)}(z)$  — функции Бесселя третьего рода порядка  $\nu$  для комплексного аргумента  $z$  (функции Ганкеля) [5].

Для крутильноколеблющихся резонаторов, как правило,  $|j\Gamma| \gg 1$  (для кварцевых цилиндрических резонаторов  $|j\Gamma| = 10 \div 140$ ), поэтому, определив по аналогии с предыдущей задачей напряжение на поверхности и воспользовавшись асимптотическим разложением функции Ганкеля, найдем из уравнения для напряжения выражение для механического импеданса

$$Z_{\text{мкр}} \approx \frac{\eta}{R} \frac{(2 + \Gamma)}{1 + j\omega t_{\text{пер}}},$$

активная и реактивная составляющие которого определяются в виде

$$R_{\text{мкр}} = \frac{2\eta(\omega)}{R} + \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\omega\eta(\omega)\rho}{2}}; \quad X_{\text{мкр}} = s \sqrt{\frac{\omega\eta(\omega)\rho}{2}} - \omega t_{\text{пер}} \frac{2\eta(\omega)}{R}. \quad (20)$$

Исходя из соотношений (12), (13), (15) и (20), запишем основные уравнения, устанавливающие связь вязкоупругих свойств жидкостей с коэффициентом затухания и изменением по сравнению с вакуумом собственной частоты цилиндрического резонатора

$$\varepsilon_{\text{кр}} = \frac{2\varepsilon_0 I_0 + \frac{k}{s} \left( 2 \frac{\eta(\omega)}{R} + \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\omega\eta(\omega)\rho}{2}} \right)}{2 \left[ I_0 + \frac{k}{\omega} \left( s \sqrt{\frac{\eta(\omega)\omega\rho}{2}} - \omega t_{\text{пер}} \frac{2\eta(\omega)}{R} \right) \right]};$$

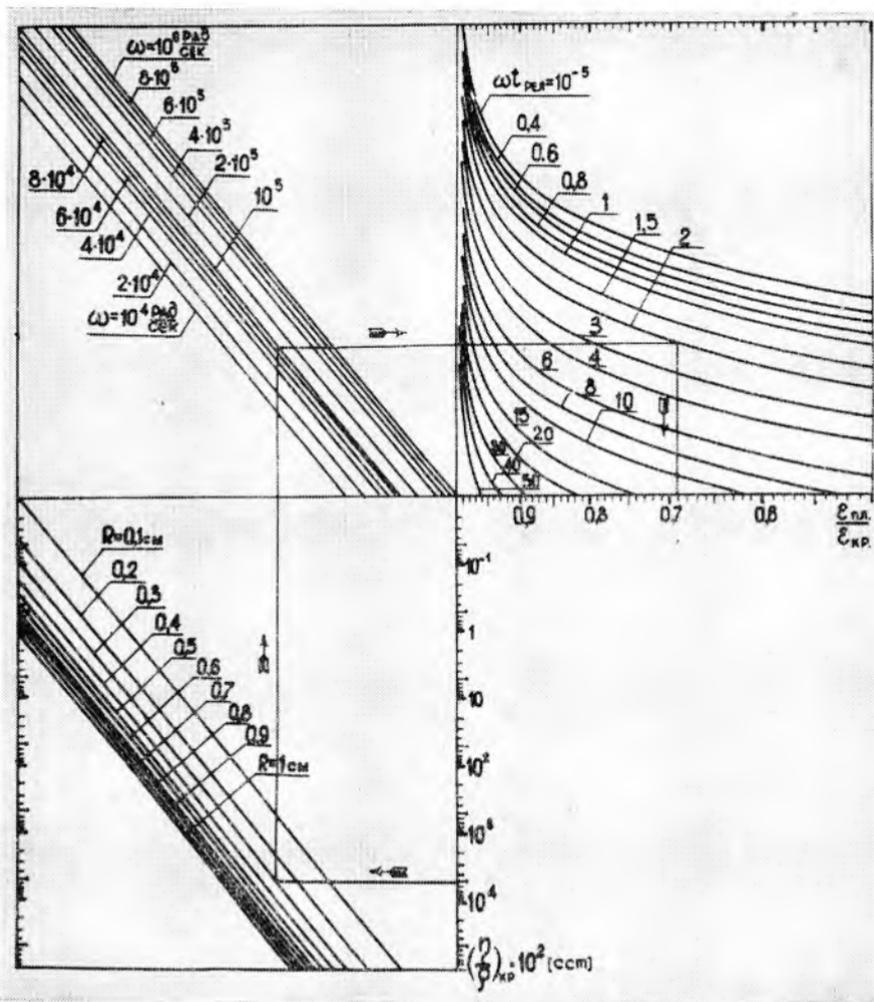


Рис. 3. Влияние поперечной кривизны стенки на коэффициент затухания резонатора

$$\Delta f_{кр} = K_1 \left( s \sqrt{\frac{\omega \eta(\omega) \rho}{2}} - \omega t_{рел} \frac{2\eta(\omega)}{R} \right). \quad (21)$$

Здесь  $I_0$  — полярный момент инерции цилиндра.

#### 4. Влияние кривизны поверхности цилиндрического резонатора на результаты измерений вязкоупругих характеристик жидкостей

Влияние кривизны поверхности цилиндрического резонатора оценивалось исходя из анализа отношений коэффициентов

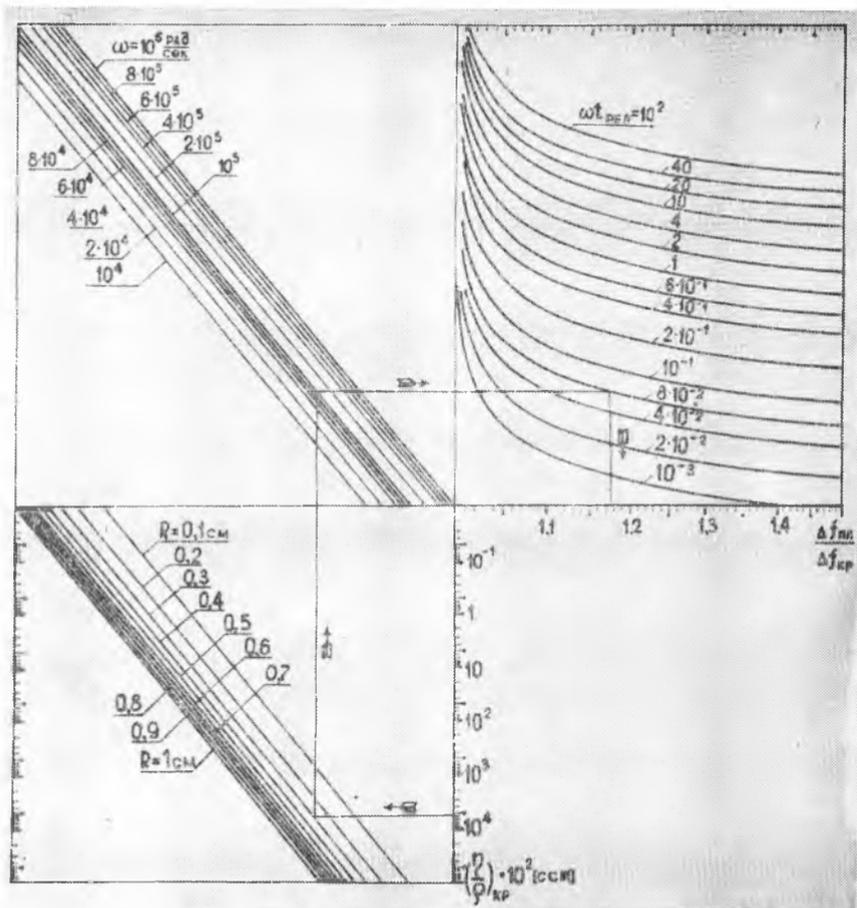


Рис. 4. Влияние поперечной кривизны стенки на частоту колебаний резонатора

затуханий  $\frac{\varepsilon_{пл}}{\varepsilon_{кр}}$  и изменений частот по сравнению с вакуумом  $\frac{\Delta f_{пл}}{\Delta f_{кр}}$  для плоских и цилиндрических резонаторов с одинаковыми собственными частотами.

Эти отношения определяют ошибки при расчете характеристик колебательного процесса ( $\varepsilon$ ,  $\Delta f$ ) цилиндрического резонатора по формулам плоской задачи. Результаты расчетов отношений  $\frac{\varepsilon_{пл}}{\varepsilon_{кр}}$  и  $\frac{\Delta f_{пл}}{\Delta f_{кр}}$  представлены в виде номограммы на рис. 3 и 4. Как видно из анализа этих номограмм, при обработке результатов измерений, полученных для цилиндрических резонаторов, ошибки из-за влияния кривизны могут достигать десят-

ков процентов при определении  $\epsilon$  и  $\Delta f$  по формулам (16). Последнее приводит к большим ошибкам при расчетах вязкости и времен релаксации.

С помощью этих номограмм можно последовательным приближением устранить ошибки, возникающие при использовании формул плоской задачи для обработки результатов измерений, полученных на установке с цилиндрическим резонатором.

При расчетах на ЭВМ вязкости и времен релаксации по данным измерений вискозиметрами с цилиндрическими резонаторами целесообразно использовать уравнения (21), в которых учтена кривизна поверхности резонатора.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мэзон У. Пьезоэлектричество и его практическое применение в ультразвуковедении. М., ИИЛ, 1952.
2. Шахов В. Г. Некоторые простейшие движения линейных вязкоупругих жидкостей. «Аэродинамика, динамика полета и системы управления», межвузовский сборник. Куйбышев, 1972.
3. На, Сидом. О задачах Стокса в линейных вязкоупругих жидкостях. «Прикладная механика», № 4, 1967.
4. Михайлов Н. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П. Основы молекулярной акустики. М., «Наука», 1964.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1968.

Е. В. ЗОЛОТЫХ, Ю. А. АТАНОВ, Д. И. КУЗНЕЦОВ

## ЗАВИСИМОСТЬ ВЯЗКОСТИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП ЖИДКОСТЕЙ ОТ ДАВЛЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ЖИДКОСТИ

Для исследования зависимости вязкости жидкостей от давления Всесоюзным научно-исследовательским институтом физико-технических и радиотехнических измерений (ВНИИФТРИ) разработана группа приборов, куда входят вискозиметр на давление до  $2000 \text{ кгс/см}^2$  и две установки для измерения вязкости при давлениях до  $10000 \text{ кгс/см}^2$  и  $15000 \text{ кгс/см}^2$ .

Ниже будет дано краткое описание установки до  $10000 \text{ кгс/см}^2$  (прибор до  $15000 \text{ кгс/см}^2$  устроен аналогично) [1].

Установка состоит из вискозиметра и вспомогательных узлов, предназначенных для его обслуживания. Вискозиметр работает по методу катящегося шарика и представляет собой полый цилиндр, в канале которого помещается измерительная трубка с шариком, заполненная исследуемой жидкостью. От рабочей жид-