

17. Абанов Л. В., Альшиц, Бердичевский Я. Г., Кодир Д. С., Умнягин М. Г., Устюжанинов М. И. Подшипники жидкостного трения прокатных станов. М., Машгиз, 1955.

18. Байбородов Ю. И., Котов В. А., Селивановский Ю. М. Акустическая эффективность эластичных, металлопластмассовых подшипников. Материалы научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. И. Ленина, часть 2, Куйбышевский авиационный институт, 1970.

Н. Т. ВИНИЧЕНКО, Г. А. ЗАВЬЯЛОВ, Х. Р. НИЗАМЕЕВ

К ДИНАМИКЕ ВАЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПОДШИПНИКЕ С ВНЕШНИМ НАГНЕТЕНИЕМ СМАЗКИ ЧЕРЕЗ КОЛЬЦЕВУЮ ЩЕЛЬ

Из работ [1], [2], [3] известно, что ненагруженный вал, вращающийся на жидкостном слое цилиндрического подшипника скольжения, неустойчив. Стабилизация движения вала осуществляется весовой или постоянной нагрузкой, создаваемой искусственно. Когда нагрузка оказывается недостаточной, применяются другие методы стабилизации [3], в частности, нагнетание жидкостной смазки в рабочий зазор через дросселирующее устройство.

Вращающийся в таком подшипнике вал поддерживается как гидростатической, так и гидродинамической составляющими реакции смазочного слоя, поэтому подшипник называется комбинированным. Упругие и демпфирующие свойства слоя смазки, обусловленные гидростатическим эффектом, оказывают стабилизирующее воздействие на движение вала.

При проектировании подшипников скольжения необходимо параметры выбрать так, чтобы обеспечивались определенные реакции смазочного слоя и устойчивость движения вала при заданной скорости вращения.

Из работ, посвященных исследованию комбинированных подшипников с дросселирующей щелью, можно привести лишь работу [3], в которой рассматриваются малые колебания ненагруженного вала в коротком подшипнике вблизи центрального равновесного положения.

В настоящей статье на основе уравнений пространственного, изотермического, нестационарного течения смазки определены реакции вязкого слоя жидкости подшипника конечной длины при произвольных движениях вала.

Исследована устойчивость произвольного равновесного положения вала на слое смазки, а также устойчивость периодического движения центра масс.

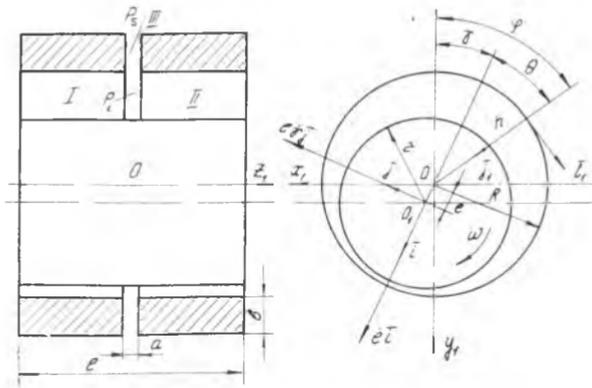


Рис. 1.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим цилиндрический подшипник (рис. 1), в среднем радиальном сечении которого выполнена кольцевая щель с размерами a и b . Через щель в рабочий зазор нагнетается жидкостная смазка под давлением p_s . Перед входом в смазочный слой давление падает до величины p_i . Смазка вытекает через торцы в окружающую среду, где поддерживается избыточное давление, равное нулю. Ширина щели a является величиной одного порядка с толщиной смазочного слоя и мала по сравнению с протяженностью щели ($a \ll b$). Протяженность щели b мала по сравнению с радиусом R ($b \ll R$).

Принимаем течение смазки в щели и в смазочном слое изотермическим и неустановившимся. Полагаем, что вал, вращающийся с угловой скоростью ω , совершает поступательное движение вместе с центром масс, при этом ось вала и подшипника параллельны в любой момент времени. Давление p_s нагнетания жидкости через кольцевую щель обеспечивает сплошной слой смазки.

Уравнение для распределения давления в слое вязкой жидкости областей 1 и 2 подшипника запишется [1] так:

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p_k}{\partial w^2} = \frac{6\mu R}{h^3} \frac{\partial}{\partial \theta} (Uh) + \frac{12\mu R^2}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial p_k}{\partial \theta}, \quad (k=1, 2). \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем приняты обозначения:

$$w = \frac{z}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{R} \quad \text{— безразмерные координаты;}$$

R — радиус подшипника;

$$h = \delta(1 + \gamma \cos \theta) \quad \text{— толщина слоя смазки;}$$

$$\delta = R - r \quad \text{— радиальный зазор;}$$

$$\gamma = \frac{e}{\delta} \quad \text{— относительный эксцентриситет, принимающий значения } \gamma \in [0, 1];$$

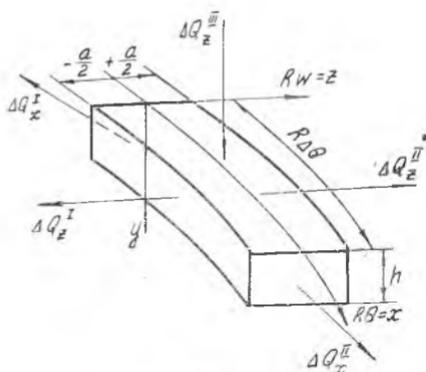


Рис. 2

U — проекция скорости периферийной точки вала на орт i . ($p_k = 1, 2, 3, i$) — давление в соответствующей области.

Граничные условия для уравнения (1.1)

$$\begin{aligned}
 p_k(\Theta, \omega) &= p_k(\Theta + 2\pi, \omega); \\
 p_k \left[\Theta, (-1)^k \frac{l}{2R} \right] &= 0; \\
 p_k \left[\Theta, (-1)^k \frac{a}{2R} \right] &= \\
 &= p_i(\Theta), \quad (k = 1, 2). \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Уравнение для распределения давления в щели с учетом малости ее ширины a имеет вид

$$\frac{\partial^2 p_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_3}{\partial \Theta^2} = 0 \quad (1.3)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
 p_3(\Theta, \bar{y}) &= p_3(\Theta + 2\pi, \bar{y}), \quad p_3 \left(\Theta, \frac{h}{R} \right) = p_s, \\
 p_3(\Theta, 0) &= p_i(\Theta), \quad p_i(\Theta) = p_i(\Theta + 2\pi). \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (1.1), (1.3) с граничными условиями (1.2), (1.4) необходимо одно дополнительное условие, которое получим из уравнения расходов смазки для элементарного объема (рис. 2), выделенного в слое смазки под щелью

$$\frac{\partial(\Delta m)}{\partial t} = \Delta Q_{y3} - \Delta Q_{z1} - \Delta Q_{z2} - \Delta Q_{x1} - \Delta Q_{x2}. \quad (1.5)$$

Здесь Δm — масса выделенного объема;
 ΔQ_{jk} ($j = x, y, z, k = 1, 2, 3$) — расходы жидкости.

Уравнение (1.5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 a \frac{\partial h}{\partial t} &= - \frac{1}{12\mu} \left(\frac{\partial p_3}{\partial y} \right)_{y=0} a^3 + \frac{h^3}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p_2}{R \partial \omega} \right)_{\omega = \frac{a}{2R}} - \left(\frac{\partial p_1}{R \partial \omega} \right)_{\omega = -\frac{a}{2R}} \right] + \\
 &+ \frac{a}{12\mu} \frac{\partial}{R \partial \Theta} \left(h^3 \frac{\partial p_i}{R \partial \Theta} - 6\mu U h \right). \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Присоединяя уравнение (1.6) к уравнениям (1.1) и (1.3) с граничными условиями (1.2) и (1.4), получим замкнутую систему краевых задач для определения давлений в слоях вязкой жидкости.

2. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Уравнение Лапласа (1.3) интегрируется методом Фурье, при этом решение ищется в виде

$$p_3 = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\bar{y}) \Theta_n(\theta) + C_1 \bar{y} + C_2. \quad (2.1)$$

Распределение давления в щели с учетом граничных условий (1.4) запишется как

$$p_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} n \bar{y} + \operatorname{cth} n \frac{b}{R} \operatorname{sh} n \bar{y} \right) (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) - \frac{p_s - \frac{\alpha_0}{2}}{\frac{b}{2}} \bar{y} + \frac{\alpha_0}{2}. \quad (2.2)$$

Коэффициенты α_0 , α_n , β_n разложения в ряд Фурье функции $p_i(\theta)$ остаются пока неопределенными.

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде суммы

$$p_k = p_{\infty}(\theta) + p_k(\theta, w) + p_k(w), \quad (k=1, 2). \quad (2.3)$$

Функция $p_{\infty}(\theta)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 p_{\infty}}{\partial \theta^2} = \frac{6\mu R}{h^3} \frac{\partial}{\partial \theta} U h + \frac{12\mu R^2}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial \theta}. \quad (2.4)$$

Определив функцию p_{∞} , запишем уравнение [4]

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p_k}{\partial w^2} = \frac{6\mu R}{h^3} \frac{\partial}{\partial \theta} U h + \frac{12\mu R^2}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial \theta}, \quad (k=1, 2). \quad (2.5)$$

Так как уравнению (1.1) удовлетворяет функция p_{∞} , то решение $p_k(\theta, w) + p_k(w)$ является решением уравнения Лапласа с граничными условиями:

$$\begin{aligned} p_k(\theta, w) + p_k(w) &= p_k(\theta + 2\pi, w) + p_k(w); \quad p_k \left[\theta, (-1)^k \frac{l}{2R} \right] + \\ &+ p_k \left[(-1)^k \frac{l}{2R} \right] = -p_{\infty}(\theta); \quad p_k \left[\theta, (-1)^k \frac{a}{2R} \right] + p_k \left[(-1)^k \frac{a}{2R} \right] = \\ &= p_i(\theta) - p_{\infty}(\theta); \quad p_{\infty}(\theta) = p_{\infty}(\theta + 2\pi). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решая уравнение Лапласа методом Фурье с учетом граничных условий (2.6) и подставляя полученное решение в равенство (2.3), найдем выражение для распределения давления в областях 1 и 2, которое после преобразований примет вид

$$p_k = p_{\infty}(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} n \frac{l}{2R} \operatorname{ch} n w - (-1)^k \operatorname{sh} n w}{\operatorname{th} n \frac{l}{2R} \operatorname{ch} n \frac{a}{2R} \operatorname{sh} n \frac{a}{2R}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\alpha_n - \left(1 - \frac{\operatorname{ch} n \frac{a}{2R}}{\operatorname{ch} n \frac{l}{2R}} \right) A_n \right] \cos n\theta + \left[\beta_n - \left(1 - \frac{\operatorname{ch} n \frac{a}{2R}}{\operatorname{ch} n \frac{l}{2R}} \right) B_n \right] \sin n\theta \right\} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} n w}{\operatorname{ch} n \frac{l}{2R}} (A_n \cos n\theta + B_n \sin \theta) + \frac{\alpha_0 R}{l-a} w + \frac{\alpha_0 l}{2(l-a)} - A_0, \quad (k=1, 2). \quad (2.7)$$

В равенстве (2.7) коэффициенты A_0 , A_n , B_n разложения в ряд Фурье функции $p_{\infty}(\theta)$ остаются пока неопределенными.

3. Проекция главного вектора реакции слоя смазки

Проекция главного вектора реакции слоя вязкой жидкости, действующего на подвижный вал, на орты \vec{i} и \vec{j} запишутся так:

$$P_e = R^2 \int_{-\frac{a}{2R}}^{\frac{l}{2R}} d\omega \int_0^{2\pi} p_1 \cos \theta d\theta + R^2 \int_{\frac{a}{2R}}^{\frac{l}{2R}} d\omega \int_0^{2\pi} p_2 \cos \theta d\theta + Ra \int_0^{2\pi} p_i \cos \theta d\theta, \quad (3.1)$$

$$P_\gamma = R^2 \int_{-\frac{a}{2R}}^{\frac{l}{2R}} d\omega \int_0^{2\pi} p_1 \sin \theta d\theta + R^2 \int_{\frac{a}{2R}}^{\frac{l}{2R}} d\omega \int_0^{2\pi} p_2 \sin \theta d\theta + Ra \int_0^{2\pi} p_i \sin \theta d\theta.$$

Выражения (3.1) с учетом (2.7) и представления функции в виде ряда Фурье, преобразуем к виду

$$P_e = R(l-a) \int_0^{2\pi} p_{\infty} \cos \theta d\theta + 2\pi R^2 (\alpha_1 - 2A_1) \operatorname{th} \frac{l-a}{4R} + \pi Ra \alpha_1, \quad (3.2)$$

$$P_\gamma = R(l-a) \int_0^{2\pi} p_{\infty} \sin \theta d\theta + 2\pi R^2 (\beta_1 - 2B_1) \operatorname{th} \frac{l-a}{4R} + \pi Ra \beta_1.$$

Отсюда следует, что проекции реакции зависят только от первых гармоник разложений функций $p_i(\theta)$ и $p_{\infty}(\theta)$ в ряд Фурье.

Проекция реакции смазочного слоя подшипника бесконечной длины запишутся:

$$P_{e\infty} = R(l-a) \int_0^{2\pi} p_{\infty} \cos \theta d\theta = -R(l-a) \int_0^{2\pi} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial \theta} \sin \theta d\theta; \quad (3.3)$$

$$P_{\gamma\infty} = R(l-a) \int_0^{2\pi} p_{\infty} \sin \theta d\theta = R(l-a) \int_0^{2\pi} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial \theta} \cos \theta d\theta.$$

Уравнение (2.4) с учетом выражения для $h(\theta)$ примет вид

$$\frac{\partial p_{\infty}}{\partial \theta} = \frac{6\mu R^2 w}{\delta^2 (1 + \chi \cos \theta)^2} + \frac{12\mu R^2}{\delta^2} \frac{\dot{\chi} \sin \theta - \chi \dot{\gamma} \cos \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3} + \frac{C_1}{(1 + \chi \cos \theta)^3}. \quad (3.4)$$

Из условия $\int_0^{2\pi} \frac{\partial p_\infty}{\partial \theta} d\theta = 0$ найдем произвольную постоянную

$$C_1 = \frac{12\mu R^2}{\delta^2} \left(\omega \frac{1 - \chi^2}{2 + \chi^2} + \frac{3\chi^2 \dot{\chi}}{2 + \chi^2} \right). \quad (3.5)$$

Тогда проекции реакции $P_\infty (P_{e\infty}, P_{\gamma\infty})$ будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} P_{e\infty} &= -\frac{12\mu R^3 (l-a) \pi}{\delta^2} \frac{\chi}{(1-\chi^2)^{3/2}}; \\ P_{\gamma\infty} &= \frac{12\mu R^3 (l-a) \pi \chi}{\delta^2 (2+\chi^2)(1-\chi^2)^{1/2}} (\omega - 2\dot{\chi}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Проекция $P_{\gamma\infty}$ обусловлена собственным вращением вала с угловой скоростью ω и прецессионным переносным движением с угловой скоростью $\dot{\chi}$. Если $\omega = 2\dot{\chi}$, то $P_{\gamma\infty} = 0$. В частности, если центр вала движется по дуге окружности с радиусом $\delta\chi = \text{const}$ и $\omega = 2\dot{\chi}$, то обе проекции $P_{e\infty}$ и $P_{\gamma\infty}$ обращаются в нуль. Таковы особенности реакций при гидродинамическом течении смазки без внешнего нагнетания. Эти особенности отмечены в ряде работ, например, [1], [5], при исследовании гидродинамических подшипников скольжения.

Подставив (3.4) в выражения для коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $p_\infty(\theta)$, получим

$$A_0 = 0; \quad A_1 = -\frac{12\mu R^2}{\delta^2} \frac{\chi}{(1-\chi^2)^{3/2}}; \quad B_1 = \frac{12\mu R^2 \chi}{\delta^2 (2+\chi^2)(1-\chi^2)^{1/2}} (\omega - 2\dot{\chi}). \quad (3.7)$$

Для определения коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ подставим выражения (2.2), (2.7) в условие (1.6), получим бесконечную систему уравнений, связывающую неизвестные $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$ с A_0, A_n, B_n , которая ввиду громоздкости здесь не приведена. Ограничиваясь системой трех уравнений, получим выражения для коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ в виде

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\Delta_1} \left\{ -\frac{12\mu a R \dot{\chi}}{\delta^2} \frac{1 + 2\chi^2}{(1-\chi^2)^{3/2}} - \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{P_s}{b} \frac{3\chi}{R (1-\chi^2)^{5/2}} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{1}{b} \frac{3\chi}{2(1-\chi^2)^{3/2}} \frac{1}{\Delta_0} \left[\frac{12\mu a R \dot{\chi}}{\delta^2} \frac{3\chi}{(1-\chi^2)^{3/2}} + \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{P_s}{b} \frac{2+\chi^2}{(1-\chi^2)^{5/2}} \right] \right\} + \\ &+ 2A_1 \text{th} \frac{l-a}{4R}; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\Delta_2} \left[-\frac{12\mu a R \gamma \dot{\gamma}}{\delta^2} \frac{1}{(1-\gamma^2)^{1/2}} + 2B_1 \operatorname{th} \frac{l-a}{4R} + \frac{6\mu a R \omega \gamma}{\delta^2} \frac{1}{(1-\gamma^2)^{1/2}} \right],$$

где

$$\Delta_0 = \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{1}{R} \frac{2+\gamma^2}{2(1-\gamma^2)^{3/2}} + \frac{4R}{l-a};$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{1+2\gamma^2}{(1-\gamma^2)^{5/2}} \operatorname{cth} \frac{b}{R} - \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{1}{R} \frac{3\gamma}{2(1-\gamma^2)^{1/2}} \frac{1}{\Delta_0} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{3\gamma}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \operatorname{cth} \frac{b}{R} + \frac{6a}{R} \cdot \frac{1-\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} \right] +$$

$$+ 2 \operatorname{cth} \frac{l-a}{2R} + \frac{a}{R} - \frac{3a}{R} \left(1 - 2 \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma^2} \right);$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{1}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \operatorname{cth} \frac{b}{R} + 2 \operatorname{cth} \frac{l-a}{2R} + \frac{a}{R} + \frac{3a}{R} \left(1 - 2 \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} \right).$$

Проекции (3.2) реакции слоя вязкой жидкости, действующей на вал, для эксцентриситетов $\gamma \in [0, 1)$ с учетом (3.8) будут иметь вид

$$P_e = -\frac{12\mu R^3 (l-a) \pi \dot{\gamma}}{\delta^2} \left\{ \frac{1}{(1-\gamma^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} \right) + \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2R} \right) \times \right.$$

$$\times \frac{1}{\Delta_1} \left[\frac{2a}{l-a} \cdot \frac{1+2\gamma^2}{(1+\gamma^2)^{3/2}} \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \left(\frac{a}{\delta} \right) \frac{2R}{l-a} \cdot \frac{1}{2\Delta_0} \cdot \frac{9\gamma^2}{(1-\gamma^2)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \cdot \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} \right] \left. - \frac{2\pi R^3}{b} p_s \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2R} \right) \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\Delta_1} \frac{3\gamma}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{1}{2\Delta_0} \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{1}{R} \frac{2+\gamma^2}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \right] \right\},$$

$$P_\gamma = \frac{12\mu R^3 (l-a) \pi \gamma}{\delta^2} \left\{ \left(1 - \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{1}{(2+\gamma^2)(1-\gamma^2)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2R} \right) \cdot \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{a}{l-a} \cdot \frac{1}{(1-\gamma^2)^{1/2}} + \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2}}{(2+\gamma^2)(1-\gamma^2)^{1/2}} \right] \right\} \times$$

$$\times (\omega - 2\dot{\gamma}), \quad (3.9)$$

где $\varepsilon = \frac{l-a}{2R}$.

При малых отклонениях центра вала, определяемых декартовыми координатами $\Delta x_1 = \delta \Delta \xi$ и $\Delta y_1 = \delta \Delta \eta$, от центра подшипника проекции реакции смазочного слоя запишутся

$$\Delta p_{x_1} = -\frac{12\pi R^2 p_{0l}}{\Delta} \left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{l-a} \right) \Delta \xi + \frac{6\mu R^3 \omega \pi (l-a)}{\delta^2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\Delta\gamma - 2 \frac{\Delta\dot{\xi}}{\omega} \right) \left[\left(1 - \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{1}{2\varepsilon\Delta} \left(2 \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{R} \right)^2 \right]; \\ \Delta P_{y_i} = & - \frac{12\pi R^2 p_{0i}}{\Delta} \left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{l-a} \right) \Delta\gamma - \frac{6\mu R^3 \omega \pi (l-a)}{\delta^2} \times \\ & \times \left(\Delta\dot{\xi} + 2 \frac{\Delta\dot{\gamma}}{\omega} \right) \left[\left(1 - \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{1}{2\varepsilon\Delta} \left(2 \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{R} \right)^2 \right], \quad (3.10) \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \operatorname{ctth} \frac{b}{R} + 2 \operatorname{cth} \varepsilon + \frac{a}{R}, \quad \varepsilon = \frac{l-a}{2R},$$

$$p_{0i} = \frac{\left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{l-a}{b} p_s}{\left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{l-a}{b} + 4}.$$

Рассмотрим частные случаи. Если давление нагнетания жидкости через щель равно нулю ($p_s=0$, $a=0$), а вал вращается с угловой скоростью ω и совершает произвольное поступательное движение, то реакции (3.9) переходят в равенство, соответствующее гидродинамическому режиму [1]

$$\begin{aligned} P_e &= - \frac{12\mu R^3 l \pi \dot{\gamma}}{\delta^2 (1-\gamma^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{th} \varepsilon \right); \\ P_{\gamma} &= \frac{12\mu R^3 l \pi \dot{\gamma}}{\delta^2 (2+\gamma^2)(1-\gamma^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{th} \varepsilon \right) (\omega - 2\dot{\varepsilon}) \quad (3.11) \end{aligned}$$

Если угловая скорость $\omega=0$ и центр вала неподвижен $\dot{\gamma}=0$ при наличии внешнего нагнетания через щель под давлением p_s , то реакции (3.9) переходят в равенства, соответствующие гидростатическому режиму

$$\begin{aligned} P_e &= - \frac{12\pi R^3 p_s}{\delta^2} \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2R} \right) \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{1}{\Delta_1} \frac{3\gamma}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \times \\ & \times \left[1 - \frac{1}{2\Delta_0} \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{1}{b/R} \frac{2+\gamma^2}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \right], \quad (3.12) \\ P_{\gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Если центр вала неподвижен, то в гидродинамическом режиме смазки при вращении вала проекция $P_e=0$, а $P_{\gamma} \neq 0$, а в гидростатическом режиме при $\omega=0$ проекция $P_e \neq 0$, а $P_{\gamma}=0$.

На рис. 3 представлены зависимости безразмерных реакций F_e и F_{γ} слоя смазки от эксцентриситета γ при избыточном давлении $\bar{p}_s=5$ и стационарном течении смазки ($\dot{\gamma}=0$, $\dot{\gamma}=0$), построенные по выражениям (3.9) и (3.12). Связь между размерными и безразмерными реакциями осуществляется формулой

$$F = \frac{\sqrt{P_e^2 + P_{\gamma}^2}}{2\pi R^2 p_a}.$$

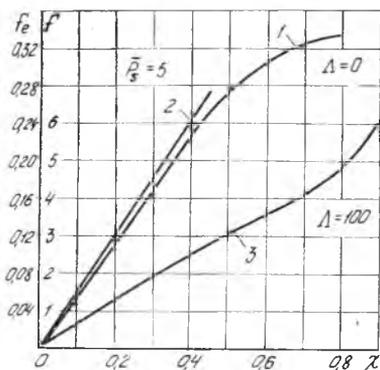


Рис. 3

Кривая 1 характеризует зависимость реакции F_e от эксцентриситета λ при $\Lambda = 0$ (гидростатический режим). Кривая 2 изображает эту же зависимость, рассчитанную по формулам теории для малых эксцентриситетов. Кривая 3 построена для $\Lambda = 100$ и характеризует реакцию слоя смазки при наличии угловой скорости вала и нагнетания смазки под избыточным давлением $\bar{p}_s = 5$.

4. Устойчивость

Уравнения движения вала запишутся

$$m\ddot{\delta}(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}\dot{\gamma}^2) = P_e + G \cos \gamma; \quad (4.1)$$

$$m\ddot{\delta}(\dot{\gamma}\dot{\gamma} + 2\dot{\gamma}\dot{\gamma}) = P_\gamma - G \sin \gamma.$$

Здесь G — вес вала.

При постоянной угловой скорости вращения вала и стационарном течении смазки уравнения (4.1) с учетом реакций (3.9) примут вид

$$G \cos \gamma_0 = \frac{2\pi R^3 p_s}{b} f_1, \quad G \sin \gamma_0 = \frac{12\mu R^3 (l-a) \pi \omega}{\delta^2} f_2, \quad (4.2)$$

где

$$f_1 = \left(\frac{a}{\delta}\right)^3 \frac{1}{\Delta_1} \frac{3\dot{\gamma}}{(1-\dot{\gamma}_0^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{1}{2\Delta_0} \left(\frac{a}{\delta}\right)^3 \frac{1}{b/R} \frac{2+\dot{\gamma}_0^2}{(1-\dot{\gamma}_0^2)^{3/2}} \right] \left(\text{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2R} \right);$$

$$f_2 = \dot{\gamma}_0 \left\{ \frac{1 - \frac{2}{\varepsilon} \text{th} \frac{\varepsilon}{2}}{(2+\dot{\gamma}_0^2)(1-\dot{\gamma}_0^2)^{1/2}} + \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{a}{l-a} \frac{1}{(1-\dot{\gamma}_0^2)^{3/2}} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\text{th} \frac{\varepsilon}{2}}{(2+\dot{\gamma}_0^2)(1-\dot{\gamma}_0^2)^{1/2}} \right] \left(\text{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2R} \right) \right\}.$$

Координаты $\dot{\chi}_0$ и $\dot{\gamma}_0$ равновесного положения вала находятся из системы уравнений (4.2), преобразованной к виду

$$G^2 = \left[\frac{2\pi R^3 p_s}{b} f_1 \right]^2 + \left[\frac{12\mu R^3 (l-a) \pi \omega}{\delta^2} f_2 \right]^2; \quad (4.3)$$

Расчет проведен для следующих значений параметров подшипника: $\frac{a}{\delta} = 0,8$, $\frac{b}{R} = 0,1$, $\varepsilon = 1$, $\bar{p}_s = \frac{p_s}{p_a} = 5$, $\Lambda = 0$, 100 .
Здесь $\Lambda = \frac{6\mu R^2 \omega}{p_a \delta^2}$, p_a — давление окружающей среды.

Кривая 1 характеризует зависимость реакции F_e от эксцентриситета λ при $\Lambda = 0$ (гидростатический режим). Кривая 2 изображает эту же зависимость, рассчитанную по формулам теории для малых эксцентриситетов.

Кривая 3 построена для $\Lambda = 100$ и характеризует реакцию слоя смазки при наличии угловой скорости вала и нагнетания смазки под избыточным давлением $\bar{p}_s = 5$.

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{6\mu(l-a) \omega b}{\delta^2 p_s} \frac{f_2}{f_1}.$$

Уравнения возмущенного движения вала в окрестности произвольного равновесного положения запишутся:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\chi} + a_1 \Delta \dot{\chi} + b_1 \Delta \chi + c_1 \Delta \gamma &= 0, \\ \Delta \ddot{\gamma} + a_2 \Delta \dot{\gamma} + b_2 \Delta \gamma - c_2 \Delta \chi &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{m\delta} \left(\frac{\partial P_e}{\partial \dot{\chi}} \right)_{\substack{\chi=\chi_0 \\ \dot{\chi}=0}}; & b_1 &= -\frac{1}{m\delta} \left(\frac{\partial F_{\gamma}}{\partial \dot{\chi}} \right)_{\substack{\chi=\chi_0 \\ \dot{\chi}=0}}; & c_1 &= \frac{G \sin \gamma_0}{m\delta}, \\ a_2 &= -\frac{1}{m\delta \gamma_0} \left(\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial \dot{\gamma}} \right)_{\substack{\chi=\chi_0 \\ \dot{\gamma}=0}}; & b_2 &= -\frac{G \cos \gamma_0}{m\delta \gamma_0}, & c_2 &= \frac{1}{m\delta \gamma_0} \left(\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial \dot{\chi}} \right)_{\substack{\chi=\chi_0 \\ \dot{\gamma}=0}}. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение системы (4.4) будет уравнением четвертой степени

$$s^4 + A_1 s^3 + A_2 s^2 + A_3 s + A_4 = 0. \quad (4.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 + a_2, & A_2 &= b_1 + b_2 + a_1 a_2, \\ A_3 &= a_2 b_1 + a_1 b_2, & A_4 &= b_1 b_2 + c_1 c_2. \end{aligned}$$

Все коэффициенты уравнения (4.5) $A_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), так что условием устойчивости произвольного равновесного положения будет выполнение неравенства

$$A_1 A_2 A_3 - A_1^2 A_4 - A_3^2 > 0. \quad (4.6)$$

Для ненагруженного вала условие устойчивости имеет простой вид

$$\frac{12\pi R^3 p_0 i}{\delta m \Delta} \left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{l-a} \right) > \frac{\omega^2}{4}. \quad (4.7)$$

По условиям (4.6) и (4.7) построены границы областей устойчивости (рис. 4) для произвольного (кривая 1) и центрального (кривая 2) равновесных положений вала при $p_s = 5$ и нагрузке, создающей относительный эксцентриситет $\chi_0 = 0,5$.

Оказывается, что если ненагруженный вал устойчив, т. е. выполняется условие (4.7), любое равнове-

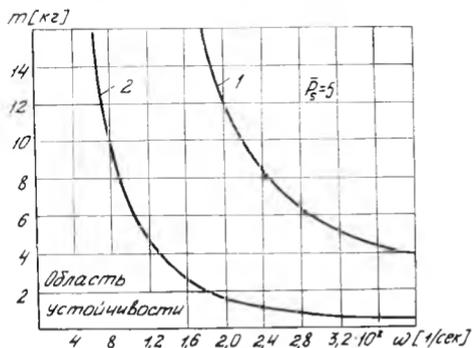


Рис. 4

ное положение вала будет устойчивым, какова бы ни была нагрузка G . С этой точки зрения важным является исследование устойчивости центральных равновесных положений для вертикально расположенных роторов, роторных систем в условиях невесомости, а также быстроходных и легко нагруженных роторов в опорах скольжения.

Если вал теряет устойчивость равновесного положения, т. е. когда неравенство (4.7) не выполняется, центр масс вала движется по траектории

$$\chi_0 = \text{const}, \quad \dot{\gamma} = \Omega. \quad (4.8)$$

В этом случае уравнения движения вала запишутся

$$\begin{aligned} \Omega^2 = & \frac{2\pi R^3 p_s}{m\delta b} \left(\text{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2R} \right) \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{3}{\Delta_1} \frac{1}{(1-\chi_0^2)^{3/2}} \times \\ & \times \left[1 - \frac{1}{2\Delta_0} \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{1}{b/R} \frac{2 + \chi_0^2}{(1-\chi_0^2)^{3/2}} \right]; \\ \frac{12\pi R^3 (l-a)\pi\chi_0}{\delta^3 m} & \left\{ \left(1 - \frac{2}{\varepsilon} \text{th} \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{1}{(2 + \chi_0^2)(1-\chi_0^2)^{3/2}} + \left(\text{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2R} \right) \times \right. \\ & \times \left. \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{a}{l-a} \frac{1}{(1-\chi_0^2)^{3/2}} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\text{th} \frac{\varepsilon}{2}}{(2 + \chi_0^2)(1-\chi_0^2)^{3/2}} \right] \right\} (\omega - 2\Omega) = 0. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Из второго уравнения (4.9) видно, что угловая скорость прецессионного движения вала $\Omega = \omega/2$. Радиус траектории центра вала находится из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{8\pi R^3 p_s}{m\delta b\omega^2} \left(\text{th} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2R} \right) \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{3}{\Delta_1} \frac{1}{(1-\chi_0^2)^{3/2}} \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{2\Delta_0} \left(\frac{a}{\delta} \right)^3 \frac{1}{b/R} \frac{2 + \chi_0^2}{(1-\chi_0^2)^{3/2}} \right] - 1 = 0. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Уравнения возмущенного движения центра вала в окрестности траектории (4.8) имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\chi} + d_1 \Delta\dot{\gamma} + e_1 \Delta\chi - f_1 \Delta\dot{\gamma} &= 0; \\ \Delta\ddot{\gamma} + d_2 \Delta\dot{\gamma} + e_2 \Delta\chi + f_2 \Delta\dot{\chi} &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$d_1 = -\frac{1}{m\delta} \left(\frac{\partial P_e}{\partial \dot{\gamma}} \right)_{\substack{\chi=\chi_0 \\ \dot{\chi}=0}}; \quad e_1 = -\Omega^2 + \frac{1}{m\delta} \left(\frac{\partial P_e}{\partial \chi} \right)_{\substack{\chi=\chi_0 \\ \dot{\chi}=0}}; \quad f_1 = 2\Omega\chi_0,$$

$$d_2 = -\frac{1}{m\delta\gamma_0} \left(\frac{\partial P_\gamma}{\partial \dot{\gamma}} \right)_{\substack{\gamma=\gamma_0 \\ \dot{\gamma}=\Omega}}; \quad e_2 = -\frac{1}{m\delta\gamma_0} \left(\frac{\partial P_\gamma}{\partial \dot{\gamma}} \right)_{\substack{\gamma=\gamma_0 \\ \dot{\gamma}=\Omega}}; \quad f_2 = \frac{2\Omega}{\gamma_0}.$$

Характеристическое уравнение системы (4.11) запишется

$$s(s^3 + B_1 s^2 + B_2 s + B_3) = 0, \quad (4.12)$$

где

$$B_1 = d_1 + d_2; \quad B_2 = e_1 + d_1 d_2 + f_1 f_2; \quad B_3 = e_1 d_2 + f_1 f_2.$$

Наличие нулевого корня в уравнении (4.12) свидетельствует о том, что положение центра вала по координате γ безразлично.

Для устойчивости периодического движения центра вала требуется выполнение неравенства

$$B_1 B_2 > B_3, \quad (4.13)$$

которое при $p_s > 0$ всегда выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бургвиц А. Г., Завьялов Г. А. Устойчивость движения валов в подшипниках жидкостного трения. М., «Машиностроение», 1964.
2. Поздняк Э. Л. Влияние масляного слоя в подшипниках скольжения на устойчивость и критические скорости высокоскоростных роторов. В сб.: «Колебания валов на масляной пленке», М., «Наука», 1968.
3. Сергеев С. И. Динамика криогенных турбомашин с подшипниками скольжения. М., «Машиностроение», 1973.
4. Полецкий А. Т. Распределение гидродинамического давления в смазочном слое подшипника конечной длины. В сб.: «Расчет и конструирование машин». Челябинск, ЧПИ. 1955.
5. Лойцянский Л. Е. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.