Е. М. МАРКУШИН

О ВЫЧИСЛЕНИИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

В заметке рассматривается задача о вычислении интегрального качества переходного процесса для уравнения с запаздыванием времени. Результат, полученный в работе, может быть использован, в частности, при вычислении квадратичных функционалов Н. Н. Красовского [1.2].

Предварительные замечания

Пусть движение некоторой системы описывается уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau), \tag{1.1}$$

где α — постоянный коэффициент, τ — запаздывание времени ($\tau=\mathrm{const}>0$).

Предположим, что корни характеристического квазиполинома

$$\Delta(\lambda) = \lambda - ae^{-\lambda\tau} = 0 \tag{1.2}$$

простые, имеют отрицательные действительные части и расположены в порядке убывания действительных частей

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1 \geqslant \mathrm{Re}\,\lambda_2 \geqslant \cdots .$$

Наложенные условия на корни квазиполинома (1.2) будут выполнены, если

$$-\frac{\pi}{2\tau} < a < 0, \quad a \neq -\frac{1}{\tau e}.$$

В данной заметке предложен способ вычисления функционала

$$I[f_1(\mu),\ f_2(\eta)] = \int_0^\infty f_1(t+\mu)\, f_2(t+\eta)\, dt, \tag{1.3}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$, $(t>0)$ — решения уравнения (1.1) с начальными возмущениями

$$f_1(\mu), \quad f_2(\eta), \quad [-\tau \leqslant \mu,\ \eta \leqslant 0], \tag{1.4}$$

путем разложения подынтегральных функций $f_1(t+\mu)$, $f_2(t+\eta)$ в ряд по собственным решениям уравнения (1.1).

§ 2. Вычисление интеграла (1.3)

Пусть $\eta < \mu$.

Вводя новую переменную $t_1 = t + \mu$ и опуская затем индекс, функционал (1.3) запишем в виде

$$I = I_1 + I_2, \tag{2.1}$$

$$I_1 = \int_\mu^0 f_1(t) f_2(t+\eta-\mu)\, dt, \tag{2.2}$$

$$I_2 = \int_0^\infty f_1(t) f_2(t+\eta-\mu)\, dt. \tag{2.3}$$

Так как $\eta < \mu$, то функционал I_1 определен начальными возмущениями (1.4).

В соответствии с работами [3,4], решение

$$f_2(t+\eta-\mu), \quad [-\tau \ll \mu,\ \eta \leqslant 0], \quad (t>0)$$

может быть представлено в виде ряда

$$f_2(t+\eta-\rho) = \sum_{j=1}^\infty p_j e^{\lambda_j (t+\eta-\mu)}, \tag{2.4}$$

где $p_j (\rho = 1, 2, \ldots)$ постоянные коэффициенты.

Но тогда функционал I_2 представляет собой следующий ряд

$$I_2 = \int_0^\infty f_1^{(t)} f_2^{(t+\eta-\mu)}\, dt = \sum_{j=1}^\infty p_j e^{\lambda_j (\eta-\mu)} \int_0^\infty f^{(t)} e^{\lambda_j t}\, dt. \tag{2.5}$$

В силу преобразования Лапласа имеет место равенство [5]

$$\int_0^\infty f_1^{(t)} e^{\lambda_j t}\, dt = -\frac{f_1^{(0)+ae^{\lambda_j \tau}} \int_{-\tau}^0 f_1(t) e^{\lambda_j t}\, dt}{\lambda_i + ae^{\lambda_j \tau}}. \tag{2.6}$$

Или, ввиду того, что

$$\frac{1}{\lambda_j + ae^{\lambda_j \tau}} = \frac{1}{2(\lambda_j + ia)} + \frac{1}{2(\lambda_j - ia)}, \tag{2.7}$$

то

$$I_2 = -\frac{1}{2}\frac{f_1(0) + ae^{\lambda_j\tau}\int\limits_{-\tau}^{0} f_1(t)\,e^{\lambda_j t}\,dt}{\lambda_j + ia} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{f_1(0) + ae^{\lambda_j\tau}\int\limits_{-\tau}^{0} f_1(t)\,e^{\lambda_j t}\,dt}{\lambda_j - ia}, \tag{2.8}$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Равенство (2.7) следует из равенства (1.2), ибо

$$\frac{1}{\lambda_j + ae^{\lambda_j\tau}} = \frac{1}{\lambda_j + \frac{a^2}{\lambda_j}}. \tag{2.9}$$

Из равенства (2.5), в соответствии с равенствами (2.6) и (2.8), получим

$$I_2 = -\frac{1}{2}f_1(0)\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j\,e^{\lambda_j(\eta-\mu)}}{\lambda_j + ia} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j\,e^{\lambda_j(\eta-\mu)}}{\lambda_j - ia}\right] -$$

$$-\frac{a}{2}\left\{\int\limits_{-\tau}^{0} f_1(\vartheta)\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j\,e^{\lambda_j(\tau+\vartheta+\eta-\mu)}}{\lambda_j + ia} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j\,e^{\lambda_j(\tau+\vartheta+\eta-\mu)}}{\lambda_j - ia}\right]d\vartheta\right\}. \tag{2.10}$$

Ввиду того, что корни $\lambda_к$ ($k=1, 2,...$) квазиполинома (1.2) имеют отрицательные действительные части, то

$$I_2 = -\frac{1}{2}f_1(0)\left[Q_1(\eta-\mu) + Q_2(\eta-\mu)\right] -$$

$$-\frac{a}{2}\left\{\int\limits_{-\tau}^{0} f_1(\vartheta)\left[Q_1(\tau+\vartheta+\eta-\mu) + Q_2(\tau+\vartheta+\eta-\mu)\right]d\vartheta\right\}, \tag{2.11}$$

где

$$Q_1(\tau+\vartheta+\eta-\mu) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j\,e^{\lambda_j(\tau+\vartheta+\eta-\mu)}}{\lambda_j + ia} =$$

$$= -\int\limits_{0}^{\infty} e^{iat} f_2(t+\tau+\vartheta+\eta-\mu)\,dt, \tag{2.12}$$

$$Q_2(\tau+\vartheta+\eta-\mu)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j\,e^{\lambda_j(\tau+\eta+\vartheta-\mu)}}{\lambda_j-ia}=$$

$$=-\int_0^{\infty}e^{-iat}f_2(t+\tau+\vartheta+\eta-\mu)\,dt. \qquad (2.13)$$

Вычисление функций $Q_1(\tau+\vartheta+\eta-\mu)$, $Q_2(\tau+\vartheta+\eta-\mu)$ $\eta<\mu$, $[-\tau\leqslant\vartheta,\ \mu,\ \eta\leqslant 0]$ в соответствии с (2.13) известно (преобразование Лапласа [5]).

Но тогда при заданных начальных возмущениях (1.4) в силу равенств (2.11) и (2.1) получим значение искомого функционала I в рассматриваемом случае $\eta<\mu$.

Вычисление искомого функционала I в случае $\mu<\eta$ аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени. ПММ, 26, вып. 1, 1962.

2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.

3. *Шиманов С. Н.* О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени». ПММ, 24, вып. 1, 1960.

4. *Шиманов С. Н.* «К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени». ПММ, 27, вып. 3, 1963.

5. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. Изд. «Мир», 1967.