М. К. КЛЕБАНОВ

ДИНАМИКА КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ, РАССМАТРИВАЕМЫХ КАК СИСТЕМА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

На рис. 1 приведена модель кулачкового привода, рассматриваемого как система с двумя степенями свободы. Так как в подавляющем большинстве случаев рабочие органы перемещаются поступательно, то масса их m_2 остается постоянной. Приведенное же значение массы распределительного вала m_1, с изменением места приведения по длине вала, изменяется и на схеме обозначено через $m_1(l)$. Коэффициент жесткости толкателя k_2 (y) принят переменным, имея в виду нелинейную характеристику жесткости, а коэффициент жесткости распределительного вала изменяющимся по длине вала k_1 (l). Демпфирование принято пропорциональным относительной скорости в степени n.

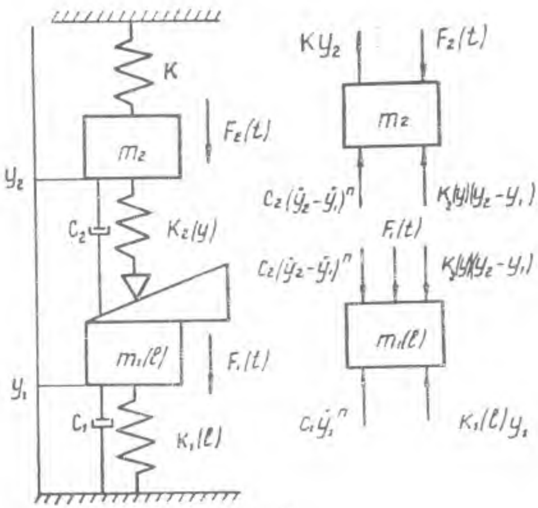

Рис. 1

Движение масс системы может быть записано следующими дифференциальными уравнениями

$$m_1(l)\ddot{y}_1 - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^n + c_1\dot{y}_1^n + k_1(l)y_1 - k_2(y)(y_2 - y_1) = F_1(t)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^n + k_2(y)(y_2 - y_1) + ky_2 = F_2(t). \qquad (1)$$

Система (1) в общем виде не может быть решена, но для ряда конкретных случаев мы его можем выполнить и исследовать влияние параметров механизма на характер протекания переходного процесса. Рассмотрим некоторые из них.

Перемещение поперечных и револьверного суппортов в одношпиндельных токарно-револьверных автоматах, затыловочного суппорта в токарно-затыловочных полуавтоматах и в других станках осуществляется от дискового кулачка в плоскости последнего. Модель такого привода приведена на рис. 2. В рассматриваемом случае масса распределительного вала, приведенная к месту крепления кулачка на нем, так же как и коэффициент жесткости, остается постоянной. Примем, что демпфирование пропорционально относительной скорости в первой степени, а упругая сила между рабочим органом и распределительным валом линейна, тогда система дифференциальных уравнений (1) принимает следующий вид

$$m_1\ddot{y}_1 - c_2\dot{y}_2 + (c_1 + c_2)\dot{y}_1 + k_1y_1 - k_2(y_2 - y_1) = F_1(t)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + c_2\dot{y}_2 - c_2\dot{y}_1 + (k_2 + k)y_2 - k_2y_1 = F_2(t) \qquad (2)$$

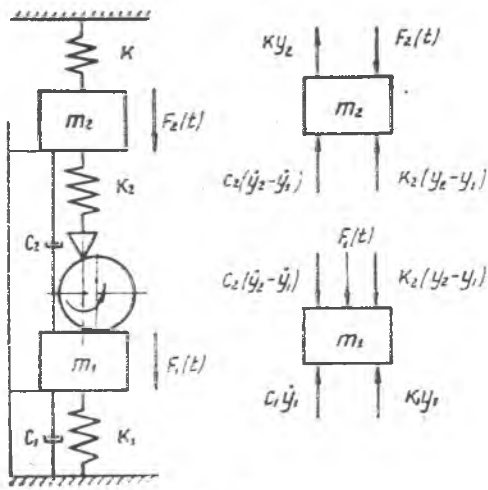

Рис. 2.

Система дифференциальных уравнений (2) будет нами использована для исследования переходных процессов в приводах с кулачковыми механизмами, которые могут быть приведены к рассматриваемой модели. Так как переходный процесс сопровождается свободными колебаниями и оценку его можно производить по собственным частотам и коэффициенту динамичности, то ниже будут получены соответствующие зависимости для их определения. Под коэффициентом динамичности понимается отношение наибольшего мгновенного значения силы упругости к статически приложенной нагрузке.

Характер движения рабочего органа во время переходного процесса определяется не только профилем кулачка, но и накладываемыми затухающими колебаниями.

Аналитические зависимости для определения перемещения, скорости и ускорения рабочего органа могут быть получены из соответствующих дифференциальных уравнений движения системы во время переходного процесса с учетом демпфирования.

Так как при принятом демпфировании, пропорциональным скорости, практически можно считать, что оно не влияет на частоту свободных колебаний, то для их определения можем воспользоваться системой уравнений (2) без правой части и демпфирования

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k) y_2 - k_2 y_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Обозначим

$$\frac{k_1 + k_2}{m_1} = a, \quad \frac{k_2}{m_1} = b, \frac{k_2 + k}{m_2} = c \quad \text{и} \quad \frac{k_2}{m_2} = c'.$$

Введем принятые обозначения в уравнения (3), тогда получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + a y_1 - b y_2 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + c y_2 - c' y_1 &= 0, \end{aligned} \qquad (3')$$

где m_1 — масса распределительного вала, приведенная к месту крепления кулачка; m_2 — масса звеньев рабочего органа, приведенная к толкателю; k_1 — жесткость вала кулачка в месте крепления его; k_2 — жесткость толкателя; k — жесткость замыкающей пружины; y_1 — абсолютное перемещение массы m_1; y_2 — абсолютное перемещение массы m_2.

Для решения системы дифференциальных уравнений воспользуемся преобразованием Лапласа при следующих начальных условиях:

$$t = 0, \ y_1^0 = y_2^0 = 0, \ \dot{y}_2^0 = 0 \text{ и } \dot{y}_1 = \dot{y}_1^0.$$

Если также обозначим

$$\frac{1}{2}\left[a + c - \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - bc')}\right] = \omega_1^2,$$

а

$$\frac{1}{2}\left[a + c + \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - bc')}\right] = \omega_2^2 ,$$

то можем написать, что

$$y_1 = \frac{\dot{y}_1^0}{\sqrt{(a+c) - 4(ac - bc')}}\left[\frac{c - \omega_1^2}{\omega_1}\sin \omega_1 t - \frac{c - \omega_2^2}{\omega_2}\sin \omega_2 t\right],$$

$$y_2 = \frac{y_0' c'}{\sqrt{(a+c) - 4(ac - bc')}}\left[\frac{1}{\omega_1}\sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega_2}\sin \omega_2 t\right].$$

Таким образом, рассматриваемая система совершает колебательные движения с частотами ω_1 и ω_2. Перемещение масс m_1 и m_2 в любой момент времени можно определить, пользуясь полученными зависимостями для y_1 и y_2. Если в выражение для ω_1^2 и ω_2^2 подставить значения a, b, c и c', то получим

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k_2 + k}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} - \sqrt{\left(\frac{k_2 + k}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)^2 - 4\,\frac{k_2 k_1 + k k_2 + k k_1}{m_2 m_1}}\right] \tag{4}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k_2 + k}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \sqrt{\left(\frac{k_2 + k}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)^2 - 4\,\frac{k_2 k_1 + k k_2 + k k_1}{m_1 m_2}}\right].$$

При определении коэффициента динамичности можно пренебречь затуханием колебаний. Последнее можно объяснить тем, что в первый полупериод колебаний, когда деформации системы, а следовательно, и силы упругости, достигают максимального значения, эффект затухания практически мало влияет на формирование сил упругости. В связи с этим в уравнениях (2) положим, что

$c_2\dot{y}_2 - c_2\dot{y}_1 = 0$ и $(c_1 + c_2)\dot{y}_1 - c_2\dot{y}_2 = 0$, тогда

$$\ddot{y}_1 + a y_1 - b y_2 = \frac{1}{m_1} F_1(t)$$

$$\ddot{y}_2 + c y_2 - c' y_1 = \frac{1}{m_2} F_2(t). \tag{5}$$

При начальных условиях $t = 0$, $y_1^0 = y_2^0 = 0$ и $\dot{y}_1^0 = \dot{y}_2^0 = 0$ решение системы (5) приводит к зависимостям, с помощью которых можем определить абсолютные y_1 и y_2 и относительные перемещения $y_2 - y_1$ масс системы

$$y_1 = \frac{1}{m_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_{\mathrm{I}}(p_k)}{p_k \dot{Y}_{\mathrm{II}}(p_k)} e^{p_k t} \int_0^t f_1(\tau) e^{-p_k \tau} d\tau + \frac{b}{m_2} \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_{\mathrm{III}}(p_k)}{p_k \dot{Y}_{\mathrm{II}}(p_k)} e^{p_k t} \int_0^t f_2(\tau) e^{-p_k \tau} d\tau, \quad (6)$$

$$y_2 = \frac{1}{m_2} \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_{\mathrm{IV}}(p_k)}{p_k \dot{Y}_{\mathrm{II}}(p_k)} e^{p_k t} \int_0^t f_2(\tau) e^{-p_k \tau} d\tau + \frac{c'}{m_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_{\mathrm{III}}(p_k)}{p_k \dot{Y}_{\mathrm{II}}(p_k)} e^{p_k t} \int_0^t f_1(\tau) e^{-p_k \tau} d\tau, \quad (7)$$

где
$$Y_{\mathrm{I}} = p(p^2 + c)$$
$$Y_{\mathrm{II}} = (p^2 + a)(p^2 + c) - bc'$$
$$Y_{\mathrm{III}} = p$$
$$Y_{\mathrm{IV}} = p(p^2 + a)$$
$$p_{1,2} = \pm i\omega_1 \text{ и } p_{3,4} = \pm i\omega_2.$$

Зная закон изменения нагрузки, можем определить деформацию системы y_2, а следовательно, и коэффициент динамичности.

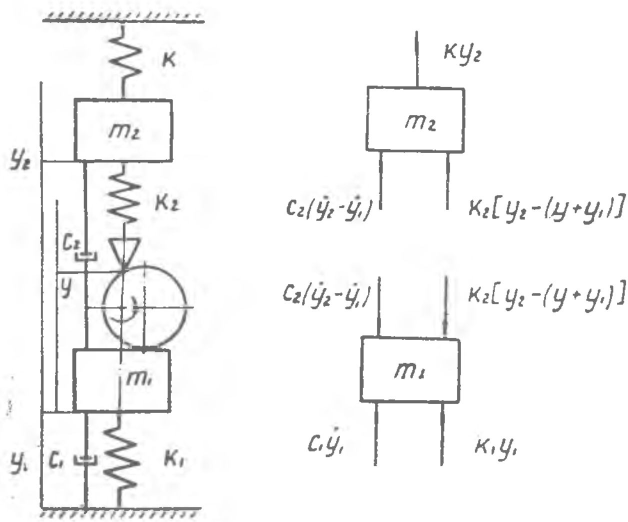

Рис. 3

Во время переходного процесса движение рабочего органа определяется не только профилем кулачка, но и накладываемыми затухающими колебаниями.

Принципиальная схема привода приведена на рис. 3, на которой также показаны действующие нагрузки.

При написании дифференциальных уравнений движения примем, что сила сопротивления пропорциональна скорости, а коэффициенты сопротивления — c_1 и c_2

$$m_1 \ddot{y}_1 - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 [y_2 - (y + y_1)] + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = 0 .$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 [y_2 - (y + y_1)] + k y_2 = 0, \tag{8}$$

где y — перемещение рабочего органа, определяемое профилем кулачка без учета упругости звеньев.

Используя ранее принятые обозначения, а также то, что

$$\frac{c_1}{m_1} = 2n_1, \ \frac{c_2}{m_2} = 2n_2, \ \frac{c_2}{m_1} = 2n', \text{ получим}$$

$$\ddot{y}_1 + 2n_1\dot{y}_1 - 2n_1' (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + a y_1 - b y_2 = - b y,$$

$$\ddot{y}_2 + 2n_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + c y_2 - c' y_1 = c' y. \tag{9}$$

Решая систему (9) при начальных условиях $t = 0$, $y_1^0 = y_2^0 = 0$, $\dot{y}_1^0 = \dot{y}_2^0 = 0$ получим

$$y_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{У_{\mathrm{I}}(p_k)}{p_k \dot{У}_{\mathrm{II}}(p_k)} e^{p_k t} \int_0^t y(\tau) e^{-p_k \tau} d\tau, \tag{10}$$

$$y_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{У_{\mathrm{III}}(p_k)}{p_k \dot{У}_{\mathrm{II}}(p_k)} e^{p_k t} \int_0^t y(\tau) e^{-p_k \tau} d\tau, \tag{11}$$

где $У_{\mathrm{I}} = p[-b(p^2 + 2pn_2 + c) + c'(b + 2n_1' p)]$,

$$У_{\mathrm{II}} = (p^2 + 2pn_1 + 2pn_1' + a)(p^2 + 2pn_2 + c) - (b + 2n_1' p)(c' + 2pn_2),$$

$$У_{\mathrm{III}} = p[(p^2 + 2pn_1 + 2pn_1' + a) c' - b(c' + 2pn_2)].$$

Значения p_k определяем из уравнения

$$(p^2 + 2pn_1 + 2pn_1' + a)(p^2 + 2pn_2 + c) - (b + 2n_1' p)(c' + 2pn_2) = 0.$$

Перемещение рабочего органа определяется ординатой y_2, скорость $\frac{dy_2}{dt}$ и ускорение $\frac{d^2 y_2}{dd^2}$.