КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 44, 1970 г.
Исследования по акустике и радиоэлектронике

Л. П. УСОЛЬЦЕВ

ОБ АСИМПТОТИКЕ В ОДНОМ МЕТРИЧЕСКОМ СООТНОШЕНИИ

Пусть $g \geqslant 2$ — фиксированное целое число, $f(x)$ — вещественнозначная периодическая с периодом, равным 1, функция, удовлетворяющая на отрезке [0, 1] условию Липшица:

$$| f(x') - f(x) | \leqslant A \, | x' - x |^{\alpha} \tag{1}$$

с $A, \alpha > 0$. Пусть, далее, $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$, а ряд, составленный из коэффициентов Фурье b_m функции $f(x)$, абсолютно сходится:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} | b_m | = B < \infty. \tag{2}$$

Пусть $\sigma^2 = \int\limits_0^1 f^2(x)\,dx + 2\sum\limits_{t=1}^{\infty} \int\limits_0^1 f(x)f(g^t x)\,dx \neq 0$. Обозначим

$$\Phi_Q(\lambda) = \operatorname*{mes}_{0 \leqslant x \leqslant 1} E\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{Q}} \sum_{t=0}^{Q-1} f(g^t x) > \lambda\right\}, \quad G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} e^{-z^2/2}\, dz.$$

Хорошо известно (см., напр., [1]), что для любого вещественного λ при $Q \to \infty$

$$\Phi_Q(\lambda) \to 1 - G(\lambda). \tag{3}$$

Выявлением асимптотики в соотношении (3) занимались очень многие авторы. Упомянем лишь А. Г. Постникова ([2], стр. 77), И. А. Ибрагимова [3] и Д. А. Москвина (сообщение на Межвузовском симпозиуме по теории чисел, г. Владимир, 1968). Последнему принадлежит следующий результат, полученный теоретико-вероятностными методами: при $0<\lambda<Q^{\gamma}$,

где $\gamma < \frac{1}{12}$, выполняется соотношение

$$\Phi_Q(\lambda) = [1 - G(\lambda)]\cdot\left[1 + 0\left(\frac{\lambda}{Q^{\gamma}} + \frac{1}{Q^{\frac{1}{6}-\gamma}}\right)\right]$$

с постоянной в символе «O», не зависящей от λ и Q. Настоящая заметка посвящена дальнейшему уточнению асимптотики в соотношении (3). Именно, используя содержащийся в § 4 диссертации [4] комбинированный метод доказательства метрических теорем, мы получаем следующее утверждение.

Теорема. При $1/Q^{1/6} \leq \lambda \leq Q^{\gamma}$, где $\gamma < \frac{1}{12}$, имеем

$$\Phi_Q(\lambda) = [1 - G(\lambda)]\cdot\left[1 + 0\left(\frac{\lambda \ln^{1/3} Q + 1}{Q^{1/6}}\right)\right]$$

с постоянной в символе «O», зависящей лишь от A, B, α и σ.

Замечание. С помощью утомительной выкладки можно ограничение $\gamma < \frac{1}{12}$ снять, заменив его ограничением $\gamma < \frac{1}{6}$.

Доказательство. Через C_1, C_2, ... мы будем обозначать постоянные, зависящие лишь от A, B, α и σ. Пусть

$$r = \left[\frac{\ln Q}{\alpha \ln g}\right] + 1, \quad n = [Q^{1/3} ln^{2/3} Q], \; l = \left[\frac{Q-(n-1)r}{n}\right], \tag{4}$$

$$S(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{Q}} \sum_{t=0}^{Q-1} f(g^t x), \; \widetilde{S}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{Q}} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{l-1} f(g^{jr+jl+s} x).$$

Имеем: $l < Q^{2/3} l^{2/3} Q^{2/3}$ и при $Q\to\infty$ $l \infty Q^{2/3} l^{2/3} Q^{2/3}$, $Q - nl < n(r+1) \leq$

$$\leq C_1 Q^{1/3} ln^{1/3} Q, \; |S(x) - \widetilde{S}(x)| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{Q}}(Q-nl)B \leq \frac{C_2 \ln^{1/3} Q}{Q^{1/6}}$$

и, следовательно,

$$\Phi_Q(\lambda) = \operatorname*{mes}_{0\leq x\leq 1} E \left\{\widetilde{S}(x) > \lambda + \frac{\Theta_1 C_2 \ln^{1/3} Q}{Q^{1/6}}\right\}; \tag{5}$$

здесь и далее $|\Theta_i| \leq 1$.

Лемма. Пусть m_1, m_2 ..., m_{2k} — целые числа, отличные от нуля. Тогда для числа решений N_l $(m_1, m_2, ..., m_{2k})$ диофантова уравнения

$$m_1 g^{y_1} + m_2 g^{y_2} + \cdots + m_{2k} g^{y_{2k}} = 0 \tag{6}$$

в целых числах $0 \leq y_1, y_2, \ldots, y_{2k} \leq l-1$ справедлива оценка $N_l(m_1, m_2, \ldots, m_{2k}) \leq (2l)^k \cdot k!$

Доказательство леммы. Можно считать, что в левой части равенства (7) найдется k положительных слагаемых (иначе обе части умножим на -1); остальные k слагаемых перенесем в правую часть. Придавая переменным y_i все возможные значения, мы получим не более l^k значений правой части, для каждого из которых по лемме l на стр. 78 книги [2] левая часть принимает не более $2^k kl$ значений. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Обозначим

$$\nu_w = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{l-1} f(vg^s x) \right)^w dx.$$

В силу леммы имеем:

$$\nu_{2k} = \frac{1}{l^k} \sum_{s_1=0}^{l-1} \cdots \sum_{s_{2k}=0}^{l-1} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}{}' \cdots \sum_{m_{2k}=-\infty}^{\infty}{}' b_{m_1} \cdots b_{m_{2k}} \int_0^1 e^{2\pi i v(m_1 g^{s_1} + \cdots + m_{2k} g^{s_{2k}})} \times$$

$$\times dx = \frac{1}{l^k} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}{}' \cdots \sum_{m_{2k}=-\infty}^{\infty}{}' b_{m_1} \cdots b_{m_{2k}} N_l (m_1, m_2, \ldots, m_{2k}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{l^k} \cdot (2l)^k k! \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' |b_m| \right)^{2k} = (2B^2)^k k!,$$

откуда легко получаем (разлагая подынтегральную функцию в ряд и интегрируя этот ряд почленно), что для любой постоянной $a>0$

$$\int_0^1 \exp \left[a \left| \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{l-1} f(vg^s x) \right| \right] dx < \infty, \tag{7}$$

каковы бы ни были натуральные числа l и v.

Заметим, что из формул (8) и (12) § 4 диссертации [4] (с очевидными изменениями) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \nu_2 &= \sigma^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right) = \sigma^2 + O\left(\frac{1}{Q^{1/3}}\right), \quad \nu_3 = O\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right) = O\left(\frac{1}{Q^{1/3}}\right) \\ \nu_4 &= 3\sigma^4 + O\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right) = 3\sigma^4 + O\left(\frac{1}{Q^{1/3}}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Представим теперь числа $x \in [0,1)$ в виде

$$x = \frac{\varepsilon_1(x)}{g} + \frac{\varepsilon_2(x)}{g^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_k(x)}{g^k} + \cdots,$$

где $0 \leqslant \varepsilon_k(x) \leqslant g-1 \quad (k = 1, 2, \ldots)$ и определим величину

$$\varphi_r(x) = \frac{\varepsilon_1(x)}{g} + \frac{\varepsilon_2(x)}{g^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_r(x)}{g^r}.$$

Легко показать (см. § 4 [4]), что функции

$$\xi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{l-1} f(\varphi_r(\{g^{jr+jl+s} x\})) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

а значит и функции $\tilde{\xi}_j(x) = \xi_j(x) - \int_0^1 \xi_j(x)\,dx$ статистически независимы в промежутке $[0,1]$. В силу условий (1),

$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, (4) и $0 \leqslant \{g^t x\} - \varphi_r(\{g^t x\}) \leqslant \frac{1}{g^r}$ получаем:

$$|\tilde{\xi}_j(x) - \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{l-1} f(g^{jr+jl+s}x)| \leqslant \frac{C_3}{Q^{2/3}}. \tag{9}$$

Из (9), (5), неравенства $Q - nl \leqslant C_1 Q^{1/3} \ln^{1/3} Q$, (8), (7) получаем:

$$\Phi_Q(\lambda) = \underset{0\leqslant x\leqslant 1}{\mathrm{mes}\, E} \left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\xi}_j(x) > \left(1 + \frac{\Theta_2 C_4 \ln^{1/3} Q}{Q^{2/3}}\right)\lambda + \frac{\Theta_3 C_5 \ln^{1/3} Q}{Q^{1/6}}\right\}, \tag{10}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \int_0^1 \tilde{\xi}_j^2(x)\,dx = \sigma^2 + O\left(\frac{1}{Q^{1/3}}\right), \quad \gamma_3 = \int_0^1 \tilde{\xi}_j^3(x)\,dx = O\left(\frac{1}{Q^{1/3}}\right),$$

$$\gamma_4 = \int_0^1 \tilde{\xi}^4(x)\,dx - 3\tilde{\sigma}^4 = O\left(\frac{1}{Q^{1/3}}\right), \quad \int_0^1 \exp[a\,|\,\tilde{\xi}_j(x)\,|\,]\,dx < \infty,$$

где a — любая положительная постоянная. В силу теоремы 6.1.1 (и замечания к ней) на стр. 192 книги [5], при $0 \leqslant z \leqslant n^\beta$, где $\beta < \frac{1}{4}$, имеем:

$$\underset{0\leqslant x\leqslant 1}{\mathrm{mes}\, E} \left\{\frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\xi}_j(x) > z\right\} =$$

$$= [1 - G(z)] \exp\left[\frac{z^3}{\sqrt{n}}\left(\frac{\gamma_3}{6\tilde{\sigma}^3} + \frac{\gamma_4\tilde{\sigma}^2 - 3\gamma_3^2}{24\tilde{\sigma}^6} \cdot \frac{z}{\sqrt{n}}\right)\right] \cdot \left[1 + O\left(\frac{z+1}{\sqrt{n}}\right)\right]. \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает утверждение нашей теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Kac, Ann. of Math., 2-d ser., 47, № 1, 33—39 (1946).
2. А. Г. Постников. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений. Труды Матем. ин-та АН СССР, т. 82, М, 1966.
3. И. А. Ибрагимов. Теория вероятности и ее применения, 12, № 4, 655—665, (1967).
4. Л. П. Усольцев. Задачи аналитической теории чисел, связанные с показательной функцией. Канд. диссертация, Вильнюс, 1968.
5. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник. Независимые и стационарно связанные величины. М, 1965.