КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 44, 1970 г.

Исследования по акустике и радиоэлектронике

Л. П. УСОЛЬЦЕВ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕКТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ДРОБНЫМИ ДОЛЯМИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

В соответствии с идеями работ [1] и [2], § 3 диссертации [3] дается построение при любых заданных простого p и натурального l такого числа

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2} + \frac{\alpha_3}{p^3} + \cdots \tag{1}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — целые числа, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant p-1$, для которого при каждом натуральном делителе λ числа l при $P \to \infty$ и произвольном $\gamma \in (0,1)$ выполняется соотношение

$$N_\gamma(P) = \gamma P + O(P^{1/3} \ln^{4/3} P), \tag{2}$$

где $N_\gamma(P)$ — число дробных долей функции $\alpha p^{\lambda x}$, попадающих в промежуток $[0, \gamma]$, когда x пробегает целые числа от 0 до $P-1$. Используя этот результат, докажем следующее утверждение.

Теорема. Пусть p — фиксированное простое число, l — фиксированное натуральное число, α — любое число вида (1), для которого выполняется соотношение (2). Пусть, далее, λ — любой натуральный делитель числа l, а $\overline{\eta}_0, \overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2, \ldots$ — последовательность λ — мерных векторов, определяемых равенствами

$$\overline{\eta}_x = \left(\frac{\alpha_{x\lambda+1}}{p} + \frac{\alpha_{(x+1)\lambda+1}}{p^2} + \cdots, \frac{\alpha_{x\lambda+2}}{p} + \frac{\alpha_{(x+1)\lambda+2}}{p^2} + \cdots, \right.$$

$$\left. \ldots, \frac{\alpha_{x\lambda+\lambda}}{p} + \frac{\alpha_{(x+1)\lambda+\lambda}}{p^2} + \cdots \right)$$

($x = 0, 1, 2, \ldots$). Пусть, наконец, $N_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\lambda}(P)$ означает число векторов среди $\overline{\eta}_0, \overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_{P-1}$, попавших в параллелепипед $[0, \gamma_1) \times \times [0, \gamma_2) \times \cdots \times [0, \gamma_\lambda)$. Тогда при $P \to \infty$ и $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\lambda \in (0,1]$ выполняется соотношение:

$$N_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\lambda}(P) = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_\lambda P + O\left(P^{\frac{(3\lambda+1)}{(3\lambda+3)}} \ln^{\frac{4}{(3\lambda+3)}} P\right).$$

Доказательство. Пусть $g = p^\lambda$; $a = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots$ — g-ичное разложение числа α; $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \ldots$ — λ-мерные векторы, определяемые равенствами

$$\overline{A}_x = (\alpha_{(x-1)\lambda+1}, \alpha_{(x-1)\lambda+2}, \ldots, \alpha_{(x-1)\lambda+\lambda}), \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Из соотношения (2) следует, что в любой промежуток вида $\left[\frac{a}{g^n}, \frac{a+1}{g^n}\right]$ попадет $\frac{1}{g^n} \cdot P + O(P^{1/3} \ln^{4/3} P)$ дробных долей функции αg^x, когда x пробегает целые числа $0, 1, \ldots, P-1$. А это, в силу теоремы 1 из § 3 книги [4], означает, что любая n-членная комбинация g-ичных знаков встретится в гусенице

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n), (\varepsilon_2 \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{n+1}), \ldots, (\varepsilon_P \varepsilon_{P+1} \cdots \varepsilon_{P+n-1})$$

$\frac{1}{g^n} \cdot P + O(P^{1/3} \ln^{4/3} P)$ раз, т. е. что любая n-членная комбинация λ-мерных векторов, компонентами которых служат числа $0, 1, \ldots, P-1$, встретится $\frac{P}{g^n} + O(P^{1/3} \ln^{4/3} P)$ раз в гусинице

$$(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n), (\overline{A}_2 \overline{A}_3 \cdots \overline{A}_{n+1}), \cdots, (\overline{A}_P \overline{A}_{P+1} \cdots \overline{A}_{P+n-1}).$$

В свою очередь, это, опять же в силу теоремы 1 из § 3 книги [4] означает, что в любой параллелепипед вида

$$\left[\frac{a_1}{p^n}, \frac{a_1+1}{p^n}\right) \times \left[\frac{a_2}{p^n}, \frac{a_2+1}{p^n}\right) \times \cdots \times \left[\frac{a_\lambda}{p^n}, \frac{a_\lambda+1}{p^n}\right)$$

попадет $\frac{1}{p^{\lambda n}} \cdot P + O(P^{1/3} \ln^{4/3} P)$ векторов среди $\overline{\eta}_0, \overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_{P-1}$. В параллелепипед же $\Gamma + [0, \gamma_1) \times [0, \gamma_2) \times \cdots \times [0, \gamma_\lambda)$ попадет $\frac{1}{p^{\lambda n}} \cdot P + O(P^{1/3} \ln^{4/3} P)$ векторов среди $\overline{\eta}_0, \overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_{P-1}$ (так как параллелепипед Γ можно аппроксимировать суммой таких параллелепипедов с точностью до объема в $\frac{\lambda}{p^n}$ единиц).

Определяя из условия

$$p^n \leqslant \frac{P^{\frac{2}{(3\lambda+3)}}}{\ln^{\frac{4}{(3\lambda+3)}} P} < p^{n+1},$$

получим, что в параллелепипед Γ попадет $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_\lambda P + O(P^{\frac{(3\lambda+1)}{(3\lambda+3)}} \times \ln^{\frac{4}{(3\lambda+3)}} P)$ векторов среди $\overline{\eta_0}, \overline{\eta_1}, \ldots, \overline{\eta_{P-1}}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Коробов. Вестник МГУ, сер. матем., мех., № 4, 42—46, 1966.
2. Л. П. Усольцев. Известия вузов, Матем., № 12(67), 75—83, 1967.
3. Л. П. Усольцев. Задачи аналитической теории чисел, связанные с показательной функцией. Канд. диссертация, Вильнюс, 1968.
4. А. Г. Постников. Арифметическое моделирование случайных процессов. Труды Матем. ин-та АН СССР, т. 57, М, 1960.