КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 44, 1970 г.
Исследования по акустике и радиоэлектронике

В. Д. КУЗЕНКОВ

К ВОПРОСУ О ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ РАЗОМКНУТОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ СО СКАЧКООБРАЗНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

1. В импульсных системах перед непрерывным фильтром, как правило, устанавливается запоминающий элемент [1], [2]. Запоминающим элементом может служить совокупность инерционного звена первого порядка с коммутатором. В этом случае запоминающий элемент — звено первого порядка с периодически и скачкообразно изменяющимися параметрами.

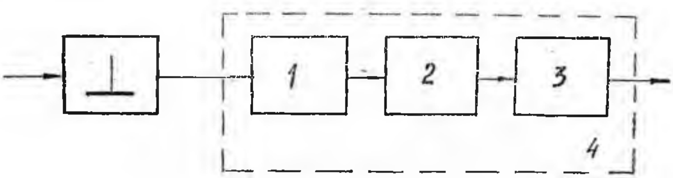

Рис. 1.

В простейшем случае непрерывным фильтром системы также может быть звено первого порядка. При этом приведенная непрерывная часть 4-импульсной системы есть система второго порядка, состоящая из последовательно соединенных формирующего элемента 1, звена с переменными параметрами 2 и звена с постоянными параметрами 3, (рис. 1). В отличие от приведенной непрерывной части, под непрерывной частью системы будем понимать последовательное соединение звеньев с переменными и постоянными параметрами.

Формирующий элемент системы преобразует мгновенный импульс импульсатора (δ — импульс Дирака) в импульс длительностью τ. В общем случае форма этого импульса произвольная, в частном случае — прямоугольная. Звено с переменными параметрами имеет в течение длительности импульса одни параметры, в остальное время периода следования импульсов T — другие.

Определение передаточной функции разомкнутой системы указанного выше вида встречает определенные трудности, так как передаточная функция последовательно соединенных звеньев с переменными и постоянными параметрами не равна произведению их передаточных функций.

Разомкнутая импульсная система первого порядка со скачкообразно изменяющимися параметрами исследовалась в работе [1], система второго порядка исследовалась в работе [3]. В работе [3] исследование производилось во временной области с использованием аппарата разностных уравнений. Форма импульса, создаваемого формирующим элементом в [3] принималась прямоугольной.

2. Возможен иной подход к задаче определения передаточных функций разомкнутых импульсных систем первого и второго порядков со скачкообразно изменяющимися параметрами по сравнению с подходом, принятым в работах [1], [3]. Этот подход основан на вычислении импульсной характеристики системы или ее передаточной функции в терминах обычного преобразования Лапласа и дальнейшем переходе к дискретному преобразованию Лапласа или Z-преобразованию.

Обратимся сначала к импульсной системе первого порядка. Эта система может быть получена из системы, представленной на рис. 1, путем исключения из нее звена с постоянными параметрами 3.

Для звена с постоянными параметрами, эквивалентного звену с переменными параметрами в одном из возможных его состояний можно написать

$$k_{2,1}(s) = \frac{\beta_1}{s+\beta_1}, \quad (1) \qquad h_{2,1}(t) = \beta_1 e^{-\beta_1 t} \cdot 1(t) \quad (2)$$

Для звена, соответствующего другому состоянию звена с переменными параметрами напишем

$$k_{2,2}(s) = \frac{\beta_2}{s+\beta_2}, \quad (3) \qquad h_{2,2}(t) = \beta_2 e^{-\beta_2 t} 1(t). \quad (4)$$

где $k_{1,2}(s)$, $k_{2,2}(s)$ — передаточные функции вышеуказанных звеньев;

$h_{2,1}(t)$, $h_{2,2}(t)$ — их импульсные характеристики.

Примем, что формулы (1, 2) соответствуют состоянию звена с переменными параметрами на интервале времени 0, τ, а формулы (3, 4) — на интервале τ, T.

Используя формулы (2, 4), с помощью интеграла свертки нетрудно получить переходную характеристику звена с переменными параметрами (отклик на единичную ступень $1(t-\delta)$.

Эта характеристика зависит от момента приложения воздействия на вход звена δ.

В результате вычислений получим

$$\sigma_{1,1}(t,\delta)=(1-e^{-\beta_1(t-\delta)})\,1(t-\delta)\,1(\tau-\delta)+e^{\beta_1\delta}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\beta_1(k+1)\tau-\beta_2 k(T-\tau)}\times$$
$$\times\left(e^{-\beta_1(t-kT-\tau)}-e^{-\beta_2(t-kT-\tau)}\right)1(t-kT-\tau)\cdot 1(\tau-\delta)+ \qquad (5)$$
$$+e^{\beta_1\delta}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\beta_1 k\tau-\beta_2 k(T-\tau)}(e^{-\beta_2(t-kT)}-e^{-\beta_1(t-kT)})\,1(t-kT)\,1(\tau-\delta),$$
$$0\leqslant\delta\leqslant\tau$$

Аналогичным образом для $\tau\leqslant\delta\leqslant T$ получим

$$\sigma_{1,2}(t,\delta)=(1-e^{-\beta_2(t-\delta)})\,1(t-\delta)\cdot 1(T-\delta)\,1(\delta-\tau)+$$
$$+e^{\beta_2(\delta-\tau)}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\beta_1(k-1)\tau-\beta_2 k(T-\tau)}\left(e^{-\beta_2(t-kT)}-e^{-\beta_1(t-kT)}\right)1(t-kT)\times$$
$$\times 1(T-\delta)\,1(\delta-\tau)+e^{\beta_2(\delta-\tau)}\sum_{l=1}^{\infty}e^{-\beta_1 k\tau-\beta_2 k(T-\tau)}\left(e^{-\beta_2(t-kT-\tau)}-\right.$$
$$\left.-e^{-\beta_2(t-kT-\tau)}\right)1(t-kT)\,1(T-\delta)\,1(\delta-\tau). \qquad (6)$$

Теперь, воспользовавшись теоремой наложения можно определить реакцию звена с переменными параметрами на импульс произвольной формы [4].

Запишем $$H_1(t)=H_{1,1}(t)-H_{1,2}(t). \qquad (7)$$

В соответствии с теоремой наложения

$$H_{1,1}(t)=x(0)\cdot\sigma_{1,1}(t)+\int_0^{\infty}x'(\delta)\,\sigma_{1,1}(t,\delta)\,d\delta; \qquad (8)$$

$$H_{1,2}(t)=x(\tau)\,\sigma_{1,2}(t,\tau)+\int_0^{\infty}x'(\delta)\,\sigma_{1,2}(t,\delta)\,d\delta; \qquad (9)$$

$$x'(t)=\frac{dx}{dt}.$$

Здесь $x(t)$ — функция, описывающая импульс, которая создает формирующий элемент системы при воздействии на него импульса импульсатора.

$H(t)$ — реакция звена на воздействие $x(t)$.

Так как по условию $x(t)$ тождественно равно нулю при $t>\tau$, то вместо (9) можно написать

$$H_{1,2}(t)=x(\tau)\,\sigma_{1,2}(t,\tau). \qquad (10)$$

Функция $H_1(t)$, полученная по формуле (7), есть импульсная характеристика дискретной системы. Z-преобразование этой функции дает искомую передаточную функцию системы. Операцию свертки в (8) можно исключить, если перейти из временной в частотную область.

Для этого найдем изображения по Лапласу функций $H_1(t)$, $H_{1,1}(t)$, $H_{1,2}(t)$.

Очевидно, что

$$K_{1,1}(s) = \int_0^\infty H_{1,1}(t)\, e^{-st} dt = \frac{\beta_1}{s(s+\beta_1)} x(0) + \frac{\beta_1}{s+\beta_1} X(s) +$$

$$+ [x(0) + A(\tau)] \left\{ \sum_{k=0}^\infty e^{-\beta_1(k+1)\tau - \beta_2 k(T-\tau)} \left(\frac{e^{-s(kT+\tau)}}{s+\beta_1} - \frac{e^{-s(kT+\tau)}}{s+\beta_2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^\infty e^{-\beta_1 k\tau - \beta_2 k(T-\tau)} \left(\frac{e^{-skT}}{s+\beta_2} - \frac{e^{-skT}}{s+\beta_1} \right) \right\}. \tag{11}$$

В формуле (11)

$$A(\tau) = \int_0^\infty e^{\delta\beta_1} x'(\delta) \cdot 1(\tau - \delta)\, d\delta = \int_0^\tau e^{\delta\beta_1} x'(\delta) d\delta, \tag{12}$$

$$X(s) = \int_0^\infty x'(t)\, e^{-st} dt.$$

Аналогичным образом получим

$$K_{1,2}(s) = x(\tau) \left[\frac{\beta_2}{s(s+\beta_2)} e^{-s\tau} + \sum_{k=1}^\infty e^{-\beta_1(k-1)\tau - \beta_2 k(T-\tau)} \left(\frac{e^{-skT}}{s+\beta_2} - \frac{e^{-skT}}{s+\beta_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^\infty e^{-\beta_1 k\tau - \beta_2 k(T-\tau)} \left(\frac{e^{-s(kT+\tau)}}{s+\beta_1} - \frac{e^{-s(kT+\tau)}}{s+\beta_2} \right) \right]. \tag{13}$$

Изображение по Лапласу функции $H_1(t)$ равно

$$K_1(s) = K_{1,1}(s) - K_{1,2}(s). \tag{14}$$

Функция $K_1(s)$ есть изображение реакции импульсной системы первого порядка на δ-импульс импульсатора. Очевидно, эта функция и есть передаточная функция импульсной системы.

Z-форма передаточных функций системы (11) и (13) может быть определена с помощью таблиц Z-преобразования, имеющихся в различных руководствах [2]. В частности, Z-форма функции (11) имеет вид

$$K_{1,1}(z, \varepsilon) = Z_1 + x(0) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z e^{-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T - \beta_1\gamma T}}{z - e^{-\beta_0 T}} \right) +$$

$$+ A(\tau) \left[\frac{z e^{-\beta_1 \varepsilon T}}{z - e^{-\beta_1 T}} + \frac{z e^{-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T - \beta_1\gamma T}}{z - e^{-\beta_0 T}} \right], \tag{15}$$

$$\gamma T \leqslant \varepsilon T \leqslant T.$$

Здесь ε — запаздывание момента отсчета относительно тактовой точки;

$\gamma = \frac{\tau}{T}$ — нормированная длительность импульса.

В формуле (15)

$$\beta_0 = \beta_1\gamma + \beta_2(1-\gamma), \tag{16}$$

$$Z_1 = Z_\varepsilon\left\{L^{-1}\left[\frac{\beta_1}{s(s+\beta_1)}X(s)\right]\right\}. \tag{17}$$

Здесь Z_ε —символ модифицированного Z-преобразования, L^{-1} — символ обратного преобразования Лапласа.

Для Z-формы передаточной функции (13) получим:

$$K_{1,2}(z_1\,\varepsilon) = x(\tau)\left(\frac{z}{z-1} - \frac{ze^{-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T}}{z-e^{-\beta_0 T}}\right), \tag{18}$$

$$\gamma T \leqslant \varepsilon T \leqslant T.$$

Для передаточной функции импульсной системы получим:

$$K_1(z,\varepsilon) = K_{1,1}(z,\varepsilon) - K_{1,2}(z,\varepsilon) = Z_1 + x(0)\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z-e^{-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T-\beta_1\gamma T}}{z-e^{-\beta_0 T}}\right) +$$

$$+ A(\tau)\left[\frac{ze^{-\beta_1\varepsilon T}}{z-e^{-\beta_1 T}} + \frac{ze^{-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T-\beta_1\gamma T}}{z-e^{-\beta_0 T}}\right] -$$

$$- x(\tau)\left[\frac{z}{z-1} - \frac{ze^{-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T}}{z-e^{-\beta_0 T}}\right], \quad \gamma T \leqslant \varepsilon T \leqslant T. \tag{19}$$

При условии $0 \leqslant \varepsilon T \leqslant \gamma T$ выражение для передаточной функции может быть получено аналогичным образом. Это выражение имеет вид.

$$K_1(z,\varepsilon) = Z_2 + x(0)\left(\frac{z}{z-1} - \frac{ze^{-\beta_1\varepsilon T}}{z-e^{-\beta_0 T}}\right) + A(\tau)\left[\frac{ze^{-\beta_1\varepsilon T}}{z-e^{-\beta_1 T}} - \frac{ze^{-\beta_1\varepsilon T}}{z-e^{-\beta_0 T}}\right] -$$

$$- x(\tau)\left[\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\beta_1\varepsilon T}}{z-e^{-\beta_0 T}}\right]. \tag{20}$$

В формуле (20) Z_2 — функция, вычисляемая аналогично функции Z_1 по формуле (17), но при условии $0 \leqslant \varepsilon T \leqslant \gamma T$. В частном случае, когда импульс, формируемый формирующим элементом системы, прямоугольный

$$Z_1 = Z_2 = 0,$$

$$A(\tau) = 0,$$

$$x(0) = x(\tau) = 1.$$

Тогда формулы (19) и (20) примут вид:

$$K_1(z,\varepsilon) = \frac{z\left(1-e^{-\beta_1\varepsilon T}\right)}{z-e^{-\beta_0 T}}\, e^{-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T}, \quad \gamma T \leqslant \varepsilon T \leqslant T, \tag{21}$$

$$K_1(z,\varepsilon) = 1 - \frac{z-e^{-\beta_2(1-\gamma)T}}{z-e^{-\beta_0 T}}\, e^{-\beta_1\varepsilon T}, \quad 0 \leqslant \varepsilon T \leqslant \gamma T, \tag{22}$$

что совпадает с результатами, полученными в работе [1]. Заметим, что при прямоугольной форме импульса, передаточные функции системы (21), (22) могут быть получены более коротким путем. В этом случае второе слагаемое в правой части формулы (8) равно нулю, и передаточные функции определяются как разность Z-преобразований функций (5) и (6).

Z-преобразования здесь также могут быть выполнены с помощью таблиц. Предварительно необходимо принять в формуле (5) $\delta=0$, а в формуле (6) $\delta=\tau$.

3. Передаточная функция импульсной системы второго порядка может быть определена способом, аналогичным изложенному выше.

Определим переходную характеристику непрерывной части системы, состоящей в данном случае из последовательно соединенных звеньев с переменными и постоянными параметрами.

Для передаточной функции и импульсной характеристики звена с постоянными параметрами можно написать

$$k_3(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}, \tag{23}$$

$$h_3(t)=\alpha\, e^{-\alpha t}\cdot 1\,(t). \tag{24}$$

Для переходных характеристик непрерывной части системы, согласно выражений (5), (6), (24), получим

$$\sigma_{2,1}(t,\delta)=\int_0^{\infty}\sigma_{1,1}(\Theta_1\,\delta)\,h_3(t-\Theta)\,d\Theta=$$

$$=\left[1-e^{-\alpha(t-\delta)}-\frac{\alpha}{\alpha-\beta_1}\left(e^{-\beta_2(t-\delta)}-e^{-\alpha(t-\delta)}\right)\right]1\,(t-\delta)\,1\,(\tau-\delta)+$$

$$+e^{\beta_1\delta}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\beta_1(k+1)\,\tau-\beta_2\,k(T-\tau)}\left[\frac{\alpha}{\alpha-\beta_1}\left(e^{-\beta_1(t-kT-\tau)}-e^{-\alpha(t-kT-\tau)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{\alpha-\beta_2}\left(e^{-\beta_1(t-kT-\tau)}-e^{-\alpha(t-kT-\tau)}\right)\right]1\,(t-kT-\tau)\,1\,(\tau-\delta)+$$

$$+e^{\beta_1\delta}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\beta_1k\tau-\beta_2k(T-\tau)}\left[\frac{\alpha}{\alpha-\beta_2}\left(e^{-\beta_2(t-kT)}-e^{-\alpha(t-kT)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{\alpha-\beta_1}\left(e^{-\beta_1(t-kT)}-e^{-\alpha(t-kT)}\right)\right]1\,(t-kT)\,1\,(\tau-\delta),\quad 0\leqslant\delta\leqslant\tau \tag{25}$$

и $$\sigma_{2,2}(t,\delta)=\int_0^{\infty}\sigma_{1,2}(\Theta_1\,\delta)\,h_3(t-\Theta)\,d\Theta=\left[1-e^{-\alpha(t-\delta)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{\alpha-\beta_2}\left(e^{-\beta_2(t-\delta)}-e^{-\alpha(t-\delta)}\right)\right]1\,(t-\delta)\cdot 1(T-\delta)\cdot 1\,(\delta-\tau)+$$

$$+e^{\beta_2(\delta-\tau)}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\beta_1(k-1)\,\tau-\beta_2k(T-\tau)}\left[\frac{\alpha}{\alpha-\beta_2}\left(e^{-\beta_2(t-kT)}-e^{-\alpha(t-kT)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{\alpha-\beta_1}\left(e^{-\beta_1(t-kT)}-e^{-\alpha(t-kT)}\right)\right]1\,(t-kT)\,1\,(T-\delta)\,1\,(\delta-\tau)+$$

$$+ e^{\beta_2(\delta-\tau)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta_1 k\tau - \beta_2 k(T-\tau)} \Big[\frac{\alpha}{\alpha-\beta_1} \left(e^{-\beta_1(t-kT-\tau)} - e^{-\alpha(t-kT-\tau)} \right) -$$

$$- \frac{\alpha}{\alpha-\beta_2} \left(e^{-\beta_2(t-kT-\tau)} - e^{-\alpha(t-kT-\tau)} \right) \Big] 1(t-kT-\tau)\, 1(T-\delta) \cdot 1(\delta-\tau),$$

$$\tau \leqslant \delta \leqslant T. \qquad (26)$$

Дальнейшие выкладки, касающиеся определения передаточной функции системы при произвольной форме импульса создаваемого формирующим элементом приводить не будем. Они подобны выкладкам, приведенным выше для системы первого порядка. Ограничимся рассмотрением случая, когда вышеуказанный импульс имеет прямоугольную форму.

Напишем аналогично формулам (7), (8), (9)

$$H_2(t) = H_{2,1}(t) - H_{2,2}(t); \qquad (27)$$

$$H_{2,1}(t) = x(0)\, \sigma_{2,1}(t) = \sigma_{2,1}(t); \qquad (28)$$

$$H_{2,2}(t) = x(\tau)\, \sigma_{2,2}(t, \tau) = \sigma_{2,2}(t, \tau). \qquad (29)$$

Воспользовавшись таблицами модифицированного Z-преобразования для Z-изображения функции $\sigma_{2,1}(t)$, согласно формуле (25), получим

$$\sigma_{2,1}(z, \varepsilon) = \frac{z}{z-1} - \frac{z - e^{-\alpha\varepsilon T}}{z - e^{-\alpha T}} + \frac{\alpha}{\alpha-\beta_1} \frac{z^2 \left(e^{-\alpha\varepsilon T} - e^{-\beta_1\gamma T - \alpha(\varepsilon-\gamma)T} \right)}{\left(z - e^{-\alpha T}\right)\left(z - e^{-\beta_0 T}\right)} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\alpha-\beta_2} \frac{z^2 \left(e^{-\beta_1\gamma T - \alpha(\varepsilon-\gamma)T} - e^{-\beta_1\gamma T - \beta_2(\varepsilon-\gamma)T} \right) + z e^{-\alpha T - \beta_1\gamma T - \beta_2(\varepsilon-\gamma)T} - e^{-\beta_0 T - \alpha\varepsilon T}}{\left(z - e^{-\alpha T}\right)\left(z - e^{-\beta_0 T}\right)},$$

$$\gamma T \leqslant \varepsilon T \leqslant T. \qquad (30)$$

Аналогичным образом можно определить, согласно формуле (26), Z-изображение функции $\sigma_{2,2}(t, \tau)$. Получим при этом

$$\sigma_{2,2}(z, \varepsilon) = \frac{z}{z-1} - \frac{z e^{-\alpha(\varepsilon-\gamma)T}}{z - e^{-\alpha T}} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\alpha-\beta_2} \frac{z^2 \left(e^{-\alpha(\varepsilon-\gamma)T} - e^{-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T} \right) + z\left(e^{-\alpha T - \beta_2(\varepsilon-\gamma)T} - e^{-\alpha\varepsilon T - \beta_2(1-\gamma)T} \right)}{\left(z - e^{-\alpha T}\right)\left(z - e^{-\beta_0 T}\right)} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\alpha-\beta_1} \frac{z \left(e^{-\beta_1(1-\gamma) - \alpha\varepsilon T} - e^{-\alpha(\varepsilon-\gamma)T - \beta_0 T} \right)}{\left(z - e^{-\alpha T}\right)\left(z - e^{-\beta_0 T}\right)}, \qquad (31)$$

$$\gamma T \leqslant \varepsilon T \leqslant T.$$

При условии, что $0 \leqslant \varepsilon T \leqslant \gamma T$, Z-изображения функций $\sigma_{2,1}(t)$ и $\sigma_{2,2}(t, \tau)$ имеют вид соответственно

$$\sigma_{2,1}(z, \varepsilon) = \frac{z}{z-1} - \frac{z e^{-\alpha\varepsilon T}}{z - e^{-\alpha T}} + \frac{\alpha}{\alpha-\beta_2} \frac{z \left(e^{-\beta_1\gamma T - \alpha(1+\varepsilon-\gamma)T} - e^{-\alpha\varepsilon T - \beta_0 T} \right)}{\left(z - e^{-\alpha T}\right)\left(z - e^{-\beta_0 T}\right)} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\alpha-\beta_1} \frac{z^2 \left(e^{-\alpha\varepsilon T} - e^{-\beta_1\varepsilon T} \right) + z \left(e^{-\alpha T - \beta_1\varepsilon T} - e^{-\alpha(1+\varepsilon-\gamma)T - \beta_1\gamma T} \right)}{\left(z - e^{-\alpha T}\right)\left(z - e^{-\beta_0 T}\right)}; \qquad (32)$$

$$0 \leqslant \varepsilon T \leqslant \gamma T;$$

$$\sigma_{2,2}(z,\ \varepsilon)=\frac{1}{z-1}\quad\frac{e^{-\alpha(1+\varepsilon-\gamma)T}}{z-e^{-\alpha T}}+\frac{\alpha}{\alpha-\beta_2}\frac{z\left(e^{-\alpha(1+\varepsilon+\gamma)T}-e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\alpha\varepsilon T}\right)}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta_0 T})}+$$

$$+\frac{\alpha}{\alpha-\beta_1}\quad\frac{z\left(e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\alpha\varepsilon T}-e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\beta_1\varepsilon T}\right)}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta_0 T})}+$$

$$+\frac{\alpha}{\alpha-\beta_1}\frac{e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\alpha T-\beta_1\varepsilon T}-e^{-\alpha(1+\varepsilon-\gamma)T-\beta_0 T}}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta_0 T})},\quad 0\leqslant\varepsilon T\leqslant\gamma T. \tag{33}$$

Разность выражений (30) и (31) определяет передаточную функцию системы второго порядка для случая, когда $\gamma T\leqslant\varepsilon T\leqslant T$. В результате вычислений получим

$$K_2(z,\ \varepsilon)=\frac{z\left(e^{-\alpha(\varepsilon-\gamma)T}-e^{-\alpha\varepsilon T}\right)}{z-e^{-\alpha T}}+$$

$$+\frac{\alpha}{\alpha-\beta_2}\frac{z^2\left(e^{-\alpha(\varepsilon-\gamma)T}+e^{-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T-\beta_1\gamma T}-e^{-\alpha(\varepsilon-\gamma)T-\beta_1\gamma T}-e^{-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T}\right.}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta_0 T})}+$$

$$+\frac{\alpha}{\alpha-\beta_2}\frac{z\left(e^{-\alpha T-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T}+e^{-\alpha\varepsilon T-\beta_0 T}-e^{-\beta_1\gamma T-\beta_2(\varepsilon-\gamma)T}-e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\alpha\varepsilon T}\right)}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta_0 T})}-$$

$$-\frac{\alpha}{\alpha-\beta_1}\frac{z^2\left(e^{-\alpha\varepsilon T}-e^{-\beta_1\gamma T-\alpha(\varepsilon-\gamma)T}\right)-z\left(e^{-\beta_1(1-\gamma)T-\alpha\varepsilon T}-e^{-\alpha(\varepsilon-\gamma)T-\beta_0 T}\right)}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta_0 T})},$$

$$\gamma T\leqslant\varepsilon T\leqslant T. \tag{34}$$

Для случая, когда $0\leqslant\varepsilon T\leqslant\gamma T$, согласно выражений (32) и (33), передаточная функция определяется выражением

$$K_2(z,\ \varepsilon)=1-\frac{ze^{-\alpha\varepsilon T}-e^{-\alpha(1+\varepsilon-\gamma)T}}{z-e^{-\alpha T}}+$$

$$+\frac{\alpha}{\alpha-\beta_2}\frac{z\left(e^{-\beta_1\gamma T-\alpha(1+\varepsilon-\gamma)T}-e^{-\alpha(1+\varepsilon-\gamma)T}+e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\alpha\varepsilon T}-e^{-\beta_0 T-\alpha\varepsilon T}\right)}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta_0 T})}+$$

$$+\frac{\alpha}{\alpha-\beta_1}\frac{z^2\left(e^{-\alpha\varepsilon T}-e^{-\beta_1\varepsilon T}\right)+z\left(e^{-\alpha T-\beta_1\varepsilon T}+e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\beta_1\varepsilon T}-e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\alpha\varepsilon T}\right)}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta_0 T})}-$$

$$-\frac{\alpha z}{\alpha-\beta_1}\frac{\left(e^{-\beta_1\gamma T-\alpha(1+\varepsilon-\gamma)T}+e^{-\beta_0 T-\alpha(1+\varepsilon-\gamma)T}-e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\alpha T-\beta_1\varepsilon T}\right.}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta_0 T})},$$

$$0\leqslant\varepsilon T\leqslant\gamma T. \tag{35}$$

В частном случае, при $\varepsilon=0$ выражение принимает вид

$$k_2(z)=\frac{a_1 z+a_0}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta_0 T})}, \tag{36}$$

где $\alpha_1=\frac{\beta_1}{\alpha-\beta_1}e^{-\alpha T}-\frac{\beta_2}{\alpha-\beta_2}e^{-\alpha(1-\gamma)T}+\frac{\alpha}{\alpha-\beta_2}e^{-\beta_2(1-\gamma)T}-\frac{\alpha}{\alpha-\beta_2}e^{-\beta_0 T}+$

$$+\frac{\alpha(\beta_2-\beta_1)}{(\alpha-\beta_1)(\alpha-\beta_2)}e^{-\beta_1\gamma T-\alpha(1-\gamma)T},$$

$$a_0=e^{-\alpha T-\beta_0 T}+\frac{\beta_1}{\alpha-\beta_1}e^{-\beta_0 T-\alpha(1-\gamma)T}-\frac{\alpha}{\alpha-\beta_1}e^{-\beta_2(1-\gamma)T-\alpha T}.$$

Частный результат (36) получен в работе (3).

В заключении отметим, что изложенный выше метод определения передаточной функции импульсной системы второго порядка значительно проще метода, использующего аппарат разностных уравнений. Существо и объем выкладок практически не зависят от того, что определяется — обычное или модифицированное Z-преобразования. Изложенный метод пригоден для определения передаточных функций при произвольной форме импульсов, формируемых формирующим элементом системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Ципкин. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
2. Л. Т. Кузин. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, 1962.
3. В. И. Таверовский. Об одном частном случае импульсной системы с переменными параметрами, изменяющимися скачком. «Автоматика и телемеханика», т. XXI, № 1, 1960.
4. М. Ф. Гарднер, Бернс Дж. Л. Переходные процессы в линейных системах. Физматгиз, 1961.