Расчет преломляющей оптической поверхности при освещающем пучке с плоским волновым фронтом, формирующей заданную диаграмму направленности

А.А. Мингазов[1], Л.Л. Досколович[1,2], Д.А. Быков[1,2], Е.А. Безус[1,2]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086
[2]Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

Аннотация. Рассматривается задача расчета преломляющей поверхности, формирующей требуемое распределение освещенности в дальней зоне при плоском освещающем пучке. Данная задача формулируется как задача перемещения масс Монжа-Канторовича с некоторой функцией стоимости. Данный факт позволяет получить эффективные методы численного решения данной задачи. Приводится пример расчета преломляющей поверхности, формирующей изображение шахматной доски.

1. Введение

Задача расчета преломляющей или отражающей оптической поверхности из условия формирования заданного распределения освещенности в некоторой области относится к классу обратных задач неизображающей оптики и является крайне сложной. В приближении геометрической оптики данная задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения (НДУ) эллиптического типа [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Решение этого НДУ является сложной теоретической и вычислительной задачей.

Ряд обратных задач неизображающей оптики может быть сформулирован в виде задачи Монжа-Канторовича о перемещении масс со некоторой функцией стоимости [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. Такая формулировка задачи, в отличие от задачи решения НДУ, позволяет рассчитывать непрерывные кусочно-гладкие оптические поверхности, формирующие заданные распределения освещенности в несвязных областях и в областях со сложными негладкими границами [15, 16].

Вид функции стоимости определяется типом решаемой задачи. Функции стоимости получены только для ограниченного круга задач [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. В частности, в базовых теоретических работах [9, 10, 11] получен вид функции стоимости в задачах расчета зеркала [9, 10] и преломляющей оптической поверхности [11], формирующих требуемое распределение освещенности в дальней зоне (распределение интенсивности) при сферическом освещающем пучке. Условие дальней зоны предполагает, что размерами оптической поверхности можно пренебречь по сравнению с расстоянием до освещаемой области.

Получение функций стоимости для новых задач представляет большой теоретический и практический интерес. В этой связи отметим, что в работах [9, 10, 11] не рассмотрен важный частный случай освещающего пучка с плоским волновым фронтом. Несмотря на то, что освещающий пучок с плоским волновым фронтом является частным случаем сферического пучка (когда источник излучения перемещается в бесконечно удаленную точку), выражение для функции стоимости в случае плоского освещающего пучка непосредственно не следует из вида известной функции стоимости для сферического пучка.

Мы рассматриваем задачу получения функции стоимости для задачи расчета преломляющей поверхности, формирующей заданное распределение освещенности в дальней зоне при плоском освещающем пучке. Представленные теоретические результаты расширяют класс методов, которые могут быть использованы для расчета преломляющих поверхностей и зеркал при плоском освещающем пучке. Приводится расчетный пример формирования распределения освещенности в виде шахматной доски.

2. Формулировка задачи расчета преломляющего элемента

Будем обозначать координаты в трехмерном пространстве (x_1, x_2, y), через $\mathbb{S}^2$ обозначим единичную сферу с центром в начале координат. Рассмотрим плоский световой пучок, распространяющийся в направлении $e_z = (0, 0, 1)$. Предположим, что в плоскости $y = 0$ он имеет распределение интенсивности $I(x)$, $x \in G$. Тогда преломляющая поверхность $z = f(x)$, разделяющая среды с показателями преломления n_1 и n_2, $n_1 > n_2$, индуцирует отображение

$$\gamma\colon G \to \mathbb{S}^2,$$

которое ставит в соответствие точке $x \in G$ направление преломленного луча, вышедшего из этой точки. Отображение γ формирует некоторое распределение освещенности $L(s), s \in \mathbb{S}^2$ на сфере из условия сохранения светового потока: для любого борелевского $B \subset D$ выполнено

$$\int\limits_{B} L(s) d\sigma = \int\limits_{\gamma^{-1}(B)} I(x) dx. \tag{1}$$

где $d\sigma$ — элемент площади на сфере $\mathbb{S}^2$. Теперь, если заданы распределения освещенности $I(x)$ на области G и $L(s)$ на области $D \subset \mathbb{S}^2$, то возникает задача расчета преломляющей поверхности $f(x)$, индуцирующей отображение γ, для которого выполнено условие (1).

3. Связь с задачей перемещения масс

Функцией стоимости для $x \in G \subset \mathbb{R}^2$, $z \in D \subset \mathbb{S}^2$ будем называть

$$\mathcal{K}(x, s) := \frac{ns_1}{1 - ns_3} x_1 + \frac{ns_2}{1 - ns_3} x_2,$$

где $n = n_2/n_1$, $s = (s_1, s_2, s_3)$ — точка на сфере, то есть $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$.

Теорема 1. *Пусть отображение γ минимизирует функционал*

$$\mathcal{F}(P) = \int\limits_{G} \mathcal{K}(x, P(x)) I(x) dx,$$

определенный на пространстве отображений $P\colon G \to D$ (возможно, определенных почти всюду), удовлетворяющих условию сохранения энергии (1). Тогда γ индуцировано некоторой преломляющей поверхностью.

Можно показать, что при специальном выборе координат $\underset{\sim}{y}$ на сфере $\mathbb{S}^2$ верна аналогичная теорема с квадратичной функцией стоимости, то есть $\widetilde{\mathcal{K}}(x, y) = \|x - y\|^2$.

Также имеет место следующее утверждение, которое можно рассматривать как двойственную задачу перемещения масс Монжа-Канторовича [20].

Теорема 2. *Рассмотрим пространство пар непрерывных функций*

$$\{(f,g) \in C(G) \times C(D): \ f(x) - g(s) \leq \mathcal{K}(x,s)\},$$

на котором задан функционал

$$\mathcal{G}(f,g) = \int\limits_G f(x)I(x)dx - \int\limits_D g(s)L(s)d\sigma.$$

Пусть пара $(f^0, g^0) \in C(G) \times C(D)$ *максимизирует функционал* $\mathcal{G}$ *тогда* f^0 *является преломляющей поверхностью, решающей задачу формирования распределения освещенности* $L(s)$.

4. Расчетные примеры

На основе теоремы 1 реализован метод расчета преломляющей поверхности, позволяющий рассчитывать оптические элементы, формирующиеся сложные распределения освещенности. На рисунке 1 приведен оптический элемент, формирующий диаграмму направленности, при которой на удаленной плоскости $z = f$ формируется изображение шахматной доски. Время работы алгоритма на обычном персональном компьютере составляет несколько минут.

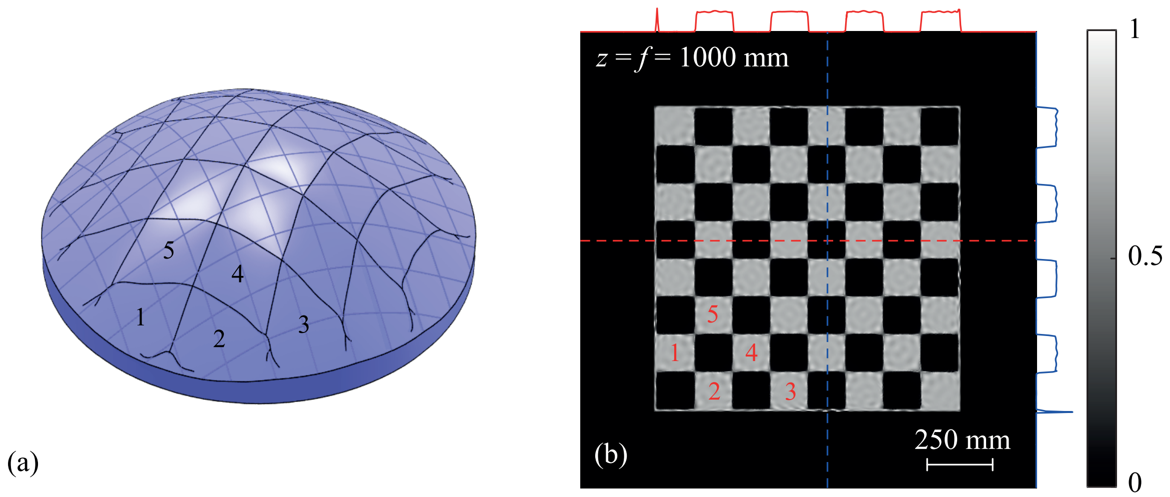

Рисунок 1. Формирование изображения в виде шахматной доски.

5. Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 18-07-00982, 18-29-03067 и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение №007-ГЗ/Ч3363/26).

6. Литература

[1] Wu, R. Design of freeform illumination optics / R. Wu, Z. Feng, Z. Zheng, R. Liang, P. Benitez, J.C. Minano // Laser Photon. Rev. – 2018. – Vol. 12(7). – P. 1700310.
[2] Wu, R. A mathematical model of the single freeform surface design for collimated beam shaping / R. Wu, P. Liu, Y. Zhang, Z. Zheng, H. Li, X. Liu // Optics Express. – 2013. – Vol. 21(18). – P. 20974-20989.

[3] Wu, R. Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampere equation / R. Wu, L. Xu, P. Liu, Y. Zhang, Z. Zheng, H. Li, X. Xiu // Opt. Lett. – 2013. — Vol. 38(2). – P. 229-231.
[4] Wu, R. Initial design with L2 Monge–Kantorovich theory for the Monge–Amp`ere equation method in freeform surface illumination design / R. Wu, Y. Zhang, M.M. Sulman, Z. Zheng, P. Benitez, J.C. Minano // Opt. Express. – 2014. – Vol. 22(13). – P. 16161-16177.
[5] Ma, Y. Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target / Y. Ma, H. Zhang, Z. Su, Y. He, L. Xu, X. Lui, H. Li // Appl. Opt. – 2015. – Vol. 54(14). – P. 4503-4508.
[6] Mao, X. Design of a smooth freeform illumination system for a point light source based on polar-type optimal transport mapping / X. Mao, S. Xu, X. Hu, Y. Xie // Appl. Opt. – 2017. – Vol. 56(22). – P. 6324-6331.
[7] Wu, R. Formulating the design of two freeform lens surfaces for point-like light sources / R. Wu, S. Chang, Z. Zheng, L. Zhao, X. Liu // Opt. Lett. – 2018. – Vol. 43(7). – P. 1619-1622.
[8] Wu, R. Precise light control in highly tilted geometry by freeform illumination optics / R. Wu, L. Yang, Z. Ding, L. Zhao, D. Wang, K. Li, F. Wu, Y. Li, Z. Zheng, X. Liu // Opt. Lett. – 2019. – Vol. 44. – P. 2887-2890.
[9] Glimm, T. Optical design of single reflector systems and the Monge–Kantorovich mass transfer problem / T. Glimm, V. Oliker // J. Math. Sci. – 2003. – Vol. 117(3). – P. 4096-4108.
[10] Wang, X.-J. On the design of a reflector antenna II // Calc. Var. – 2004. – Vol. 20(3). – P. 329-341.
[11] Guti´errez, C.E. The refractor problem in reshaping light beams / C.E. Gutierrez, Q. Huang // Arch. Ration. Mech. Anal. – 2009. – Vol. 193. – P. 423-443.
[12] Rubinstein, J. Intensity control with a free-form lens / J. Rubinstein, G. Wolansky // J. Opt. Soc. Am. A. – 2007. – Vol. 24. – P. 463-469.
[13] Oliker, V. Designing Freeform Lenses for Intensity and Phase Control of Coherent Light with Help from Geometry and Mass Transport // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 2011. – Vol.
201(3). – P. 1013-1045.
[14] Oliker, V. Beam shaping with a plano-freeform lens pair / V. Oliker, L.L. Doskolovich, D.A. Bykov // Optics Express. – 2018. – Vol. 26(15). – P. 19406-19419.
[15] Doskolovich, L.L. Designing double freeform surfaces for collimated beam shaping with optimal mass transportation and linear assignment problems / L.L. Doskolovich, D.A. Bykov, E.S. Andreev,
E.A. Bezus, V. Oliker // Optics Express. – 2018. – Vol. 26(19). – P. 24602-24613.
[16] Doskolovich, L.L. Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region / L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, D.A. Bykov, E.S. Andreev, E.A. Bezus // Optics
Express. – 2017. – Vol. 25(22). – P. 26378-26392.
[17] Bykov, D.A. Linear assignment problem in the design of freeform refractive optical elements generating prescribed irradiance distributions / D.A. Bykov, L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, E.A. Bezus, N.L. Kazanskiy // Optics Express. – 2018. – Vol. 26(21). – P. 27812-27825.
[18] Doskolovich, L.L. Optimal mass transportation and linear assignment problems in the design of freeform refractive optical elements generating far-field irradiance distributions / L.L. Doskolovich, D.A. Bykov, A.A. Mingazov, E.A. Bezus // Optics Express. – 2019. – Vol. 27. – P. 13083-13097.
[19] Yadav, N.K. Computation of double freeform optical surfaces using a Monge–Ampere solver: Application to beam shaping / N.K. Yadav, J.H. M. ten Thije Boonkkamp, W.L. IJzerman // Optics Communications. – 2019. – Vol. 439. – P. 251-259.
[20] Villani, C. Topics in Optimal Transportation // Providence, RI: American Mathematical Society, 2003. – P. 370.

Optimal mass transportation problem in the design of freeform optical elements generating far-field irradiance distributions for plane incident beam

A.A. Mingazov[1], L.L. Doskolovich[1,2], D.A. Bykov[1,2], E.A. Bezus[1,2]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086
[2]Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

Abstract. We consider the problem of calculating a refracting surface generating a prescribed irradiance distribution in the far field in the case of a plane incident beam. We demonstrate that this problem can be formulated as a mass transportation problem (MTP) and obtain the cost function for the MTP. We propose effective method of calculating a refracting surface based on MTP. We give the example of calculating of the refractive surface which forms a chessboard pattern.