

Повышение разрешения изображения неотрицательной яркости, искаженного линейным преобразованием

А.И. Чуличков¹, Е.М. Мольков¹

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 1, строение 2, Москва, Россия, 119991

Аннотация. Регистрируется изображение, искаженное линейным преобразованием яркости и аддитивным шумом. Линейное преобразование яркости моделирует искажения, возникающие в системе формирования за счет движения камеры, конечной апертуры и т.п. Задача состоит в поиске такого преобразования этого изображения, результат которого можно интерпретировать как изображение, полученное системой формирования с более высоким разрешением. Линейные методы повышения разрешения приводят к росту погрешности на преобразованном изображении. Одним из способов уменьшения этой погрешности является сужение класса возможных изображений. В работе используется информация о неотрицательности яркости изображения. При численной реализации метода учитывается ограничение на вычислительные ресурсы.

1. Введение

Одной из задач компьютерного зрения состоит в устранении искажений изображения сцены, возникающих при его регистрируемого фотокамерой. Такие искажения возникают, например, при недостаточно большом отношении апертуры оптической системы к длине волны регистрируемого излучения, из-за движения регистрирующей системы относительно сцены, из-за ошибок фокусировки и других причин. Задача осложняется наличием ошибок регистрации, который считается случайным, и другими неопределенностями математической модели регистрации изображения.

Как правило, считается, что искажения, связанные с неидеальностью оптической системы, описываются линейным преобразованием A «идеального» изображения f , а погрешность регистрации является аддитивным случайным шумом ν , тогда регистрируемое изображение ξ можно записать в виде

$$\xi = Af + \nu. \quad (1)$$

Попытка определить f как решение уравнения $\xi = Af$ приводит к некорректно поставленной задаче [1], главной особенностью которой является неустойчивость решения по отношению к ошибкам регистрации изображения Af . Одним из широко распространенных подходов к преодолению этой трудности является регуляризация задачи, в результате которой решение регуляризованной задачи непрерывно зависит от ν . Решение сводится к минимизации суммы функционала невязки $\|\xi - Af\|^2$ и стабилизатора. В связи с практической значимостью таких методов их разработка до сих пор не потеряла свою актуальность [2-6]. Однако для практики интерес представляют такие методы оценивания яркости изображения, которые

обладают наибольшей точностью. Класс методов, минимизирующих погрешность оценивания, развивается в теории измерительно-вычислительных систем [7, 8]. Эти задачи получили название задач редукции, они ставятся как задачи поиска такого преобразования результата регистрации, которое можно интерпретировать как изображение, полученное с помощью системы регистрации, обладающей более высоким разрешением, чем исходная система, описываемая оператором A .

Трудности применения методов теории измерительно-вычислительных систем к задачам повышения разрешения изображений связаны, во-первых, с тем, что линейные методы редукции изображений имеют принципиальные ограничения по точности оценивания, а во-вторых - с большими объемами вычислений. Уменьшить погрешность оценивания изображения f можно, сузив класс возможных «идеальных» изображений сцены (считая, например, яркость каждого пикселя изображения неотрицательной), и применяя приближенные алгоритмы, позволяющие путем незначительного увеличения погрешности оценивания получать существенный выигрыш в объеме вычислений. Разработке и проверке эффективности такого метода, построенного в рамках подхода теории измерительно-вычислительных систем, посвящена данная работа.

2. Схема и математическая модель регистрации изображения. Оценка f при отсутствии ограничений

Методы теории измерительно-вычислительных систем предназначены для анализа и интерпретации измерений, полученных по схеме (1), в которой изображение ξ интерпретируется как искаженный погрешностью ν результат регистрации выходного изображения Af фотокамеры A , на вход которой подано «идеальное» изображение f сцены, R_ξ т.е. такое изображение, которое было бы сформировано идеальной неискажающей системой.

Опишем математическую модель схемы измерения (1), считая изображение f элементом евклидова пространства R^N , изображения ξ , Af и ν - элементам евклидова пространства R^n , $n, N < \infty$. Векторы заданы своими координатами, значения которых есть яркости соответствующих пикселей.

Будем считать, что линейный оператор $A: R^N \rightarrow R^n$ задан, случайное изображение $\nu \in R^n$ имеет нулевое математическое ожидание и яркости его пикселей некоррелированы и имеют одинаковую дисперсию σ^2 . Яркости пикселей изображения f неотрицательны, а в остальном произвольны.

Рассмотрим сначала задачу редукции изображения ξ к виду, который бы имел результат регистрации изображения сцены идеальной фотокамерой, при отсутствии ограничений. Согласно [7,8], эта задача состоит в поиске линейного преобразования $R: R^n \rightarrow R^N$ изображения ξ , результат которого можно записать в виде

$$R\xi = RAf + R\nu, \quad (2)$$

или

$$R\xi = f + (RA - I)f + R\nu.$$

Последнее равенство можно интерпретировать как «идеальное» изображение f , искаженное «ложным сигналом» $(RA - I)f$ и шумом $R\nu$. Так как f - произвольный элемент R^N , то «ложный сигнал» будем характеризовать величиной $\|RA - I\|_2^2$, равной сумме матричных элементов матрицы $(RA - I)$ (квадратом евклидовой нормы матрицы $(RA - I)$), а величину шумового сигнала - величиной математического ожидания квадрата нормы случайного

изображения Rv [7]: $M \|Rv\|^2 = \sigma^2 \|R\|_2^2$. Преобразование R выбирается как решение задачи на условный минимум:

$$\inf\{\|RA - I\|_2^2 \mid \sigma^2 \|R\|_2^2 \leq \varepsilon\}. \quad (3)$$

Тогда, если R_ε - решение задачи (3), то $R_\varepsilon \xi$ является оценкой идеального изображения f и согласно (2) интерпретируется как результат регистрации изображения f , полученный с помощью фотокамеры RA , ближайшей к идеальной I , при этом уровень шумовой погрешности Rv не превосходит ε .

Заметим, что оценка $R_\varepsilon \xi$ является случайным элементом R^N с математическим ожиданием RAf и матрицей ковариации $\sigma^2 RR^*$. Согласно [7], матрица преобразования R_ε дается формулой

$$R_\varepsilon = \begin{cases} A^* (AA^* + \omega \sigma^2 I)^{-1}, & 0 < \varepsilon < \sigma^2 \|A^-\|_2^2, \\ A^-, & \varepsilon \geq \sigma^2 \|A^-\|_2^2, \end{cases}$$

где A^- оператор, псевдообратный A , а параметр $\omega > 0$ выбирается так, чтобы выполнялось равенство $\sigma^2 \|R\|_2^2 = \varepsilon$.

3. Уточнение оценки f при ограничении на неотрицательность его пикселей

Пусть теперь известно, что изображение f содержится в некотором выпуклом замкнутом множестве $F \subset R^N$, и имеется некоторая оценка \hat{f} изображения f с погрешностью $h(\hat{f})$. В работе [8] показано, что оценка $P_F \hat{f}$ изображения f , равная проекции \hat{f} на F , обладает погрешностью, не меньшей, чем $h(\hat{f})$. В этом смысле $P_F \hat{f}$ уточняет оценку \hat{f} , т. е. решение $P_F \hat{f}$ задачи на минимум $\|\hat{f} - P_F \hat{f}\|^2 = \inf_{g \in F} \|\hat{f} - g\|^2$, имеет меньшую с. к. погрешность, чем \hat{f} , если $\hat{f} \notin F$.

Пусть для простоты оператор A невырожден и получена оценка $A^{-1}\xi$ изображения f . Множество $F \subset R^N$ есть конус в R^N с неотрицательными пикселями. Тогда, если оценка \hat{f} имеет отрицательные пиксели, то у ее проекции на F значения соответствующих пикселей равны нулю.

В работе [8] предложено рассматривать значение проекции $P_F \hat{f}$ оценки \hat{f} как дополнительное измерение, а в работе [9] описан рекуррентный алгоритм уточнения результата редукции. Основой этого подхода является представление схемы регистрации (1) и вычисленной проекции $P_F \hat{f}$ как регистрацию изображения f по схеме

$$\begin{pmatrix} \xi \\ P_F \hat{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} v \\ \mu \end{pmatrix},$$

где μ - случайная погрешность с нулевым математическим ожиданием, некоррелированной с v , и заданным корреляционным оператором [9].

Однако методы, предложенные в [7, 9], даже при размерах изображения порядка 100x100 в случае, когда система формирования изображения не обладает трансляционной симметрией, в результате чего не удастся применить быстрое преобразование Фурье, требуют очень больших вычислительных ресурсов.

4. Локальный метод и алгоритм повышения разрешения изображения.

Идея этого метода состоит в следующем. Пусть искажение, вносимое линейной системой регистрации изображений, таково, что изображение точечного объекта регистрируется в виде

локального пятна. Тогда основная информация о яркости фиксированного пикселя изображения f содержится во фрагменте изображения ξ , содержащего это пятно. Для линейной оценки яркости этого пикселя идеального изображения будем использовать линейную комбинацию яркостей $\xi_{i,j}$ изображения ξ с весами $r_{i,j}$, подобранными из соображения минимальной погрешности оценки.

Для реализации этой идеи рассмотрим точечный объект единичной яркости, расположенный в начале координат: $f_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j = 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ Яркость пикселей его изображения,

формируемого видеосистемой по схеме (1), равна $a_{i,j}$, если $-2M \leq i \leq 2M$, $-2M \leq j \leq 2M$, и равна нулю в противном случае. Пусть «идеальное» изображение f можно аппроксимировать набором точечных объектов интенсивности $f_{i,j}$, расположенных в узлах прямоугольной сетки с шагом 1, и в окрестности $\{-2M \leq i \leq 2M, -2M \leq j \leq 2M\}$ начала координат система формирования изображения обладает трансляционной инвариантностью, то есть при сдвиге объекта по полю зрения соответственно сдвигается и его изображение; формально это означает,

что изображение объекта $\delta_{i-k, j-l} = \begin{cases} 1, & i = k, j = l \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, расположенного в точке (k,l) , есть $a_{i-k, j-l}$.

Тогда выходное изображение видеосистемы будет иметь вид

$$g_{ij} = \sum_{i'=-2M}^{2M} \sum_{j'=-2M}^{2M} a_{i',j'} f_{i-i'; j-j'}$$

Для приближенной оценки яркости изображения в точке $(0,0)$ воспользуемся яркостью пикселей изображения с номерами $\{-M \leq i \leq M, -M \leq j \leq M\}$, и найдем линейную оценку яркости $f_{0,0}$ в виде

$$\hat{f}_{0,0} = \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M r_{i,j} \xi_{i,j}$$

Коэффициенты $r_{i,j}$, $-M \leq i \leq M$, $-M \leq j \leq M$, найдем, потребовав, чтобы свертка размытого изображения $a_{k,l}$ точечного объекта с маской $r_{k,l}$, $k,l = -M, \dots, M$, должно давать изображение точечного объекта:

$$\sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M r_{i,j} a_{i-n, j-m} = \delta_{0,n} \delta_{0,m}, \quad m, n = -M, \dots, M. \quad (4)$$

Если это линейное уравнение относительно $r_{k,l}$, $k,l = -M, \dots, M$, выражающее условие несмещенности оценки яркости $f_{0,0}$, разрешимо единственным образом, то искомые коэффициенты определены однозначно. При вырожденности системы (4) или при неприемлемо большой погрешности оценки следует поступить так же, как при постановке и решении задачи

(3), то есть минимизировать $\sum_{n,m} \left(\sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M r_{i,j} a_{i-n, j-m} - \delta_{0,n} \delta_{0,m} \right)^2$ при ограничении на

погрешность оценки $\sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M \sigma^2 r_{i,j}^2 \leq \varepsilon$.

Оценка яркости каждого пикселя изображения f получается последовательным применением предложенного алгоритма к каждому пикселю изображения f , помещая его в начало координат.

5. Учет неотрицательности яркости оцениваемого изображения

Пусть методом, описанном в пункте 4, построена оценка яркости изображения $\hat{f}_{k,l}$, и для некоторого пикселя (обозначим его номер $(0,0)$) получено значение $\hat{f}_{0,0} < 0$. Так как априори известно, что значения яркостей пикселей не могут быть отрицательными, то можно считать, что проведено «дополнительное измерение» оценки яркости пикселя $(0,0)$, результат которого запишется в виде $\hat{f}_{0,0} = 0$.

В силу наличия корреляционных связей между значениями пикселей оценки \hat{f} это дополнительное измерение должно повлиять и на яркость окрестных пикселей $\hat{f}_{k,l}$. Как известно [7], если известны математические ожидания, дисперсии и ковариация двух случайных величин, $\hat{f}_{k,l}$ и $\hat{f}_{0,0}$, то наилучшей в среднем квадратичном линейной оценкой случайной величины $\hat{f}_{k,l}$ по наблюдению случайной величины $\hat{f}_{0,0} = 0$ является

$$\hat{f}_{k,l} = M\hat{f}_{k,l} + \frac{\text{cov}(\hat{f}_{k,l}, \hat{f}_{0,0})}{D\hat{f}_{0,0}}(0 - M\hat{f}_{0,0}), \quad \text{дисперсия этой оценки равна}$$

$$D\hat{f}_{k,l} = D\hat{f}_{k,l} - \frac{\text{cov}^2(\hat{f}_{k,l}, \hat{f}_{0,0})}{D\hat{f}_{0,0}}.$$

Согласно модели регистрации (1) и методу оценивания изображения f , ковариация $\text{cov}(\hat{f}_{k,l}, \hat{f}_{0,0})$ и дисперсия $D\hat{f}_{0,0}$ равны соответственно

$$\text{cov}(\hat{f}_{k,l}, \hat{f}_{0,0}) = \sigma^2 \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M r_{i-k, j-l} r_{i,j} \quad \text{и} \quad D\hat{f}_{0,0} = \sigma^2 \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M r_{i,j}^2.$$

Заменив неизвестные математические ожидания $M\hat{f}_{k,l}$ и $M\hat{f}_{0,0}$ их оценками $\hat{f}_{k,l}$ и $\hat{f}_{0,0}$, получим уточненную оценку пикселей $\hat{f}_{k,l}$ изображения f в окрестности $(0,0)$, $k, l = -M, \dots, M$:

$$\hat{f}_{k,l} = \hat{f}_{k,l} + \frac{\sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M r_{i-k, j-l} r_{i,j}}{\sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M r_{i,j}^2} (0 - \hat{f}_{0,0})$$

6. Вычислительный эксперимент

Анализ эффективности предложенного подхода проводился на примере повышения качества изображений при томографии [10]. На рисунке 1, слева, приведено изображение, полученное из синтезированной синограммы (100 углов, 100 датчиков) методом обратной проекции.

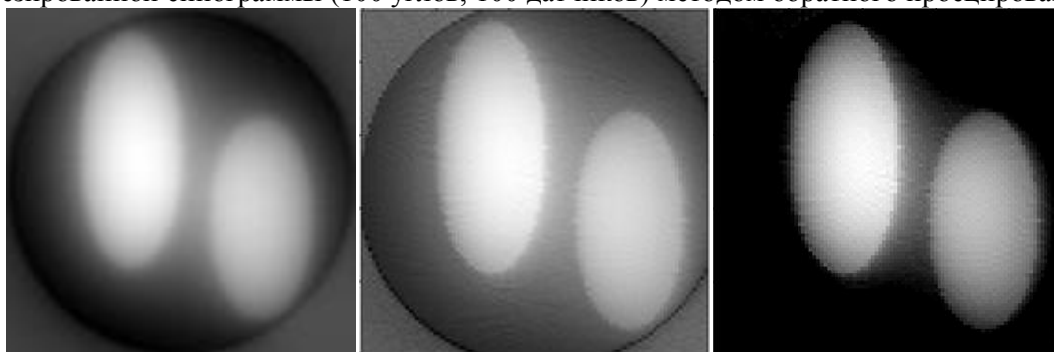


Рисунок 1. Слева – томография методом обратной проекции, в центре – линейная оценка f локальным методом повышения разрешения, справа – уточнение оценки с учетом неотрицательности яркости изображения f .

Видно, что получившееся изображение размыто. Функция размытия точки оценена в вычислительном эксперименте при томографической реконструкции точечного объекта. Линейная оценка изображения f методом, описанном в разделе 4 настоящей статьи для $M=2$, приведена на рисунке 1, в центре, а уточнение оценки с учетом неотрицательности его яркости – на рис. 1, справа. Видно, что четкость изображения при учете неотрицательности его яркости выше, чем на рисунке 1, слева и в центре.

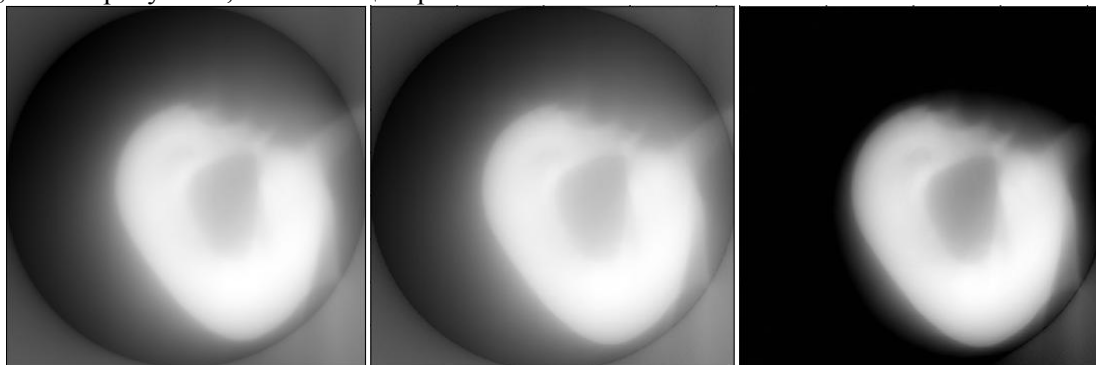


Рисунок 2. Слева – томография зуба методом обратной проекции, в центре – линейная оценка локальным методом повышения разрешения, справа – уточнение оценки с учетом неотрицательности яркости изображения.

Аналогичные результаты для изображения зуба, полученного с томографа Лаборатории рефлектометрии и малоуглового рассеяния Института кристаллографии им. А.В.Шубникова РАН [10], приведены на рис. 2. Синограмма получена для 400 углов и 856 датчиков. Видно, что и в этом случае происходит нелинейное уточнение оценки изображения.

7. Заключение

В работе предложен метод повышения разрешения изображения с учетом неотрицательности его яркости, позволяющий обрабатывать изображения большого размера. На примерах изображений, полученных методами компьютерной томографии, продемонстрирована работоспособность предложенного метода.

8. Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 19-01-00790 (раздел 6) и 19-29-09044 (разделы 4-5).

9. Литература

- [1] Tikhonov, A.N. Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems / A.N. Tikhonov, A.V. Goncharksky, V.V. Stepanov, A.G. Yagola – Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013. – 253 p.
- [2] Leonov, A.S. Piecewise uniform regularization for the inverse problem of microtomography with a-posteriori error estimate / A.S. Leonov, Y. Wang, A.G. Yagola // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2019. – Vol. 27. – P. 1-11. DOI: 10.1080/17415977.2018.1561676.
- [3] Sizikov, V.S. Spectral method for stable estimating the distortion parameters in inverse problem of image restoration / V.S. Sizikov, D.A. Kondulukova, A.A. Sergienko // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2019. – Т. 62, № 4. – P. 379-386. DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-4-379-386.
- [4] Фурсов, В.А. Технология повышения детализации изображений с нелинейной коррекцией высокоградиентных фрагментов / В.А. Фурсов, Е.В. Гошин, К.С. Медведева // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 3. – С. 484-491. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-484-491.

- [5] Gao, H. An improved gray-scale transformation method for pseudo-color image enhancement / H. Gao, W. Zeng, J. Chen // *Computer Optics*. – 2019. – Vol. 43(1). – P. 78-82. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-78-82.
- [6] Donatelli, M. Image deblurring by sparsity constraint on the Fourier coefficients / M. Donatelli, T. Huckle, M. Mazza, D. Sesana // *Numerical Algorithms*. – 2016. – Vol. 72(2). – P. 341-361. DOI: 10.1007/s11075-015-0047-x.
- [7] Пытьев, Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем / Ю.П. Пытьев – Москва: Физматлит, 2012. – 428 с.
- [8] Pyt'ev, Yu. P. Measurement-Computation Converter as a Measurement Facility / Yu. P. Pyt'ev // *Automation and Remote Control*. – 2010. – Vol. 71(2). – P. 303-319. DOI: 10.1134/S0005117910020116.
- [9] Балакин. Д.А. Улучшение редукции измерения при принадлежности интересующей исследователя характеристики объекта исследования априори известному выпуклому замкнутому множеству / Д.А. Балакин, Ю.П. Пытьев // *Ученые записки физического факультета Московского Университета*. – 2018. – № 5. – С. 1850301-1-10.
- [10] Vuzmakov, A. To Analysis of computer images in the presence of metals / A. Ingacheva, V. Prun, D. Nikolaev, M. Chukalina, C. Ferrero, V. Asadchikov // *Proc. SPIE. Ninth International Conference on Machine Vision, Vienna, Austria*. – 2017. – Vol. 10696. DOI: 10.1117/12.2310078.

Increasing the resolution of a non-negative brightness image distorted by a linear transformation

A.I. Chulichkov¹, E.M.Molkov¹

¹M.V.Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie Gory 1, Moscow, Russia, 119991

Abstract. We consider an image distorted by linear brightness conversion and additive noise. Linear brightness transformation simulates distortions that occur in the video system due to the movement of the camera, the final aperture, etc. The task consists in such a transformation of this image, the result of which can be interpreted as an image obtained by the system with a higher resolution. Linear methods of increasing the resolution lead to an increase in the error on the transformed image. One way to reduce this error is to narrow the class of possible images. The paper uses information about the nonnegativity of the image brightness. The numerical implementation of the method takes into account the limitation on computational resources.