

# Моделирование и исследование распространения пучков Эйри и Пирси

И.А. Родин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** В настоящей работе выполнено исследование распространения ускоряющихся пучков Эйри и Пирси, а также их симметризованных и асимметричных модификаций. Моделирование распространения осуществлялось с использованием преобразования Френеля и преобразования Фурье. Основное внимание уделено исследованию влияния параметров входных пространственных спектров рассматриваемых пучков на их бездифракционные свойства. Показано влияние вида входного поля на свойства сформированных пучков, а также зависимости влияния потенциального расстояния распространения и ускорения пучка от фокусного расстояния, размеров рассматриваемых полей и оптических параметров.

## 1. Введение

В рамках данной научно-исследовательской работы рассматриваются и моделируются несколько разновидностей ускоряющихся пучков Эйри [1-5] и Пирси [6-8]. Эти пучки носят названия, связанные с каустиками и теорией катастроф [9-11]. Пучки Эйри связаны с интегралом Эйри, который был получен Джорджем Эйри для объяснения оптических каустик, таких как те, что проявляются в виде радуги. Воспроизвести и наблюдать пучки Эйри впервые удалось ученым из Флориды в 2007 году [1, 2]. Пучки Пирси также получили свое название от одноименного интеграла, который часто применяется для решения проблем распространения волн и дифракции [12]. Пучки Эйри обладают рядом уникальных свойств, среди которых ускорение, самофокусировка, самовосстановление и бездифракционность. Наличие таких свойств и возможности их применения в различных приложениях являются причиной большого интереса со стороны современного научного сообщества [13-17]. Свойство ускорения, то есть распространения по некоторой криволинейной траектории, может быть применено для огибания пучком препятствий. Свойство самофокусировки проявляется для определенных модификаций, а именно, для круговых [18-22], зеркальных [23-26] и обобщенных [27, 28] пучков Эйри. Самовосстановление заключается в способности пучков восстанавливать свою структуру после препятствия, пройдя определенное расстояние в свободном пространстве [29, 30]. Заметим, что свойство самовосстановления тесно связано с бездифракционными свойствами пучков и сначала было обнаружено у классических пучков Бесселя [31]. Таким образом, свойство бездифракционности представляет особенный интерес

для современной оптики, потому что в этом случае световые пучки не изменяют своего вида при распространении. Однако здесь стоит заметить, что данное утверждение справедливо для математической модели, бесконечной абстракции, когда входное распределение считается бесконечно протяженным на всей вещественной оси.

На практике, очевидно, это невозможно, поэтому при физической реализации начальное распределение обрезается на некоторой области [4, 32-34]. В этом случае свойство сопротивления дифракции все же сохраняется, однако только при распространении на конечные расстояния. Альтернативой классическим бездифракционным пучкам служат гибридные Бессель-Гауссовы пучки [35], пучки Лагерра-Гаусса высокого порядка [36], а также каустические пучки, к которым относятся пучки Эйри и Пирси. В настоящей работе выполнено исследование бездифракционных свойств пучков Эйри и Пирси, а также их симметризованных и ассиметричных модификаций. Моделирование распространения осуществлялось с использованием преобразования Френеля и преобразования Фурье. Симметризованные пучки Эйри рассматривались в работах [23-26]. Однако в этих работах детально не исследовались бездифракционные свойства. Обрезанный в области отрицательных аргументов (половинный) пучок Пирси был предложен в работе [7]. В данной работе рассматривается иная ассиметричная модификация пучков Пирси.

## 2. Теоретические основы

Уравнение, описывающее пучки Эйри, является аналитическим решением следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} = z\omega, \quad (1)$$

и выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{it^3}{3} + ixt\right] dt, \quad (2)$$

что является известным результатом [37], однако в данной работе рассматривается более общий случай:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\alpha t^3 + ixt] dt, \quad (3)$$

Принимая во внимание формулу одномерного обратного преобразования Фурье, имеющую следующий вид [38]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[ixt] dt, \quad (4)$$

нетрудно заметить, что равенство (4) также является преобразованием Фурье от функции:

$$F(t, \alpha) = \exp[i\alpha t^3], \quad (5)$$

которая в дальнейшем будет рассматриваться в качестве входного поля в виде пространственного спектра в рамках исследования.

Уравнение, описывающее пучки Пирси, задается интегралом Пирси [12]:

$$Pe(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(t^4 + xt^2 + yt)] dt, \quad (6)$$

что тоже в свою очередь является обратным преобразованием Фурье от функции следующего вида:

$$F(x, t) = \exp[i(t^4 + xt^2)], \quad (7)$$

которая будет рассматриваться как входное поле при моделировании пучков Пирси [39, 40].

Для численного интегрирования было принято решение использовать стандартную формулу прямоугольников, так как она представляется наиболее простой в реализации и имеет наибольшую точность среди всех способов численного интегрирования нулевого порядка. В классическом варианте формула выглядит следующим образом [41]:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) (x_{i+1} - x_i), \quad (8)$$

однако в рамках данной работы исходная функция является функцией двух аргументов, поэтому результатом такого численного интегрирования станет значение выходной функции в конкретной точке, то есть:

$$f(u_j) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) \exp\left[i\frac{k}{f}\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)u_j\right]. \quad (9)$$

Однако не всегда научный интерес может ограничиться информацией, получаемой из одномерного преобразования Фурье. Во многих случаях значительно нагляднее продемонстрировать результат моделирования в виде поверхности. Для достижения данного результата используется двумерное преобразование Фурье, которое имеет следующий вид:

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp\left[\frac{-ik}{f}(xu + yv)\right] dx dy, \quad (10)$$

где  $x, y$  – пространственные переменные входного поля,  $u, v$  – пространственные переменные выходного поля,  $k$  – волновое число,  $f$  – фокусное расстояние.

В данной работе двойное интегрирование в формуле тоже было заменено численным аналогом.

Кроме того, определенный интерес в рамках данного исследования может представлять реализация преобразования Френеля, физический смысл которого заключается в распространении пучка на некоторое расстояние  $z$ . Общий вид одномерного преобразования Френеля [42]:

$$F(u) = -\sqrt{\frac{ik}{2\pi z}} \exp[ikz] \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x - u)^2\right], \quad (11)$$

где  $z$  – расстояние распространения. Кроме того, множество случаев, для которых допустимо использовать данную формулу, ограничивается условием  $|x-u| \ll z$ .

Стоит отметить, что преобразование Фурье моделирует распространение в ситуации, когда начальная и конечная плоскости рассмотрения являются фокальными плоскостями линзы. Данное ограничение не всегда удовлетворяет интерес исследований, поэтому в рамках этой научной работы было принято решение совместить преобразование Френеля и Фурье, чтобы иметь возможность рассмотреть выходное распределение на некотором произвольном расстоянии от выходной фокальной плоскости линзы. Достичь подобного результата можно за счет включения в оператор распространения на свободное расстояние оптического элемента. В математическом смысле это значит, что ядро преобразования Френеля умножается на экспоненту определенного вида. В данном случае воспользуемся следующей реализацией:

$$\exp\left[-ik \frac{x^2}{2f}\right].$$

Тогда раскроем квадрат в показателе экспоненты, вынесем за знак интеграла слагаемое, содержащее  $u^2$ , так как оно не зависит от переменной интегрирования, и внесем добавленный оптический элемент под знак интеграла. После группировки некоторых слагаемых получим

$$F(u, z) = -\sqrt{\frac{ik}{2\pi z}} \exp[ikz] \exp\left[\frac{iku^2}{2z}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left[\frac{ikx^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right] \exp\left[-ik\frac{ux}{z}\right] dx, \quad (12)$$

где  $f$  – фокусное расстояние линзы,  $z$  – расстояние от входной плоскости. Операторы распространения (11) и (12) применяются в следующем разделе для сравнительного моделирования распространения пучков Эйри и Пирси, а также их симметризованных и ассиметричных модификаций.

### 3. Результаты моделирования пучков Эйри и Пирси

Помимо классического вида пучков, в работе рассматривались некоторые виды их модификаций с целью выяснить влияние произведенных модификаций на свойства пучков. Для пучков Эйри была рассмотрена их симметризованная разновидность, входное поле которой описывается формулой (13):

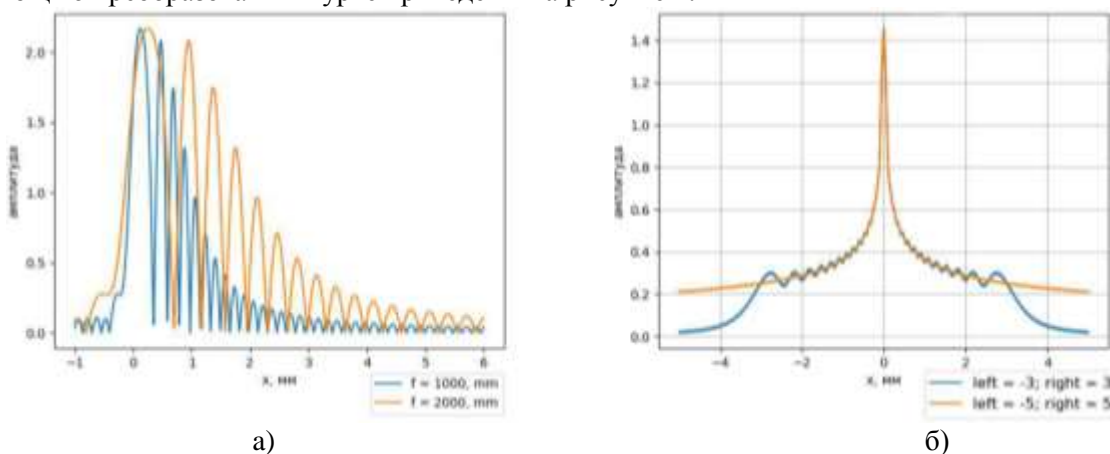
$$AiEven(x, a) = \exp\left[-i \frac{\alpha |x|^3}{3}\right]. \quad (13)$$

Для пучков Пирси была рассмотрена их асимметричная модификация, входное поля для которой выглядит следующим образом:

$$PeOdd(x, t) = \begin{cases} \exp(i(x^4 + tx^2)) & : x \geq 0, \\ \exp(i(-x^4 - tx^2)) & : x < 0. \end{cases}$$

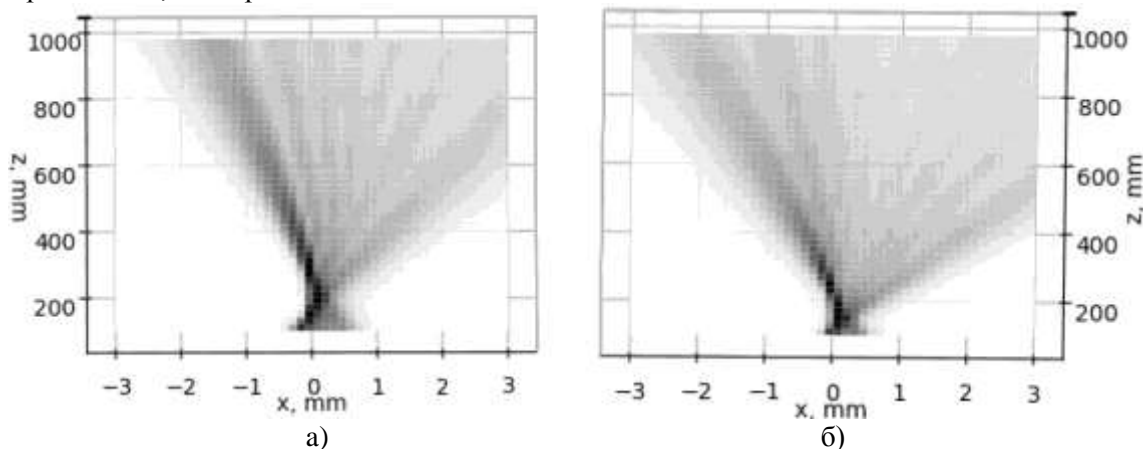
Для данных модификаций ожидаемыми результатами были появление свойства ускорения для асимметричной модификации пучков Пирси, в то время как симметризованная разновидность пучков Эйри потеряет данное свойство.

С помощью преобразования Фурье можно получить картины выходного поля пучков для различных зафиксированных параметров. Некоторые из результатов моделирования пучков с помощью преобразования Фурье приведены на рисунке 1.



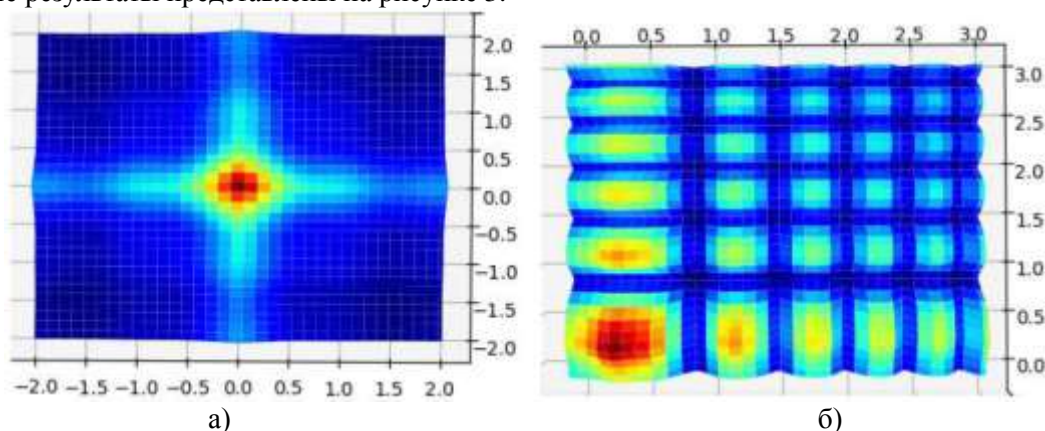
**Рисунок 1.** Амплитуда выходного поля пучков Эйри для различных фокусных расстояний а), пучков Пирси для различных входных отрезков б).

Кроме того, с помощью оператора распространения пучков вблизи фокальной плоскости можно пронаблюдать свойство ускорения. Данный эффект достигается за счет применения преобразования Френеля к пучку, сформированному с помощью преобразования Фурье. Результаты для пучка Эйри и нечетного модифицированного пучка Пирси приведены на рисунке 2. Этот результат подтверждает возможность изменения свойств пучков с помощью модификаций над ними. В данном случае после произведения модификаций пучок Пирси стал ускоряющимся, в то время как в своем классическом виде таковым не являлся.



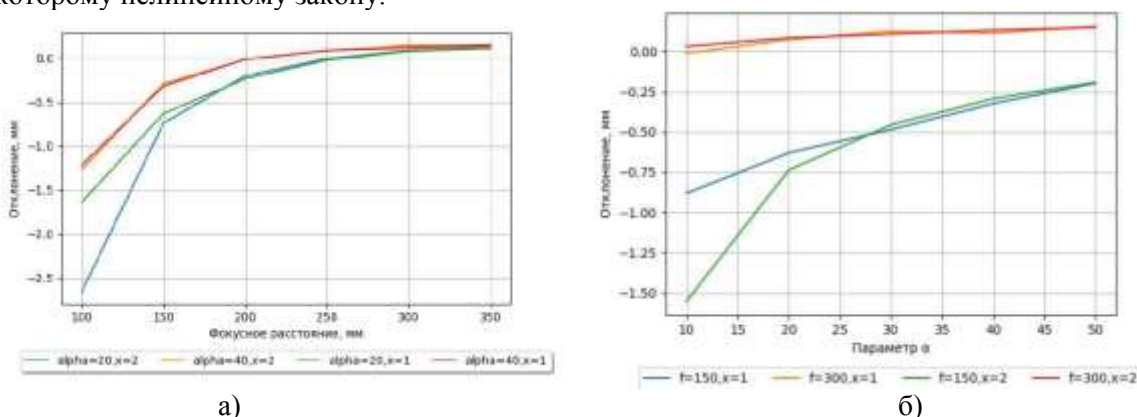
**Рисунок 2.** Результаты моделирования ускоряющихся пучков Эйри (а), несимметричного модифицированного пучка Пирси (б) при  $f=100$  мм.

Также в работе были получены результаты двумерного моделирования пучков Эйри и Пирси. Данные результаты представлены на рисунке 3.



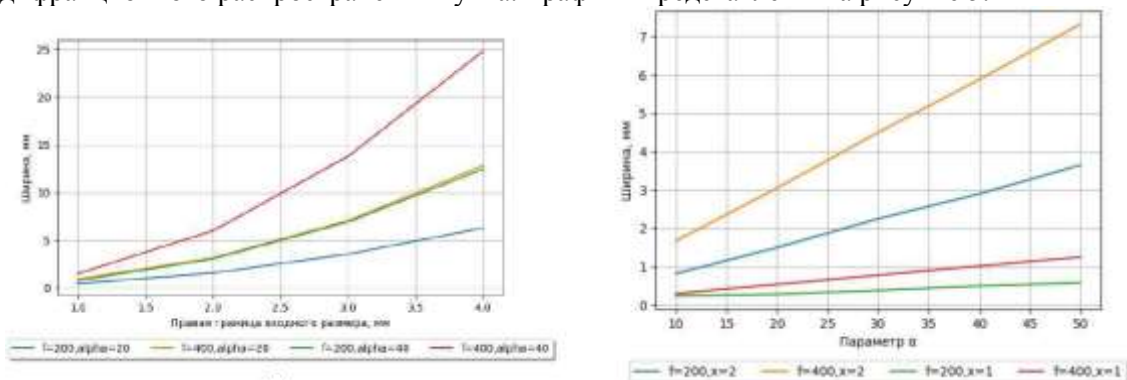
**Рисунок 3.** Результаты моделирования двумерных пучков Пирси а), Эйри б).

На рисунке 4 приведены графики зависимостей величины ускорения пучка от фокусного расстояния линзы и оптического параметра. Поскольку в данной работе интерес вызывает модуль отклонения, то обе зависимости можно охарактеризовать как убывающие по некоторому нелинейному закону.



**Рисунок 4.** Графики зависимости величины ускорения от фокусного расстояния линзы а), оптического параметра б).

Аналогичные зависимости были получены для ширины пучка – расстояния от самого высокого пика до того момента, когда пучок уже можно считать затухающим. Данная величина представляет интерес, потому что косвенным образом влияет на потенциальное расстояние бездифракционного распространения пучка. Графики представлены на рисунке 5.



**Рисунок 5.** Графики зависимости ширины пучка от размеров входного поля а), оптического параметра б).

В отношении данных графиков можно утверждать, что зависимость ширины от размеров входного поля имеет нелинейный характер, в то время как зависимость от оптического параметра, вероятно, линейна.

#### 4. Заключение

В рамках данной работы были реализованы программные модули построения входных распределений в виде пространственных спектров пучков Эйри и Пирси, моделирования формирования пучков при прохождении через линзы и распространении на свободное расстояние, а также через оптическую систему, позволяющую моделировать распространение пучков вблизи фокальной области. В ходе выполнения работы были установлены некоторые закономерности между значениями параметров входных полей и операторов распространения и общим видом выходного поля. Было установлено, что ширина пучка, которая, в свою очередь, связана с потенциальным расстоянием распространения, линейно возрастает при увеличении фокусного расстояния и оптического параметра и нелинейно возрастает при увеличении входного размера. Было отмечено, что увеличение фокусного расстояния линзы при моделировании распространения пучков масштабирует график, что соответствует привычному принципу работы собирающей линзы. Над пучками были проведены модификации с целью выявить возможность приобретения рассматриваемыми пучками некоторых свойств, характерных для пучков, чей внешний вид был взят в качестве желаемого результата для модификаций. Данное предположение нашло подтверждение: в частности, модифицированный пучок Пирси стал обладать свойством ускорения, чего нельзя сказать о его классическом виде. Кроме того, было проведено исследование влияния различных параметров на величину отклонения при ускорении, по результатам которого можно сделать вывод о том, что отклонение пучка при ускорении нелинейно убывает при увеличении оптического параметра и фокусного расстояния. Была экспериментально определена величина фокусного расстояния, при котором явление ускорения практически полностью перестает наблюдаться, а именно  $f=350\text{мм}$ . Также было установлено, что изменение входного размера не оказывает существенного влияния на величину отклонения.

#### 5. Благодарности

Работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-07-00505 А).

#### 6. Литература

- [1] Siviloglou, G.A. Observation of accelerating Airy beams / G.A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, D.N. Christodoulides // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 99(21). – P. 213901.
- [2] Siviloglou, G.A. Accelerating finite energy Airy beams // G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // *Optics Letters.* – 2007. – Vol. 32. – P. 979-981.
- [3] Li, J. Vacuum laser-driven acceleration by Airy beams / J. Li, W. Zang, J. Tian // *Opt. Express.* – 2010. – Vol. 18(7). – P. 7300-7306.
- [4] Хонина, С.Н. Ограниченные одномерные пучки Эйри: лазерный веер / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский // *Компьютерная оптика.* – 2008. – Т. 32, № 2. – С.168-174.
- [5] Котляр, В.В. Лазерные пучки Эйри с гиперболической траекторией в ближней зоне / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, С.Г. Засканов // *Компьютерная оптика.* – 2013. – Т. 37, № 1. – С. 4-12.
- [6] Ring, J. Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams / J. Ring, J. Lindberg, A. Mourka, M. Mazilu, K. Dholakia, M. Dennis // *Optics Express.* – 2012. – Vol. 20. – P. 18955-18966.
- [7] Ковалев, А.А. Структурно-устойчивые трехмерные и двумерные лазерные половинные пучки Пирси / А.А. Ковалев, В.В. Котляр, С.Г. Засканов // *Компьютерная оптика.* – 2014. – Т. 38, № 2. – С. 193-197.
- [8] Zang, F. Dual self-accelerating properties of one-dimensional finite energy Pearcey beam // F. Zang, Y. Wang, L. Li // *Results in Physics.* – 2019. – Vol. 15. – P. 102656.

- [9] Постон, Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт – М.: Мир, 1980. – 607 с.
- [10] Gilmore, R. Catastrophe theory for scientists and engineers – New York: John Wiley & Sons Inc., 1981.
- [11] Харитонов, С.И. Теория катастроф и каустики радиально-симметричных пучков / С.И. Харитонов, С.Г. Волоотовский, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 2. – С. 159-167. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-159-167.
- [12] Pearcey, T. The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic // *Phil Mag S.* – 1946. – Vol. 7(37). – P. 311-317.
- [13] Baumgartl, J. Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets / J. Baumgartl, M. Mazilu, K. Dholakia // *Nat Photon.* – 2008. – Vol. 363. – P. 675-678.
- [14] Polynkin, P. Curved plasma channel generation using ultraintense Airy beams / P. Polynkin, M. Kolesik, J.V. Moloney, G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // *Science.* – 2009. – Vol. 324. – P. 229-232.
- [15] Хонина, С.Н. Формирование лазерных пучков Эйри с помощью бинарно-кодированных дифракционных оптических элементов для манипулирования микрочастицами / С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, О.Ю. Моисеев // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 2. – С. 138-146.
- [16] Zheng, Z. Optical trapping with focused Airy beams / Z. Zheng, B.-F. Zhang, H. Chen, J. Ding, H.-T. Wang // *Appl. Opt.* – 2011. – Vol. 50. – P. 43-49.
- [17] Хонина, С.Н. Формирование близкорасположенных световых пятен на основе лазерных зеркальных пучков Эйри / С.Н. Хонина, А.П. Порфирьев, С.А. Фомченков, А.С. Ларькин, А.Б. Савельев-Трофимов // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 5. – С. 661-669. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-661-669.
- [18] Efremidis, N.K. Abruptly autofocusing waves / N.K. Efremidis, D.N. Christodoulides // *Opt. Lett.* – 2010. – Vol. 35. – P. 4045-4047.
- [19] Jiang, Y. Propagation dynamics of abruptly autofocusing Airy beams with optical vortices / Y. Jiang, K. Huang, X. Lu // *Opt. Express.* – 2012. – Vol. 20. – P. 18579-18584.
- [20] Zhang, P. Trapping and guiding microparticles with morphing autofocusing Airy beams / P. Zhang, J. Prakash, Z. Zhang, M. S. Mills, N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides, Z. Chen // *Opt. Lett.* – 2015. – Vol. 36. – P. 2883-2885.
- [21] Porfirev, A.P. Generation of the azimuthally modulated circular superlinear Airy beams / A.P. Porfirev, S.N. Khonina // *Journal of the Optical Society of America B.* – 2017. – Vol. 34, № 12. – P. 2544-2549. DOI: 10.1364/JOSAB.34.002544.
- [22] Porfirev, A.P. Experimental investigation of complex circular Airy beam characteristics / A.P. Porfirev, S.A. Fomchenkov, S.N. Khonina // *Proc. SPIE.* – 2018. – Vol. 10717. – P. 107170Q. DOI: 10.1117/12.2315202.
- [23] Хонина, С.Н. Зеркальные лазерные пучки Эйри / С.Н. Хонина, С.Г. Волоотовский // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 2. – С. 203-213.
- [24] Khonina, S.N. Specular and vortical Airy beams // *Optics Communications.* – 2011. – Vol. 284(19). – P. 4263-4271.
- [25] Vaveliuk, P. Symmetric Airy beams / P. Vaveliuk, A. Lencina, J. A. Rodrigo, O. M. Matos // *Opt. Lett.* – 2014. – Vol. 39(8). – P. 2370-2373.
- [26] Li, H. Propagation properties of cosh-Airy beams / H. Li, J. Wang, M. Tang, X. Li // *J. Mod. Opt.* – 2018. – Vol. 65. – P. 314-320.
- [27] Belafhal, A. Theoretical introduction and generation method of a novel nondiffracting waves: Olver beams / A. Belafhal, L. Ez-Zariy, S. Hennani, H. Nebd // *Opt. Photon. J.* – 2015. – Vol. 5. – P. 234-246.
- [28] Khonina, S.N. Fractional Airy beams / S.N. Khonina, A.V. Ustinov // *Journal of the Optical Society of America A.* – 2017. – Vol. 34(11). – P. 1991-1999. DOI: 10.1364/JOSAA.34.001991.
- [29] Broky, J. Self-healing properties of optical Airy beams / J. Broky, G.A. Siviloglou, A. Dogariu, D.N. Christodoulides // *Opt Express.* – 2008. – Vol. 16. – P. 12880-12891.

- [30] Chu, X.X. Analytical study of the self-healing property of Airy beams / X.X. Chu, G.Q. Zhou, R.P. Chen // *Phys Rev A*. – 2012. – Vol. 85. – P. 013815.
- [31] Garces-Chavez, V. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam / V. Garces-Chavez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, K. Dholakia // *Nature*. – 2002. – Vol. 419. – P. 145-147.
- [32] Khonina, S.N. Bessel-mode formers / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // *Proceedings of SPIE Int. Soc. Opt. Eng.* – 1995. – Vol. 2363. – P. 184-190.
- [33] Zamboni-Rached, M. Analytic description of Airy-type beams when truncated by finite apertures / M. Zamboni-Rached, K.N. Nobrega, C.A. Dartora // *Optics Express*. – 2012. – Vol. 20(18). – P. 19972-19977.
- [34] Котляр, В.В. Формирование лазерных половинных пучков Пирси с помощью пространственного модулятора света / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, А.П. Порфирьев // *Компьютерная оптика*. – 2014. – Т. 38, № 4. – С. 658-662.
- [35] Gori, F. Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattary // *Optics Commun.* – 1987. – Vol. 64. – P. 491-495.
- [36] Алмазов, А.А. Восстановление после препятствий лазерных пучков, содержащих угловые гармоники / А.А. Алмазов, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 2005. – Т. 27. – С. 72-83.
- [37] Abramowitz, M. Handbook of Mathematical Functions / M. Abramowitz, I.A. Stegun – Dover, 1972. – 456 p.
- [38] Зорич, В.А. Математический анализ – М.: Физматлит, 1984. – 544 с.
- [39] Deng, D. Virtual source of a Pearcey beam // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39(9). – P. 2703-2706.
- [40] Ren, Z. Generation of a family of Pearcey beams based on Fresnel diffraction catastrophes / Z. Ren, C. Ying, H. Jin, B. Chen // *J. Opt.* – 2015. – Vol. 17. – P. 105608.
- [41] Самарский, А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин – М.: Наука, 1989. – 432 с.
- [42] Залманзон, Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях – М.: Наука, 1989. – 496 с.

## Modeling and researching of propagation of Airy and Pearcey beams

I.A. Rodin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** In given paper we present research of propagation of accelerating Airy and Pearcey beams and their both symmetric and asymmetric modifications. Modeling of propagation was performed with Fourier and Fresnel transformations. Mostly paper is dedicated to research of affect of parameters of input specters on beams non-diffractal properties. Also we show an influence of characteristics of input field on formed beams properties and dependence of potential propagation distance and acceleration on focal length, given fields sizes and optical parameters.