Исследование погрешности разностного решения уравнения теплопроводности в многослойной среде методом вычислительного эксперимента

Ю.Ю. Кривошеева
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева
Самара, Россия
akinava.love@gmail.com

***Аннотация*—В данной работе рассмотрен метод нахождения погрешности разностного решения уравнения теплопроводности в трехслойной среде. Было показано, что существует возможность предсказания погрешности решения по размеру шагов сетки без численного расчета самого решения.**

Ключевые слова— уравнение теплопроводности, разностная схема, погрешность решения.

1. Введение

Краевые задачи для уравнения теплопроводности – один из важных разделов уравнений математической физики. Помимо классических вариантов задач для однородной среды, для которых коэффициенты уравнения являются непрерывными, также интересны случаи, когда среда является неоднородной (включает в себя несколько слоев). К таким средам можно отнести многослойные обшивки технических конструкций, биологические объекты (кожа, сосуды).

Особый интерес представляют технические конструкции, подверженные тепловой нагрузке. Для таких конструкций нужно принимать во внимание вероятность влияния тепла на систему, так как тепловая нагрузка может привести к изменению ряда качеств материала, что приведет к выводу прибора из строя, его повреждению или же утрате весомых эксплуатационных качеств [1]. В связи с этим появляется необходимость разработки специальной тепловой защиты, которая позволила бы сохранить температуру внутри системы, обеспечить нормальное функционирование оборудования, прочность элементов конструкций.

Для уменьшения тепловой нагрузки, на поверхности, подверженные тепловому воздействию, наносят защитные покрытия. Таким образом, это сводится к задаче о теплопроводности слоистых структур, свойства теплопроводности которых меняются скачком.

2. Теоретические основы

Математическую модель задачи о распространении тепла в многослойном объекте можно записать в виде:

$$\begin{cases} c(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right), 0 \le x \le L, 0 \le t \le T; \\ u|_{t=0} = u_c; \\ u|_{x=0} = u_c, \quad u|_{x=L} = \eta(t) + u_c, \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{1}$$

где $u(x,t)$ – непрерывная функция распределения температуры в объекте, $k(x)$ – кусочно-непрерывная функция коэффициента теплопроводности, $c(x)$ – кусочно-непрерывная функция удельной теплоемкости, L – длина объекта, T – время воздействия тепловой нагрузки.

Разностную неявную интегро-интерполяционную схему для задачи (1) запишем следующим образом:

$$\begin{cases} c_i\dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \dfrac{1}{h_x}\left(a_{i+1}\dfrac{u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}}{h_x} - a_i\dfrac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{h_x}\right), \\ \qquad i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = u_c, \quad i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = u_c, \quad u_I^k = \eta(t_k) + u_c, \quad k = \overline{1, K}. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть 3 слоя соприкасаются в точках x_{01} и x_{02} и имеют характеристики $\tilde{c}, \tilde{k}; \hat{c}, \hat{k}$ и $\check{c}, \check{k}$ соответственно. Тогда c_i и a_i в системе (2) будем вычислять следующим образом:

$$\begin{cases} c_i = \tilde{c}, \quad i < I_{01}; \\ c_i = \dfrac{\tilde{c} + \hat{c}}{2}, \quad i = I_{01}; \\ c_i = \hat{c}, \quad I_{01} < i < I_{02}; \\ c_i = \dfrac{\check{c} + \hat{c}}{2}, \quad i = I_{02}; \\ c_i = \check{c}, \quad i > I_{02}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_i = \tilde{k}, \quad i \le I_{01}; \\ a_i = \hat{k}, \quad I_{01} < i \le I_{02}; \\ a_i = \check{k}, \quad i > I_{02}, \end{cases}$$

где $I_{01} = \frac{x_{01}}{h_x}, I_{02} = \frac{x_{02}}{h_x}$.

Для получения погрешности разложим разностное решение для шагов по пространству, отличающихся между собой в два раза:

$$u_{h_x,h_t} = [u]_{h_x,h_t} + Dh_t + Eh_x + O(h_t^2, h_x^2)$$

$$u_{\frac{h_x}{2},h_t} = [u]_{\frac{h_x}{2},h_t} + Dh_t + E\frac{h_x}{2} + O(h_t^2, \frac{h_x^2}{4})$$

где u – разностное решение, $[u]$ – точное аналитическое решение в узлах сетки, D,E – коэффициенты разложения.

Вычтем одно выражение из другого. При этом будем учитывать разность двух аналитических решений даст ноль. Таким образом получим часть погрешности $\Delta(h_x)$, связанную с измельчением шага по пространству:

$$\Delta(h_x) = \left|u_{h_x,h_t} - u_{\frac{h_x}{2},h_t}\right| = E\frac{h_x}{2} + O(h_t^2, \frac{h_x^2}{4})$$

Для получения части погрешности, связанной с шагом по времени, проделаем аналогичные действия. В результате имеем формулу:

$$\Delta(h_t) = \left|u_{h_x,h_t} - u_{h_x,\frac{h_t}{2}}\right| = D\frac{h_t}{2} + O(\frac{h_t^2}{4}, h_x^2)$$

Используя коэффициенты E и D, можно предсказывать погрешность решения, не прибегая к расчетам самого решения. Это нужно для того, чтобы можно было, подбирая шаги дискретизации по пространству и времени, строить решение с интересующим уровнем погрешности.

3. Вычислительный эксперимент

В ходе численного расчета решения с параметрами $\tilde{c} =$ 1.15 Дж/см3∗К, $\hat{c} =$ 0.2 Дж/см3∗К, $\check{c} = 0.01$ Дж/см3∗К, $\tilde{k} = 0.2$ Вт/см∗К , $\hat{k} = 400$ Вт/см∗К, $\check{k} = 0.09$ Вт/см∗К, l = 12 см, T = 20с, $\eta(t) = 1000\sin\frac{\pi t}{2T}$, $u_c = 300\ K$ и различными шагами по пространству и времени и последующим расчетом долей погрешностей были получены коэффициенты разложения E и D, что позволило установить формулу для теоретического расчета полной погрешности при данных параметрах:

$$\Delta = 16.79h_x + 12.75h_t \tag{3}$$

В таблице 1 представлено отклонение ε полной теоретической погрешности $\Delta_{\text{теор}}$, рассчитанной по формуле (3) от экспериментальной $\Delta_{\text{эксп}}$, полученной при численном моделировании.

Таблица 1. Отклонение суммарной погрешности для решения в трехслойной области

h_t	h_x	$\Delta_{\text{теор}}$	$\Delta_{\text{эксп}}$	ε
0.08	0.8	14.59	14.64	0.34%
0.06	0.6	10.95	10.72	1.23%
0.05	0.5	9.12	9.06	0.65%
0.04	0.4	7.29	7.36	0.96%
0.03	0.3	5.47	5.38	1.65%
0.02	0.2	3.65	3.60	1.37%
0.01	0.1	1.82	1.86	2.19%

Из таблицы видно, что отклонение суммарной теоретической погрешности от экспериментальной остается малым, что позволяет делать весьма точный прогноз. Таким образом, мы можем получать решение с заданным уровнем погрешности, задавая шаги.

4. Заключение

Таким образом, в ходе численного эксперимента была получена погрешность разностного решения задачи теплопроводности в многослойной области при различных шагах сетки. На основе полученных результатов была построена формула для предсказания погрешности по заданным шагам и показано, что по этой формуле возможно получать интересующий уровень погрешности с достаточно высокой точностью.

Литература

[1] Танана, В.П. О решении обратной граничной задачи для композитных материалов / В.П. Танана, А.А. Ершова // Вестник удмуртского университета. – 2018. – Т. 28, № 4. – С. 474-488. DOI: 10.20537/vm180404.

[2] Шашков, А.Г. Тепло- и массообмен в потоке нагретого газа / А.Г. Шашков. – Минск: Изд-во «Наука и техника», 1974. – 101 с.

[3] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 3. – 662 с.

[4] Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: учебное пособие для университетов / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

[5] Сабитов, К.Б. Уравнения математической физики: учеб. пособие / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

[6] Самарский, А.А. Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1987. – 288 с.

[7] Дегтерев, А.А. Метод конечных разностей: учеб. пособие / А.А Дегтерев. – Самара: Самарский университет, 2019. – 81 с.