

Использование нейронных сетей для идентификации параметров авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений

Н.А. Андриянов^{1,2}

¹АО «НПП «Исток» им. Шокина», Вокзальная 2а, к.1, Фрязино, Россия, 141190

²Ульяновский государственный технический университет, Северный Венец 32, Ульяновск, Россия, 432027

Аннотация. Для определения параметров моделей авторегрессии с кратными корнями характеристических уравнений были обучены нейронные сети. Рассмотрены частные случаи для моделей первого и второго порядков. Исследования эффективности проводились для нейронных сетей с обратным распространением ошибки, сетей каскадного типа и сети обобщенной регрессии. Полученные результаты сравниваются с алгоритмом идентификации на основе корреляционных функций. Предложенные алгоритмы реализуются как для одномерных случайных последовательностей на базе таких моделей, так и для двумерных случайных полей. Кроме того, выполнена идентификация параметров для подгонки моделей под реальные изображения.

1. Введение

В последнее время для обработки не только изображений, но и одномерных последовательностей данных успешно применяются нейронные сети [1-3]. Современные средства вычислительной техники позволяют в ряде задач применять глубокое обучение, обеспечивающее, как правило, лучший результат по сравнению с обычным обучением [4]. Однако существенной проблемой при обучении глубоких сетей является отсутствие достаточной выборки, на основе которой могут быть обобщены свойства моделей. Одним из вариантов генерации необходимых данных в этом случае может быть применение математических моделей случайных процессов и полей (СП) [5-8]. В работах [6-8] предложено использование дважды стохастических моделей, позволяющих формировать сигналы в разных точках по-разному, что, в том числе обеспечивает адекватное описание неоднородных изображений. Тем не менее, в ряде случаев такое описание может быть избыточным, да и сама модель значительно усложняется, поэтому для описания гладких сигналов и изображений с плавными перепадами яркости можно использовать модели авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений [9,10]. Следует отметить, что такие модели характеризуются меньшим числом параметров. Вместе с тем для замены реальных сигналов или изображений необходима идентификация параметров моделей [11,12]. В частности, применительно к авторегрессионным СП данная задача рассмотрена в [11]. Предложенный алгоритм идентификации базируется на построении системы уравнений Юла-Уокера, а ее решение для моделей больших порядков требует значительных вычислительных затрат. В настоящей работе предлагается обучение нейронной сети для решения задачи идентификации параметров

авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений. Затем обученная сеть может быть использована для подгонки параметров реального изображения какого-то типа, а эти параметры, в свою очередь, могут быть подставлены в математическую модель для генерации заданного числа изображений на основе имеющегося реального.

2. Идентификация параметров случайных последовательностей на базе нейронных сетей

Пусть реализуется случайная последовательность первого порядка вида

$$x_i = \rho x_{i-1} + \xi_i, i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где ρ – коэффициент корреляции, ξ_i – случайная величина, подчиняющаяся гауссовому распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_\xi^2 = \sigma_x^2(1 - \rho^2)$, σ_x^2 – заданная дисперсия случайной последовательности, N – длина последовательности.

Для обучения с помощью модели (1) сгенерируем $M = 200$ случайных последовательностей длиной $N = 10000$ для каждого из $K = 100$ коэффициентов корреляции, распределенных равномерно в диапазоне $[-0.99; 0.99]$. Затем посчитаем ковариационные функции (КФ) для всех генераций и будем подавать их на вход нейронной сети

$$B(k) = \frac{1}{\hat{\sigma}_x^2(N-k)} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \hat{m}_x)(x_{i+k} - \hat{m}_x), \quad (2)$$

где $\hat{\sigma}_x^2, \hat{m}_x$ – оценки дисперсии и математического ожидания сгенерированного случайного процесса.

На рисунке 1 показаны полученные реализации и их КФ для коэффициентов корреляции $-0.99, 0$ и 0.99 соответственно.

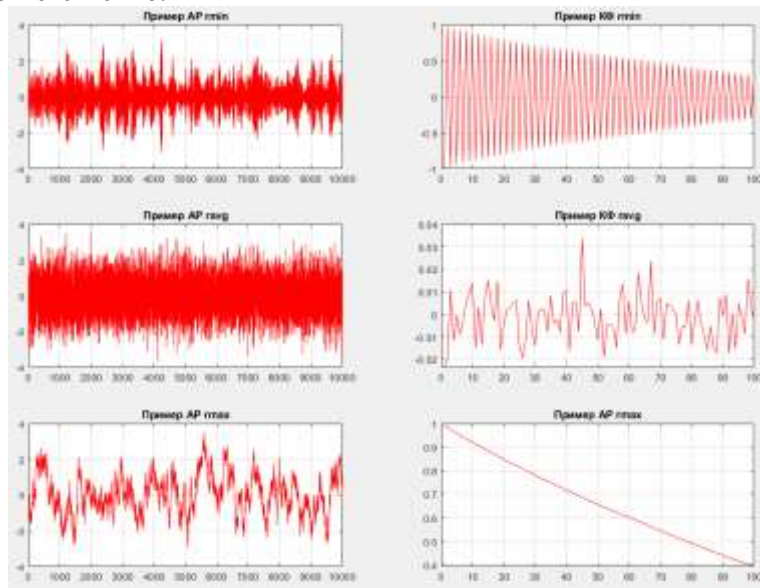


Рисунок 1. Данные, используемые для обучения сети.

Очевидно, что отличие КФ выражено более ярко по сравнению с исходным сигналом. На рисунке 2 представлены структуры нейронных сетей, используемых для обучения. Рисунок 2а показывает нейронную сеть обобщенной регрессии (Сеть №1), рисунок 2б показывает прямую сеть с обратным распространением ошибки (Сеть №2), а рисунок 2в – каскадную сеть с обратным распространением ошибки (Сеть №3).

Для сетей с обратным распространением ошибки на рисунке 3 представлены характеристики обучения. Рисунок 3а соответствует Сети №2, рисунок 3б – сети №3.

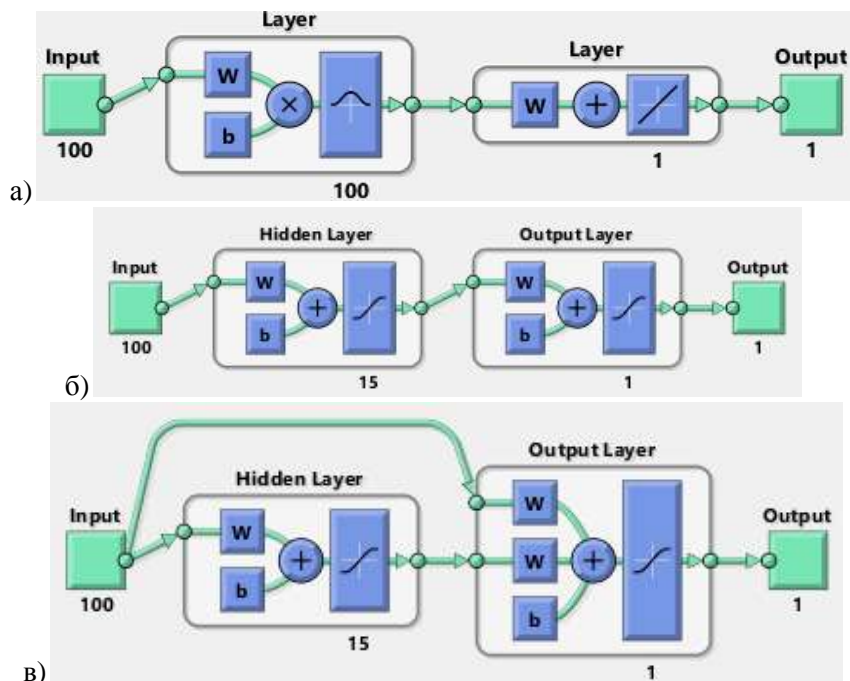


Рисунок 2. Структура нейронных сетей.

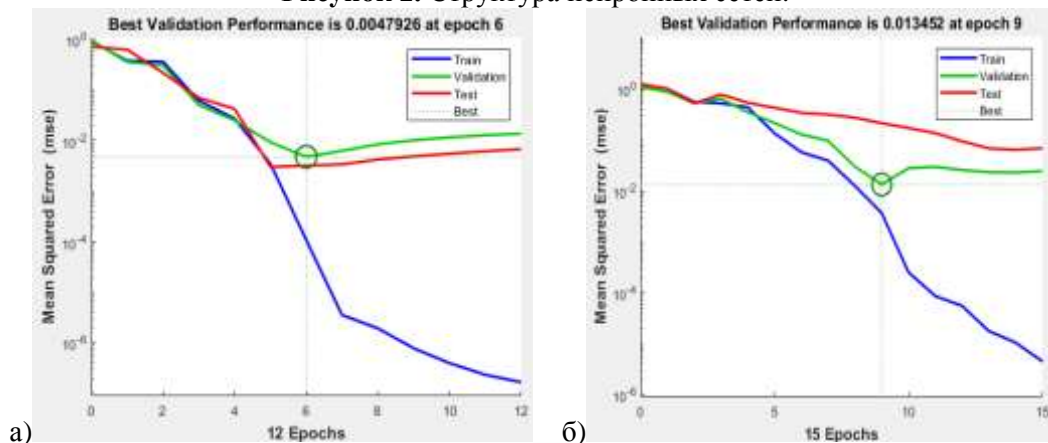


Рисунок 3. Процесс обучения нейронных сетей.

Анализ графиков на рисунке 3 показывает, что обучение выполняется достаточно быстро. Это связано с возможностью хорошего аналитического описания зависимостей КФ от коэффициентов корреляции.

Ошибки идентификации на тестовой выборке, содержащей по 5 реализаций с каждым коэффициентом корреляции, составили: для Сети №1 – 16.99%, для Сети №2 – 1.8%, для Сети №3 – 10.38%. Таким образом, результат работы прямой сети с обратным распространением ошибки оказался в 5-8 раз лучше, чем для каскадной сети и сети обобщенной регрессии.

Выполним аналогичное исследование для случайной последовательности с кратными корнями характеристических уравнений второго порядка

$$x_i = 2\rho x_{i-1} - \rho^2 x_{i-2} + \xi_i, i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где ρ – корреляционный параметр модели с кратными корнями характеристических уравнений, ξ_i – случайная величина, подчиняющаяся гауссовому распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_{\xi}^2 = \sigma_x^2 (1 - \rho^2)^3 / (1 + \rho^2)$, σ_x^2 – заданная дисперсия случайной последовательности, N – длина последовательности.

На рисунке 4 показаны реализации модели (4) и их КФ для коэффициентов корреляции -0.99, 0 и 0.99 соответственно.

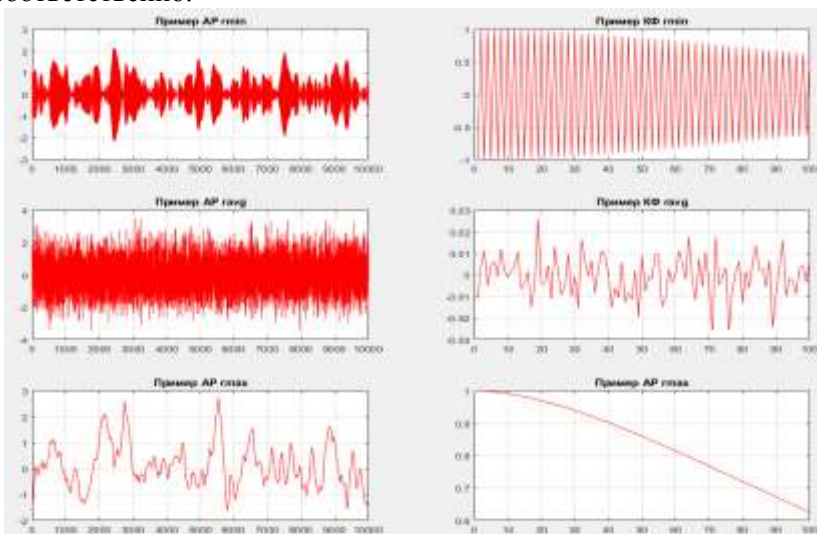


Рисунок 4. Данные, используемые для обучения сети на основе авторегрессий с кратными корнями.

Для сетей с обратным распространением ошибки на рисунке 5 представлены характеристики обучения. Рисунок 5а соответствует Сети №2, рисунок 5б – Сети №3.

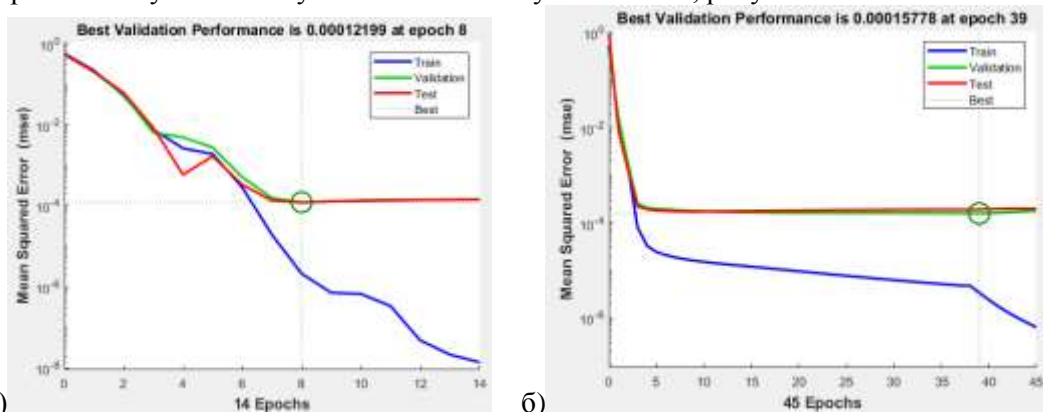


Рисунок 5. Процесс обучения нейронных сетей на авторегрессиях с кратными корнями.

Анализ графиков на рисунке 5 показывает, что обучение выполняется достаточно быстро. Однако каскадная сеть обучалась в 3 раза дольше. При этом средняя ошибка здесь меньше, чем для модели первого порядка почти в 100 раз.

Ошибки идентификации на тестовой выборке, содержащей по 5 реализаций с каждым коэффициентом корреляции, составили: для Сети №1 – 2.53%, для Сети №2 – 0.0088%, для Сети №3 – 0.0189%. Таким образом, результат работы прямой сети с обратным распространением ошибки оказался наилучшим и для модели второго порядка. Кроме того, ошибки на тестовой выборке на несколько порядков меньше, чем для модели первого порядка.

3. Идентификация параметров случайных полей на базе нейронных сетей

Поскольку обученные сети адекватно оценивают параметры одномерных моделей, то целесообразно будет выполнить их обучение для двумерных моделей. Двумерная модель первого порядка описывается следующим выражением

$$x_{i,j} = \rho_1 x_{i-1,j} + \rho_2 x_{i,j-1} - \rho_1 \rho_2 x_{i-1,j-1} + \xi_{i,j}, i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2, \quad (4)$$

где ρ_1, ρ_2 – коэффициенты корреляции по строке и столбцу соответственно, $\xi_{i,j}$ – случайная величина, подчиняющаяся гауссовому распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_\xi^2 = \sigma_x^2(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)$, σ_x^2 – заданная дисперсия СП, $N_1 \times N_2$ – размеры СП.

Для обучения с помощью модели (4) сгенерируем $M = 10$ случайных полей размером $N_1 \times N_2 = 50 \times 50$ для каждого из $K = 100$ коэффициентов корреляции по строке и столбцу, распределенных равномерно в диапазоне $[-0.99; 0.99]$. Следует отметить, что для простоты в данной работе исследуется случай, когда коэффициент корреляции по строке равен коэффициенту корреляции по столбцу. Затем посчитаем КФ для всех генераций и будем подавать их на вход нейронной сети

$$B(k, l) = \frac{1}{\hat{\sigma}_x^2(N_1 - k)(N_2 - l)} \sum_{i=1}^{N_1-k} \sum_{j=1}^{N_2-l} (x_{i,j} - \hat{m}_x)(x_{i+k,j+l} - \hat{m}_x), \quad (5)$$

где $\hat{\sigma}_x^2, \hat{m}_x$ – оценки дисперсии и математического ожидания сгенерированного СП.

На рисунке 6 показаны полученные реализации и их КФ для коэффициентов корреляции $-0.99, 0$ и 0.99 соответственно.

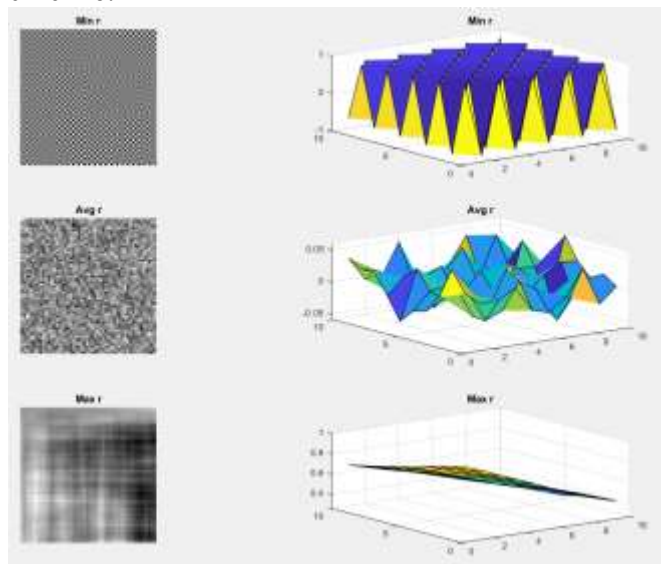


Рисунок 6. Данные, используемые для обучения сети на случайных полях.

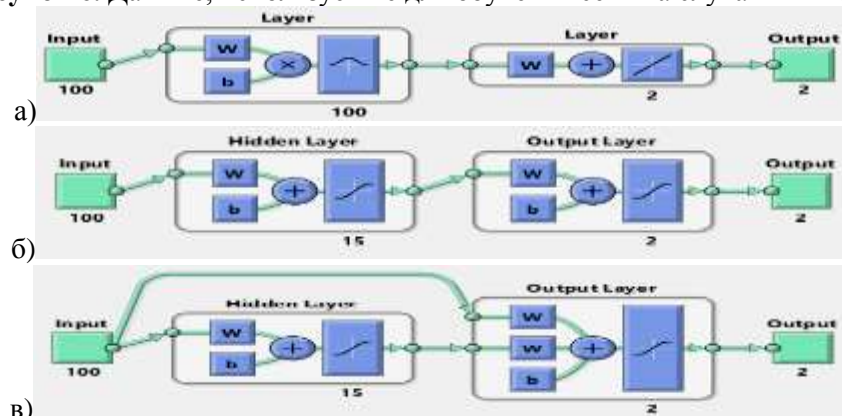


Рисунок 7. Структура нейронных сетей для обучения на СП.

Визуально, на самих изображениях, как и на графиках КФ, присутствуют значительные отличия. Однако будем использовать значения КФ для обучения сети, как и в одномерном случае. Кроме того, эти значения будут представлены вектором. На рисунке 7 представлены структуры нейронных сетей, используемых для обучения. Рисунок 7а показывает нейронную

сеть обобщенной регрессии (Сеть №4), рисунок 7б показывает прямую сеть с обратным распространением ошибки (Сеть №5), а рисунок 7в – каскадную сеть с обратным распространением ошибки (Сеть №6).

Как видно из рисунка 7, основное отличие от Сетей №1 – №3 заключается в том, что на выходе имеется два значения, определяющие корреляцию по строке и по столбцу. Следует отметить, что коэффициенты корреляции определяются не жёстко. Другими словами, на выходе сети возможно не 100 рассматриваемых вариантов, а гораздо большее счетное множество.

Для сетей с обратным распространением ошибки на рисунке 8 представлены характеристики обучения. Рисунок 8а соответствует Сети №5, рисунок 8б – сети №6.

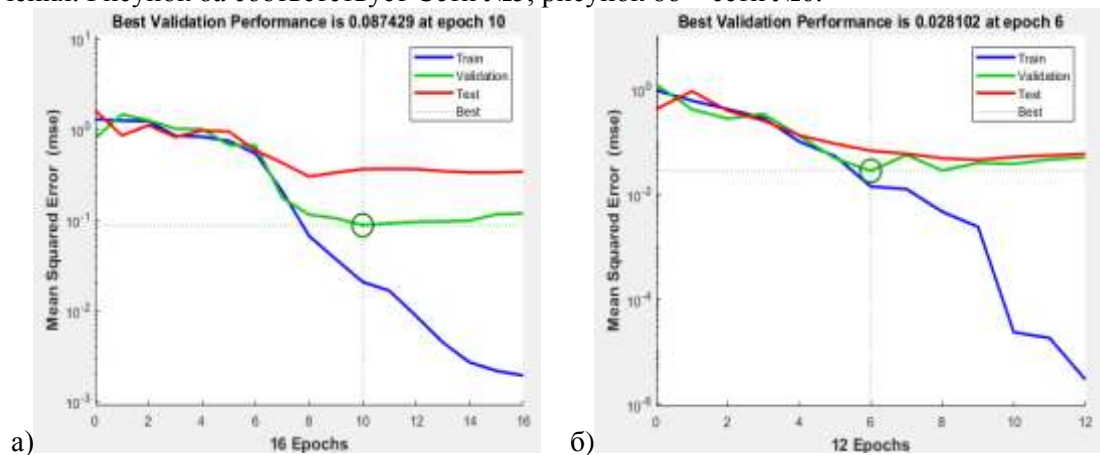


Рисунок 8. Процесс обучения нейронных сетей.

Анализ графиков на рисунке 8 показывает, что обучение также выполняется достаточно быстро. При этом сеть каскадного типа в данном случае обеспечивает меньшую ошибку. Однако ошибки идентификации на тестовой выборке, содержащей по 5 реализаций с каждой парой коэффициентов корреляции, составили: для Сети №4 – 18.38%, для Сети №5 – 6.64%, для Сети №6 – 9.5%. Таким образом, результат работы прямой сети с обратным распространением ошибки оказался в 1.5–3 раза лучше, чем для каскадной сети и сети обобщенной регрессии.

На рисунке 9 представлены зависимости средней ошибки идентификации (в %) на 50 реализациях при разных уровнях шума для $K = 30$. Кривая 1 характеризует работу нейронной Сети №4, кривая 2 – Сети №6 и кривая 3 – Сети №5.

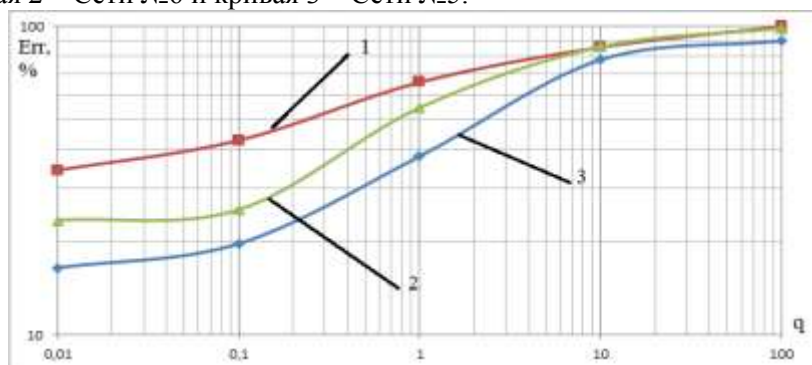


Рисунок 9. Эффективность идентификации параметров СП при различных шумах.

Большие погрешности на графиках рисунка 9, вероятно, связаны с маленьким размером изображений. Также можно сделать вывод, что лучшие результаты показывает прямая сеть с обратным распространением ошибки.

Выполним аналогичное исследование для СП с кратными корнями характеристических уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}
 x_{i,j} &= 2\rho_1 x_{i-1,j} + 2\rho_2 x_{i,j-1} - 4\rho_1\rho_2 x_{i-1,j-1} - \rho_1^2 x_{i-2,j} - \rho_2^2 x_{i,j-2} \\
 &+ 2\rho_1^2\rho_2 x_{i-2,j-1} + 2\rho_1\rho_2^2 x_{i-1,j-2} - \rho_1^2\rho_2^2 x_{i-2,j-2} + \xi_{i,j}, i=1,2,\dots,N_1, j=1,2,\dots,N_2,
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

где ρ_1, ρ_2 – корреляционные параметры модели с кратными корнями характеристических уравнений по строке и по столбцу, $\xi_{i,j}$ – случайная величина, подчиняющаяся гауссовому распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_\xi^2 = \left[\frac{(1-\rho_1^2)^3}{(1+\rho_1^2)} \right] \left[\frac{(1-\rho_2^2)^3}{(1+\rho_2^2)} \right] \sigma_x^2$, σ_x^2 – заданная дисперсия СП, $N_1 \times N_2$ – размеры СП.

На рисунке 10 показаны реализации модели (6) и их КФ для коэффициентов корреляции -0.99, 0 и 0.99 соответственно.

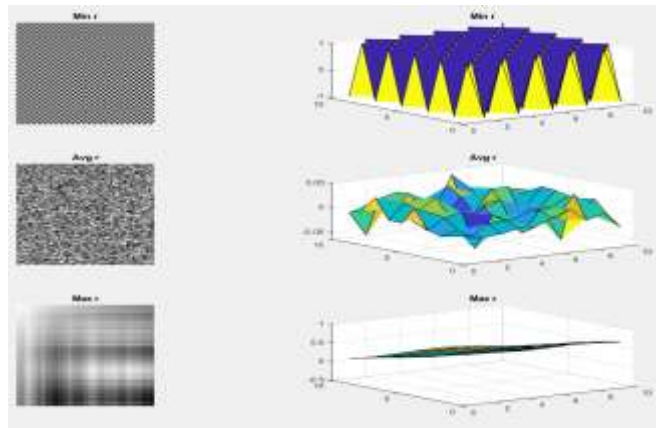


Рисунок 10. Данные, используемые для обучения сети на основе двумерных авторегрессий с кратными корнями.

Для сетей с обратным распространением ошибки на рисунке 11 представлены характеристики обучения. Рисунок 11а соответствует Сети №5, рисунок 11б – сети №6.

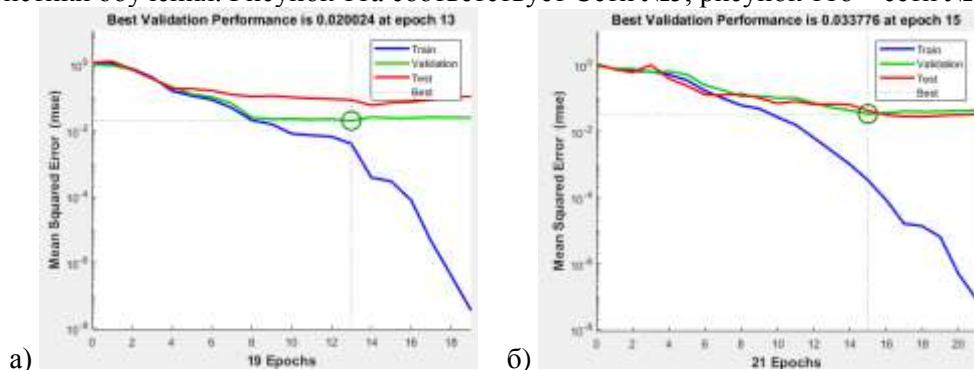


Рисунок 11. Процесс обучения нейронных сетей на двумерных авторегрессиях с кратными корнями.

Анализ графиков на рисунке 11 показывает, что обучение выполняется достаточно быстро. При этом средняя ошибка здесь меньше, чем для модели первого порядка.

Ошибки идентификации на тестовой выборке, содержащей по 5 реализаций с каждой парой коэффициентов корреляции, составили: для Сети №4 – 4.69%, для Сети №5 – 1.94%, для Сети №6 – 3.38%. Таким образом, результат работы прямой сети с обратным распространением ошибки оказался в 1.5–3 раза лучше, чем для каскадной сети и сети обобщенной регрессии.

На рисунке 12 представлены зависимости средней ошибки идентификации (в %) на 50 реализациях при разных уровнях шума для $K = 30$. Кривая 1 характеризует работу нейронной Сети №4, кривая 2 – Сети №6 и кривая 3 – Сети №5.

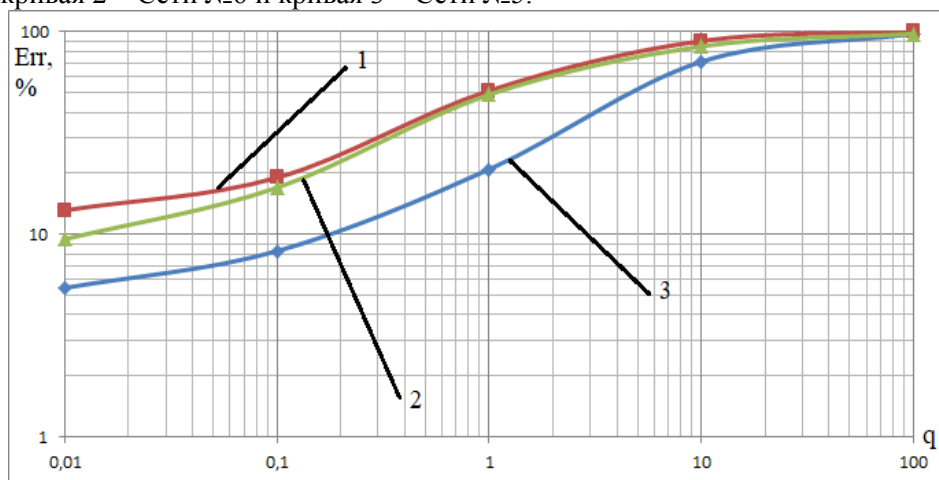


Рисунок 12. Эффективность идентификации параметров СП с кратными корнями при различных шумах.

Таким образом, при небольших шумах нейронные сети достаточно точно (до 80%) справляются с задачей идентификации параметров СП на базе авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений.

4. Идентификация параметров по реальным изображениям

Применим обученные нейронные сети для задачи идентификации параметров реальных изображений. На рисунке 13 представлено 2 реальных изображения, для которых выполнялась оценка.

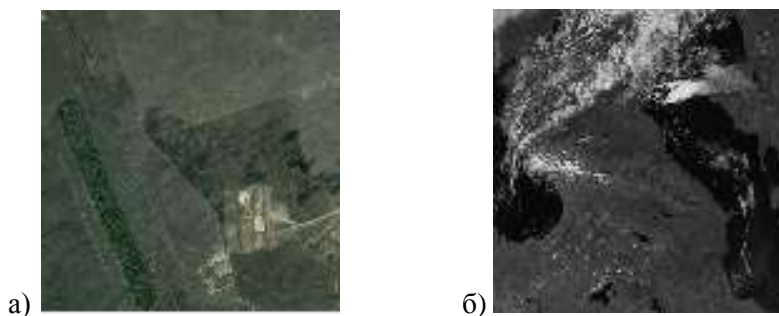


Рисунок 13. Подгоняемые моделями изображения.

В таблице 1 представлены оценки параметров с помощью различных нейронных сетей и напрямую через КФ.

Таблица 1. Оценки параметров реального изображения.

Оценка	Рисунок 13а	Рисунок 13б
Сеть №4 (1 порядок)	[0.86 0.86]	[0.42 0.42]
Сеть №5 (1 порядок)	[0.72 0.78]	[0.72 0.72]
Сеть №6 (1 порядок)	[0.83 0.83]	[0.99 0.69]
Сеть №4 (2 порядок)	[0.54 0.54]	[0.21 0.21]
Сеть №5 (2 порядок)	[0.48 0.49]	[0.43 0.43]
Сеть №6 (2 порядок)	[0.55 0.55]	[0.20 0.49]
КФ (1 порядок)	[0.6845 0.7114]	[0.6542 0.6473]
КФ (2 порядок)	[0.3959 0.4178]	[0.3725 0.3673]

Анализ результатов таблицы 1 показывает, что наибольшую близость к оценкам на основе КФ обеспечивает прямая сеть с обратным распространением ошибки.

5. Заключение

Выполнено обучение нейронных сетей для решения задачи идентификации параметров моделей авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений, используемых для представления изображений. Проведены исследования эффективности идентификации при различных отношениях сигнал/шум. Рассмотрены также алгоритмы идентификации параметров одномерных авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений. Полученные характеристики ошибок идентификации позволяют сделать вывод о том, что прямая нейронная сеть с обратным распространением ошибки достаточно точно позволяет выполнить оценку параметров. Наибольшую близость оценки параметров по реальным изображениям показала также прямая нейронная сеть с обратным распространением ошибки. В среднем выигрыши составляют порядка 1,5 – 3 раз по сравнению с каскадной сетью с обратным распространением ошибки и сетью обобщенной регрессии. Для дальнейшего повышения эффективности в будущем планируется обучение сети при разных корреляционных параметрах по строке и по столбцу, поскольку на реальных изображениях случай одинаковой корреляции встречается редко.

6. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Гранта РФФИ, Проект № 17-01-00179.

7. Литература

- [1] Donahue, J. Long-term recurrent convolutional networks for visual recognition and description / J. Donahue, L. Hendricks, M. Rohrbach, S. Venugopalan, S. Guadarrama, K. Saenko, T. Darrell // Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition, 2015. – P. 2625–2634.
- [2] Kalchbrenner, N. A convolutional neural network for modelling sentences. arXiv e-prints / N. Kalchbrenner, E. Grefenstette, P. Blunsom, 2014 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/1404.2188> (15.11.2019).
- [3] Shaham, T. SinGAN: Learning a Generative Model From a Single Natural Image / T. Shaham, T. Dekel, T. Michaeli, // Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), 2019. – P. 4570-4580.
- [4] Визильтер, Ю.В. Структурно-функциональный анализ и синтез глубоких конволюционных нейронных сетей / Ю.В. Визильтер, В.С. Горбацевич, С.Ю. Желтов // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 5. – С. 886-900. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-886-900.
- [5] Song, X. Unsupervised color texture segmentation based on multi-scale region-level Markov random field models / X. Song, L. Wu, G. Liu // Computer Optics. – 2019. Vol. 43(2). – P. 264-269. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-264-269.
- [6] Azanov, P.T. Development of software system for analysis and optimization of taxi services efficiency by statistical modeling methods / P.T. Azanov, A.N. Danilov, N.A. Andriyanov // CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – Vol. 1904. – P. 232-238. DOI: 10.18287/1613-0073-2017-1904-232-238.
- [7] Andriyanov, N.A. Image Models and Segmentation Algorithms Based on Discrete Doubly Stochastic Autoregressions with Multiple Roots of Characteristic Equations / N.A. Andriyanov, Yu.N. Gavrilina // CEUR Workshop Proceedings. – 2018. – Vol. 2076. – P. 19-29.
- [8] Andriyanov, N.A. Using mathematical modeling of time series for forecasting taxi service orders amount / N.A. Andriyanov, V.A. Sonin // CEUR Workshop Proceedings. – 2018. – Vol. 2258. – P. 462-472
- [9] Andriyanov, N.A. Use autoregressions with multiple roots of the characteristic equations to image representation and filtering / N.A. Andriyanov, K.K. Vasiliev // CEUR Workshop Proceedings. – 2018. – Vol. 2210. – P. 273-281.

- [10] Andriyanov, N.A. Optimal filtering of multidimensional random fields generated by autoregressions with multiple roots of characteristic equations / N.A. Andriyanov, K.K. Vasiliev // CEUR Workshop Proceedings. – 2019. – Vol. 2391. – P. 72-78. DOI: 10.18287/1613-0073-2019-2391-72-78.
- [11] Andriyanov, N.A. Solution for the problem of the parameters identification for autoregressions with multiple roots of characteristic equations / N.A. Andriyanov, M.N. Sluzhivyi // CEUR Workshop Proceedings. – 2019. – Vol. 2391. – P. 79-85. DOI: 10.18287/1613-0073-2019-2391-79-85
- [12] Фурсов, В.А. Построение КИХ-фильтров в заданном параметрическом классе частотных характеристик для коррекции дефокусировки // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 6. – С. 878-886. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-6-878-886.

Using neural networks to identify parameters of autoregressive model with multiple roots of characteristic equations

N.A. Andriyanov^{1,2}

¹JSC "RPC "Istok" named after Shokin", Vokzalnaya street 2a, b.1, Fryazino, Russia, 141190

²Ulyanovsk State Technical University, Severny Venets street 32, Ulyanovsk, Russia, 432027

Abstract. To determine the parameters of autoregressive models with multiple roots of characteristic equations, neural networks were trained. Special cases for first and second order models are considered. Efficiency studies were conducted for neural networks with back propagation of error, cascade type networks and generalized regression networks. The results are compared with an identification algorithm based on correlation functions. The proposed algorithms are implemented both for one-dimensional random sequences based on such models, and for two-dimensional random fields. In addition, the parameters were identified for fitting models to real images.