

# Эффекты Холла высокого порядка в узком фокусе гибридных векторных пучков

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт систем обработки изображений - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН;

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева Samara, Russia  
kotlyar@ipsiras.ru

С.С. Стафеев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт систем обработки изображений - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН;

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева Samara, Russia  
sergey.stafeev@gmail.com

Е.С. Козлова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт систем обработки изображений - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН;

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева Samara, Russia  
kozlova.elena.s@gmail.com

**Аннотация** — В данной работе орбитальные и спиновые эффекты Холла высокого порядка, возникающие в остром фокусе лазерного излучения, теоретически исследуются с помощью формализма Ричардса-Вольфа.

**Ключевые слова** — метод Ричардса-Вольфа, эффект Холла, цилиндрический вихревой пучок, оптический вихрь, спин-орбитальная конверсия, спиновый угловой момент, орбитальный угловой момент

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект Холла в оптике и фотонике известен с 2004 года [1]. В работах [2,3] разработана теория эффекта Холла для света. В [4, 5] эффект Холла в оптике экспериментально обнаружен. Имеются несколько обзоров по эффекту Холла в фотонике [6,7]. В данной работе с помощью метода Ричардса-Вольфа [8] теоретически и численно показано, что в остром фокусе вихревого безвихревого пучка, который представляет собой суперпозицию пучков с азимутальной поляризацией  $l$ -го и нулевого порядков, имеют место спиновый и орбитальный эффекты Холла высокого порядка.

## 2. ТЕОРИЯ

Пусть начальное световое поле имеет вектор Джонса вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= A(\vartheta) \begin{pmatrix} -\sin(l\phi) \\ \cos(l\phi) + i\alpha \end{pmatrix} = \\ &= A(\vartheta) \left[ \begin{pmatrix} -\sin(l\phi) \\ \cos(l\phi) \end{pmatrix} + i\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$\text{Im } \alpha = 0.$

где  $A(\vartheta)$  - произвольная функция описывающая начальную амплитуду с радиальной симметрией,  $(r, \phi)$  - полярные координаты в начальной плоскости,  $\alpha$  - действительное число.

Из (1) видно, что начальное поле является осевой суперпозицией светового поля с азимутальной поляризацией  $l$ -го порядка [9] и линейной поляризацией вдоль оси  $u$ . Далее с помощью формализма Ричардса-Вольфа [8] можно получить проекции векторов напряженности электрического и магнитного полей в остром фокусе апланатической системы для начального поля (1):

$$\begin{cases} E_x = i^{l+1} \{ I_{0,l} \sin(l\phi) + I_{2,l-2} \sin([l-2]\phi) \} + \\ + \alpha I_{2,2} \sin(2\phi), \\ E_y = -i^{l+1} \{ I_{0,l} \cos(l\phi) - I_{2,l-2} \cos([l-2]\phi) \} + \\ + \alpha \{ I_{0,0} - I_{2,2} \cos(2\phi) \}, \\ E_z = -2i^l I_{1,l-1} \sin([l-1]\phi) - 2i\alpha I_{1,1} \sin(\phi), \\ H_x = i^{l+1} \{ I_{0,l} \cos(l\phi) + I_{2,l-2} \cos([l-2]\phi) \} - \\ - \alpha \{ I_{0,0} + I_{2,2} \cos(2\phi) \}, \\ H_y = i^{l+1} \{ I_{0,m} \sin(l\phi) - I_{2,m-2} \sin([l-2]\phi) \} - \\ - \alpha I_{2,2} \sin(2\phi), \\ H_z = -2i^l I_{1,l-1} \cos([l-1]\phi) + 2i\alpha I_{1,1} \cos(\phi). \end{cases} \quad (2)$$

$$I_{\nu,\mu} = \left( \frac{4\pi f}{\lambda} \right)^{\vartheta_0} \int_0^{\vartheta_0} \cos^{3-\nu} \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \sin^{\nu+1} \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \times \\ \times \cos^{1/2}(\vartheta) e^{ikz \cos \vartheta} A(\vartheta) J_{\mu}(x) d\vartheta, \quad (3)$$

где,  $\lambda$  - длина волны,  $f$  - фокусное расстояние,  $\text{NA} = \sin \vartheta_0$  - числовая апертура,  $J_{\mu}(x)$  - функция Бесселя первого рода и  $\mu$ -го порядка,  $x = k_r \sin \vartheta$ ,  $(r, \phi, z)$  - полярные координаты,  $\xi_{\pm} = (1 \pm \delta)/2$ ,  $k$  - волновое число. Вектор плотности спина или вектор спинового углового момента определяется выражением:

$$\mathbf{S} = \frac{\text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E})}{16\pi\omega}, \quad (4)$$

где  $\omega$  - угловая частота. Далее константа  $1/(16\pi\omega)$  была опущена. Из (4) видно, что продольная компонента СУМ (без учета константы) совпадает с ненормированной третьей компонентой вектора Стокса  $s_3$ :

$$s_3 = S_z = 2 \text{Im}(\mathbf{E}_x^* E_y). \quad (5)$$

Найдем осевую проекцию вектора СУМ (5) в фокусе для поля (2), получим:

$$S_z = \begin{cases} 2\alpha(-1)^p \left\{ \sin(l\phi) (I_{0,0}I_{0,l} - I_{2,2}I_{2,l-2}) + \right. \\ \left. + \sin([l-2]\phi) (I_{0,0}I_{2,l-2} - I_{2,2}I_{0,l}) \right\}, \\ l = 2p; \\ 0, \quad l = 2p+1, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

Из (6) видно, что продольная проекция СУМ в фокусе поля (1) отлична от нуля только для четных номеров  $l$ , если действительный параметр  $\alpha$  отличен от нуля. На окружности некоторого радиуса  $r$  с центром на оптической оси выражения в круглых скобках в (6) будут иметь постоянное значение, так как все функции  $I_{\mu,\nu}$  зависят только от радиальной переменной  $r$ . Поэтому при обходе по этой окружности проекция СУМ будет менять знак  $2l$  раз. То есть в плоскости фокуса будут иметь место  $2l$  локальных областей, в которых эллиптическая (или круговая) поляризация меняет направление вращения. В тех областях, где  $S_z > 0$  будет правая круговая поляризация, а там, где  $S_z < 0$  – левая. Таким образом, в фокусе поля (1) при четном  $l$  разделяются области с правой и левой эллиптической или круговой поляризацией, что является проявлением спинового эффекта Холла  $l$ -го порядка.

Покажем далее, что в фокусе поля (1) имеет место также орбитальный эффект Холла  $l$ -го порядка. Для этого с помощью проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей (2) рассчитаем поперечные проекции вектора Пойнтинга:

$$\mathbf{P} = \frac{c \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H})}{2\pi}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – вектора напряженности электрического и магнитного полей,  $*$  – знак комплексного сопряжения,  $\times$  – векторное умножение,  $c$  – скорость света в вакууме. В дальнейшем постоянную  $c/(2\pi)$  будем игнорировать. Подставив (2) в (7), получим поперечные проекции вектора потока энергии:

$$P_x = \begin{cases} 2\alpha(-1)^p \left\{ \cos([l-1]\phi) \times \right. \\ \left. \times (I_{1,1}I_{2,l-2} - I_{0,0}I_{1,l-1}) + \right. \\ \left. + \cos([l+1]\phi) \times \right. \\ \left. \times (I_{2,2}I_{1,l-1} - I_{1,1}I_{0,l}) \right\}, \quad l = 2p; \\ 0, \quad l = 2p+1, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (8)$$

$$P_y = \begin{cases} 2\alpha(-1)^p \left[ -\sin([l-1]\phi) \times \right. \\ \left. \times (I_{1,1}I_{2,l-2} - I_{0,0}I_{1,l-1}) + \right. \\ \left. + \sin([l+1]\phi) \times \right. \\ \left. \times (I_{2,2}I_{1,l-1} - I_{1,1}I_{0,l}) \right], \quad l = 2p, \\ 0, \quad l = 2p+1, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Из (8) следует, что при обходе по окружности некоторого радиуса с центром на оптической оси, когда выражения в круглых скобках постоянные, обе проекции вектора Пойнтинга меняют знак  $2(l+1)$  раза. Это означает, что в фокусе на определенной окружности с центром на оптической оси будут лежать центры  $2l$  локальных субволновых областей, в которых поперечный поток энергии будет вращаться по

замкнутой траектории. Причем в соседних областях вращение будет направлено в разные стороны (по часовой и против часовой стрелки). Таким образом, мы показали, что при острой фокусировке начального поля (1) в плоскости фокуса разделяются поперечные потоки энергии, вращающиеся в разные стороны. То есть имеет место орбитальный эффект Холла  $2l$ -го порядка.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе методом Ричардса-Вольфа, описывающим поведение электромагнитного излучения в остром фокусе, показано, что в плоскости фокуса имеет место спиновый и орбитальный эффекты Холла высокого порядка. Показано, что при острой фокусировке суперпозиции цилиндрического векторного пучка  $l$ -го порядка и нулевого порядка в плоскости острого фокуса формируются  $2l$  субволновых областей, у которых в соседних областях направление продольной проекции орбитального углового момента (ОУМ) противоположное. То есть фотоны, попадающие в соседние области в фокусе, имеют осевую проекцию ОУМ разного знака – это орбитальный эффект Холла  $2l$ -го порядка.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа частично финансировалась Российским научным фондом по гранту № 22-12-00137 (в части «Теория»), а также Минобрнауки России в рамках государственного контракта с НИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН по договору 007-ГЗ/Ч3363/26 (в части «Введение»).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Onoda, M. Hall effect of light / M. Onoda, S. Marakami, N. Nagaosa // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 93. – P. 083901.
- [2] Bliokh, K.Y. Topological spin transport of photons: The optical Magnus effect and Berry phase / K.Y. Bliokh, Y.P. Bliokh // Phys. Lett. A. – 2004. – Vol. 333(3–4). – P. 181–186.
- [3] Bliokh, K.Y. Conservation of angular momentum, transverse shift, and spin Hall effect in reflection and refraction of an electromagnetic wave packet / K.Y. Bliokh, Y.P. Bliokh // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 96. – P. 073903.
- [4] Kavokin, A. Optical spin Hall effect / A. Kavokin, G. Malpuech, M. Glazov // Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 95. – P. 136601.
- [5] Hosten, O. Observation of the spin Hall effect of light via weak measurements / O. Hosten, P. Kwiat // Science. – 2008. – Vol. 319(5864). – P. 787–790.
- [6] Ling, X. Recent advances in the spin Hall effect of light / X. Ling, X. Zhou, K. Huang, Y. Liu, C. Qiu, H. Luo, S. Wen // Rep. Prog. Phys. – 2017. – Vol. 80(6). – P. 066401.
- [7] Liu, S. Photonics spin Hall effect: Fundamentals and emergent applications / S. Liu, S. Chen, S. Wen, H. Luo // Opto-Electr. Sci. – 2022. – Vol. 1(7). – P. 220007.
- [8] Richards, B. Electromagnetic Diffraction in Optical Systems. II. Structure of the Image Field in an Aplanatic System / E. Wolf // Proc. R. Soc. A. Math. Phys. Eng. Sci. – 1959. – Vol. 253(1274). – P. 358–379.
- [9] Kotlyar, V.V. Tightly focusing vector beams containing V-point polarization singularities / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, S.S. Stafeev, A.G. Nalimov, S. Rasouli // Opt. Laser Technol. – 2022. – Vol. 145. – P. 107479.