Частные свойства обобщённых и дробных параболических пучков

А.В. Устинов[1]

[1]Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

Аннотация. Ранее мы ввели в рассмотрение обобщённые и дробные параболические пучки, и дали описание их основных свойств. Данный же доклад посвящён именно рассмотрению не упомянутых частных свойств этого класса пучков, и их теоретическому доказательству. Здесь подробно рассмотрены дополнительные свойства, имеющие место при нулевом значении одного из параметров. Мы доказали, что для целого и полуцелого индекса проявляется поворотная симметрия распределения интенсивности порядка, зависящего от значения индекса. Для лучшего визуального наблюдения поворотной симметрии предложено выполнить коррекцию углового спектра во входной плоскости. Также было доказано, что для остальных значений индекса симметрия не вполне строгая, и происходит дополнительный поворот картины на определённый угол, величина которого зависит от индекса и расстояния от центра картины. Теоретические выводы хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

1. Введение

Бездифракционные пучки привлекают большое внимание в связи с обладанием особыми свойствами [1]: 1) сохранение амплитудного и фазового (с точностью до набега) распределения при распространении, то есть отсутствие дифракционного расплывания; 2) высокая концентрация энергии в центральной части; 3) быстрое восстановление пучка после прохождения им препятствия, соизмеримого с шириной пучка. Благодаря этим свойствам такие пучки эффективно используются в различных приложениях.

Самыми известными среди бездифракционных пучков являются моды Бесселя – решения уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координатах [2-4]. Их аналогами являются пучки Матьё в эллиптической системе [5, 6], параболические пучки – в параболической системе [7, 8], а также обобщающее семейство – пучки Гельмгольца-Гаусса [9, 10].

Теоретически бездифракционные пучки имеют бесконечную протяжённость и энергию. Однако физически реализуемы только апертурно-ограниченные аппроксимации [11-15], которые, тем не менее, обладают перечисленными выше свойствами на большом промежутке распространения (пропорциональном размеру ограничивающей апертуры).

Сосредоточенность пространственного спектра на кольце используется для формирования произвольных бездифракционных пучков, не имеющих аналитического вида [16-19]. Однако пучки, имеющие аналитическое представление в объектной или спектральной области, представляют особый интерес. В этом случае не только упрощается их физическая реализация и имеется возможность параметрического управления распределением амплитуды, но также

можно теоретически проанализировать свойства пучков. Например, в работе [7] было показано, что параболические пучки представляют собой полный ортогональный набор решений уравнения Гельмгольца. При этом ортогональность обеспечивается по непрерывному параметру *a*.

В работе [20] было рассмотрено обобщение стандартных параболических пучков, имеющих один непрерывный параметр *a*, на основе внесения в пространственный спектр пучка еще одного параметра *m*, имеющего целые значения. Физически он равен числу повторений структуры углового спектра на окружности в пространстве частот. При этом появляются определённые свойства симметрии пучков, связанные с целым индексом m. Также в [20] было показано, что такое семейство пучков сохраняет ортогональные свойства по непрерывному параметру *a* при фиксированном значении целого индекса *m*.

В работе [21] сделан следующий шаг по обобщению параболических пучков, а именно, рассмотрены дробные двухпараметрические параболические пучки, когда оба параметра могут принимать произвольные действительные значения. В этом случае существенно увеличивается разнообразие формируемых картин, особенно при ненулевом значении первого параметра.

Однако в обеих статьях, описывающих обобщения параболических пучков, ряд *визуально наблюдаемых* характеристик картин распределения амплитуды или упомянуты без доказательства (свойства симметрии), или не упомянуты совсем. Данный доклад посвящён именно рассмотрению этих частных свойств обобщённых параболических пучков.

2. Определение обобщённых параболических пучков

Произвольные бездифракционные пучки описываются следующим выражением:

$$U(x,y,z)=\exp(-ik_z z)\int_{-\pi}^{\pi} A(\varphi)\exp\left[-ik_t\left(x\cos\varphi+y\sin\varphi\right)\right]d\varphi, , \qquad (1)$$

где $A(\varphi)$ - угловой спектр, k_t – радиус узкого кольца в пространстве частот, $k_z=\sqrt{k^2-k_t^2}$, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, а λ – длина волны.

Стандартные параболические бездифракционные пучки имеют угловой спектр в виде следующей функции [7]:

$$A(\varphi;a)=\frac{1}{2\left(\pi\left|\sin\varphi\right|\right)^{1/2}}\exp\left(ia\ln\left|tg\frac{\varphi}{2}\right|\right), \qquad (2)$$

где непрерывный параметр *a* может рассматриваться как порядок пучка.

В работе [20] пространственный спектр (2) был обобщён на основе введении ещё одного порядка *m*:

$$A_m(\varphi;a)=\frac{1}{2}\left(\pi\left|\sin(m\varphi)\right|\right)^{-1/2}\exp\left[ia\ln\left|tg\left(\frac{m\varphi}{2}\right)\right|\right], \qquad (3)$$

где *m* – целое число.

Возможны дальнейшие видоизменения формы углового спектра при сохранении его общей структуры. Например, в формуле (3) значения индекса *m* под знаком синуса и под знаком тангенса можно сделать различными или/и отказаться от целости числа *m*. В этом случае получаем наиболее общее трёхпараметрическое видоизменение пространственного спектра (3):

$$A_{pq}(\varphi;a)=\frac{1}{2}\left(\pi\left|\sin(p\varphi)\right|\right)^{-1/2}\exp\left[ia\ln\left|tg\left(\frac{q\varphi}{2}\right)\right|\right], \qquad (4)$$

где *a, p, q* – действительные.

В статье [21] было *сохранено равенство* индексов под знаками синуса и тангенса (*q=p*), но сам индекс считается произвольным положительным числом *m=p*.

3. Вид амплитуды обобщённых параболических пучков и их свойства при целом значении порядка *p*

При целых значениях параметра *p* имеется явное разложение спектра (4) в ряд Фурье (считается, что *q=p*).

$$A(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{l=1}^{\infty}\left(a_l\cos\frac{2\pi l}{T}\varphi+b_l\sin\frac{2\pi l}{T}\varphi\right). \qquad (5)$$

Период T равен π/p при a=0 и $2\pi/p$ при $a\neq0$. При a=0 коэффициенты b_l равны нулю, а коэффициенты a_l не зависят от p и вычисляются по формуле:

$$a_l=\frac{(-1)^l\sqrt{2}}{\Gamma(3/4+l)\cdot\Gamma(3/4-l)}, \qquad (6)$$

Можно показать, что эти коэффициенты положительны и монотонно убывают. Разложению спектра (5) соответствует амплитуда пучка

$$U_{p,0}(\rho,\theta,z)=\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\left\{a_0\pi J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda f}R\rho\right)+2\pi\sum_{l=1}^{\infty}a_l(-i)^{2pl}\cos(2pl\theta)J_{2pl}\left(\frac{2\pi}{\lambda f}R\rho\right)\right\}, \qquad (7)$$

(При переходе от (1) использованы соотношения для проекций волнового вектора, верные в параксиальном случае: $k_z=\frac{2\pi}{\lambda}$; $k_t=\frac{2\pi}{\lambda f}R$.) Выражение в скобках *действительное* при любом p, то есть, фаза таких пучков будет бинарной.

Далее в тексте везде считается a=0, так как при $a\neq0$ явное аналитическое выражение для коэффициентов отсутствует, поэтому нельзя дать теоретического описания свойств пучка.

Подробное описание данного типа пучков было произведено в работе [20], но там свойства симметрии распределения интенсивности только констатировались на основе визуальной оценки.

Формула (7) позволяет представить структуру поля и показывает, что основной вклад в амплитуду вносят два первых слагаемых: радиально-симметричное и имеющее поворотную симметрию порядка 2p. Используя (6) и свойства гамма-функции, можно показать, что $a_0/a_1=3$; кроме того, функция $J_0()$ при малом аргументе принимает бóльшие значения, чем $J_{2p}()$. Поэтому для лучшего визуального наблюдения поворотной симметрии можно вычесть из функции пространственного спектра константу, соответствующую a_0 – в этом случае в пучке (7) удаляется вклад функции Бесселя нулевого порядка. Иллюстрации приведены в Таблице 1.

Правда, увеличение чёткости наблюдения симметрии порядка 2p может и не произойти (см. в Таблице 1 p=3). Чтобы показать это, запишем (7) в условном виде $c_0+c_1\cos2p\theta+c_2\cos4p\theta+\ldots$. Так как все слагаемые действительны, то квадрат модуля равен просто квадрату:

$$\begin{aligned}&\left(c_0+c_1\cos2p\theta+c_2\cos4p\theta+\ldots\right)^2=\\&=\left(c_0^2+c_1^2\cos^2 2p\theta+c_2^2\cos^2 4p\theta+\ldots\right)+\left(2c_0c_1\cos2p\theta+2c_0c_2\cos4p\theta+2c_1c_2\cos2p\theta\cos4p\theta+\ldots\right)\end{aligned} \qquad (8)$$

Наибольшее слагаемое, зависящее от угла θ, – $2c_0c_1\cos2p\theta$, имеющее симметрию порядка 2p. Однако, если мы сделаем $a_0=0$, что влечёт $c_0=0$, то кроме константы исчезнет и это слагаемое, а наибольшим станет $c_1^2\cos^2 2p\theta$, имеющее симметрию порядка 4p. Симметрия порядка 2p всё же будет наблюдаться: за счёт формулы $2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$ слагаемые, содержащие $\cos2p\theta$, будут появляться из перекрёстных членов, соответствующих соседним слагаемым исходной суммы.

Примеры: $2c_1c_2\cos2p\theta\cos4p\theta=c_1c_2\left(\cos6p\theta+\cos2p\theta\right)$; $2c_2c_3\cos4p\theta\cos6p\theta=c_2c_3\left(\cos10p\theta+\cos2p\theta\right)$.

4. Вид амплитуды обобщённых параболических пучков и их свойства при дробном значении порядка *p*

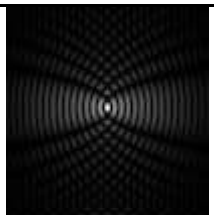
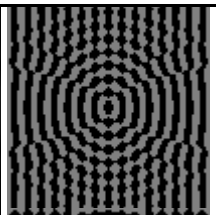
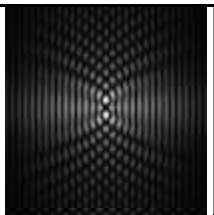
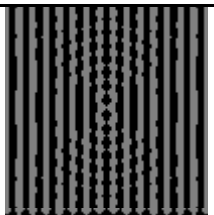
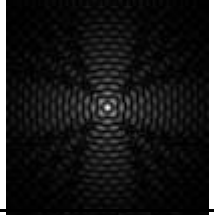
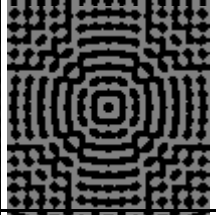
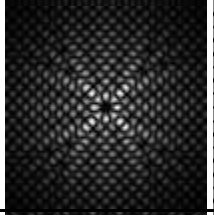
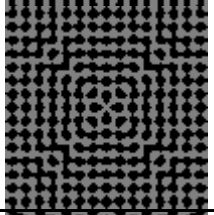
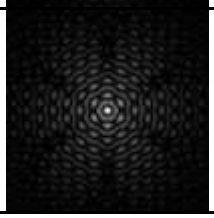
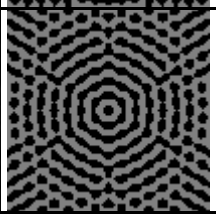
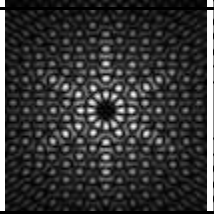
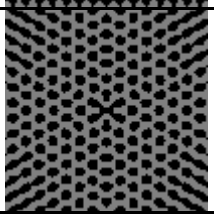
Подробно вопрос о вычислении амплитуды пучка в этом случае обсуждался в работе [21], здесь лишь более подробно рассмотрим некоторые свойства картин интенсивности. В этом параграфе будем считать, что a=0.

Полуцелые значения параметра p.

Можно показать, что при полуцелом p сохраняют силу формулы (6), (7), полученные для целого p. Однако утверждение о том, что выражение в скобках (7) является действительным,

перестаёт быть верным. В сумме чередуются действительные и мнимые слагаемые, соответственно фаза не будет бинарной. Иллюстрации приведены в Таблице 2.

Таблица 1. Обобщённые параболические пучки при *a*=0 и целых *p* (показана амплитуда и фаза).

	Вид пучка для спектра (4)		Вид пучка для спектра (4) с вычетом нулевого коэффициента b_0	
p=1				
p=2				
p=3				

Рассмотрим, какая будет наблюдаться симметрия. Будем рассуждать, как в предыдущем параграфе. Взяв квадрат модуля суммы, имеем равенство

$$\begin{aligned}&\left|c_0+ic_1\cos 2p\theta+c_2\cos 4p\theta+\ldots\right|^2=\left(c_0+c_2\cos 4p\theta+\ldots\right)^2+\left(c_1\cos 2p\theta+c_3\cos 6p\theta+\ldots\right)^2=\\&=\left(c_0^2+c_1^2\cos^2 2p\theta+c_2^2\cos^2 4p\theta+\ldots\right)+\left(2c_0c_2\cos 4p\theta+2c_1c_3\cos 2p\theta\cos 6p\theta+\ldots\right)\end{aligned}, \qquad (9)$$

Наибольшими непостоянными слагаемыми будут $c_1^2\cos^2 2p\theta$ и $2c_0c_2\cos 4p\theta$. Оба дают симметрию порядка 4*p*, причём *здесь* вычитание константы, соответствующей свободному члену a_0, *улучшает* визуальное наблюдение этой симметрии. Перекрёстные члены не дадут слагаемых с меньшим порядком симметрии, так как разность аргументов косинуса в сомножителях не меньше, чем $4p\theta$. Таким образом, как и при целом *p*, симметрия нечётного порядка не наблюдается.

Произвольные дробные значения параметра p.

Когда *p* не является ни целым, ни полуцелым числом, то появляются существенные отличия. Они подробно описаны в [21]. Здесь же упомянем только о том, что период *T* в (5) равен 2π независимо от *p*, и коэффициенты b_l в (5) не равны нулю. Вместо (7) имеем следующее выражение для амплитуды пучка

$$U_{p,0}(\rho,\theta,z)=\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\left\{a_0\pi J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda f}R\rho\right)+2\pi\sum_{l=1}^{\infty}(-i)^l\left(a_l\cos(l\theta)+b_l\sin(l\theta)\right)J_l\left(\frac{2\pi}{\lambda f}R\rho\right)\right\}, \qquad (10)$$

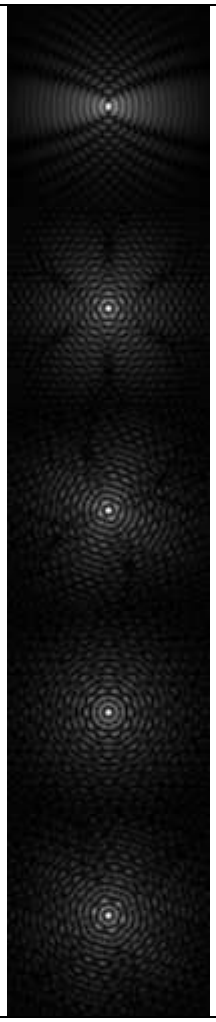
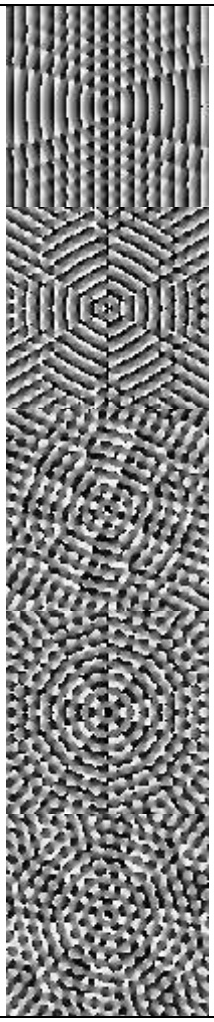
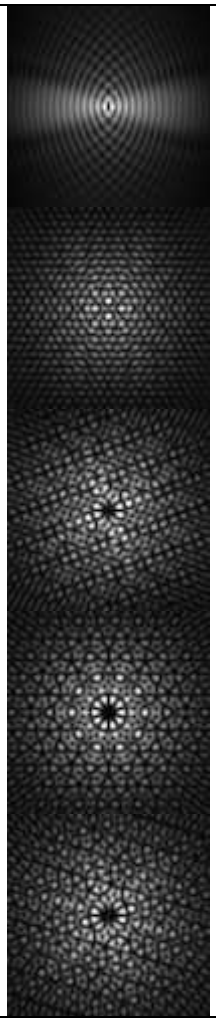
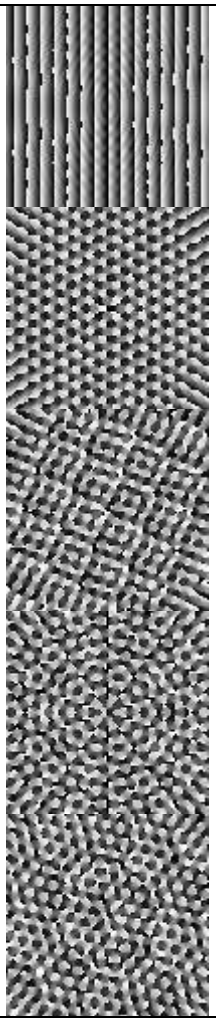
На основе этого выражения можно сделать несколько заключений.

1) Выражение в фигурных скобках в (10) *не будет действительным*, поэтому фаза пучка не будет бинарной.

2) Если при целом и полуцелом *p* имелись функции Бесселя с номерами, кратными 2*p*, то здесь будут функции Бесселя со всеми номерами и слагаемые с угловой симметрией всех порядков.

3) Тем не менее, превалирующим будет коэффициент с номером, ближайшим к 2*p*, поэтому визуально картина будет казаться имеющей именно этот порядок симметрии, но с некоторыми искажениями. Строго говоря, это искажение наблюдалось и при целом *p*.

Таблица 2. Обобщённые параболические пучки при *a*=0 и дробных *p* (показана амплитуда и фаза).

	Вид пучка для спектра (4)	Вид пучка для спектра (4) с вычетом нулевого коэффициента b_0
p=0.5	 	 
p=1.5		
p=2.25		
p=2.5		
p=2.75		

В случае двух равноудалённых от 2*p* номеров, визуально наблюдается симметрия только одного из них, который чётный. Например, при *p*=9/4 (2*p*=4.5) наблюдается симметрия порядка 4, а не 5; а при *p*=11/4 (2*p*=5.5) наблюдается симметрия порядка 6, а не 5.

4) Модули коэффициентов, так же как и при целых/полуцелых *p* при больших *l* убывают как $1/\sqrt{l}$ (согласно равенству Парсеваля), но не обязательно монотонно.

5) Так как $b_l \neq 0$, то в формуле (10) имеются слагаемые не только с $\cos(l\theta)$, но и с $\sin(l\theta)$. Поэтому произойдёт поворот по отношению к расположению того же порядка симметрии при целом *p* на некоторый угол, который можно вычислить путём приведения комбинации косинуса и синуса к косинусу со сдвигом фазы, и он равен

$$\theta_l = \frac{1}{l} arctg\left(\frac{b_l}{a_l}\right), \qquad (11)$$

То есть картина поворачивается не как единое целое: каждая составляющая поворачивается на свой угол.

Можно предположить, что наибольший поворот при одинаковом номере наибольшего коэффициента будет, когда $\{2p\}=1/2$ – наибольшее удаление 2*p* от целого числа, так как при этом будет наибольшее значение b_l. В этом случае $l=2p\pm 1/2$ и наибольший угол поворота равен

$$\max\theta_l=\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8p}\right), \tag{12}$$

Так как угол поворота при симметрии порядка *l* равен 360°/*l*, то относительный дополнительный поворот не зависит от *l*, а абсолютный (видимый на картинке) угол поворота будет наибольшим при *p*=5/4 (2*p*=5/2), когда имеется симметрия порядка 2 и $\theta_l=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=45^\circ-9^\circ=36^\circ$. А для *p*=9/4 (2*p*=9/2) (см. соответствующую строку в Таблице 2) имеется симметрия порядка 4 и $\theta_l=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{18}\right)=22.5^\circ-2.5^\circ=20^\circ$. (Рассуждения о дополнительном повороте *гарантированно* верны при *p*>1/2.)

5. Заключение

Ранее мы ввели в рассмотрение новый класс бездифракционных пучков, а именно обобщили уже известные параболические пучки, порядок которых – непрерывный параметр *a*. Мы видоизменили форму углового спектра, добавив новый параметр – целый индекс *m*. Позднее мы сделали ещё один шаг – рассмотрели двухпараметрические параболические бездифракционные пучки, в которых индекс может принимать произвольные положительные значения *p*.

В данном докладе подробно рассмотрено несколько дополнительных свойств таких пучков, проявляющихся при нулевом значении параметра *a*. Доказан вид поворотной симметрии распределения интенсивности для случая целого и полуцелого индекса. Выяснилось, что поворотная симметрия нечётного порядка не имеет места. В остальных случаях симметрия не вполне строгая, кроме того, происходит дополнительный поворот картины на определённый угол, для величины которого приведено аналитическое выражение. Для лучшего визуального наблюдения поворотной симметрии предложено выполнить коррекцию углового спектра во входной плоскости, которая позволяет нивелировать влияние радиально-симметричной составляющей пучка.

Результаты численного моделирования (и ранее полученные экспериментальные результаты) согласуются с теоретическими предсказаниями.

6. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства научных организаций (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) и гранта РФФИ № 18-29-20045-мк.

7. Литература

[1] McGloin, D. Bessel beams: diffraction in a new light / D. McGloin, K. Dholakia // Contemporary Physics. – 2005. – Vol. 42(1). – P. 15-28.
[2] Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory // J. Opt. Soc. Am. A. – 1987. – Vol. 4. – P. 651-654.
[3] Durnin, J. Diffraction-free Beams / J. Durnin, J.J.J. Miceli, J.H. Eberly // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58. – P. 1499-1501.
[4] Ziolkowski, R.W. Aperture realizations of exact solutions to homogeneous wave equations / R.W. Ziolkowski, I.M. Besieris, A.M. Shaarawi // J. Opt. Soc. Am. A. – 1993. – Vol. 10(1). – P. 75-87.

[5] Gutierrez-Vega, J.C. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams / J.C. Gutierrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chavez-Cerda // Opt. Lett. – 2000. – Vol. 25(20). – P. 1493-1495.
[6] Gutierrez-Vega, J.C. Experimental demonstration of optical Mathieu beams / J.C. Gutierrez Vega, M.D. Iturbe-Castillo, E. Tepichin, R.M. Rodriguez-Dagnino, S. Chavez Cerda, G.H.C. New // Opt. Commun. – 2001. – Vol. 195. – P. 35-40.
[7] Bandres, M.A. Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cerda // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29. – P. 44-46.
[8] Lopez-Mariscal, C. Observation of parabolic nondiffracting optical fields / C. Lopez-Mariscal, M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cerda // Opt. Express – 2005. – Vol. 13(7). – P. 2364-2369.
[9] Gutierrez-Vega, J.C. Helmholtz–Gauss waves / J.C. Gutierrez-Vega, M.A. Bandres // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol. 22. – P. 289-298.
[10] Lopez-Mariscal, C. Observation of the experimental propagation properties of Helmholtz-Gauss beams / C. Lopez-Mariscal, M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Opt. Eng. – 2006. – Vol. 45. – P. 068001.
[11] Turunen, J. Holographic generation of diffraction-free beams / J. Turunen, A. Vasara, A.T. Friberg // Appl. Opt. – 1988. – Vol. 27. – P. 3959-3962.
[12] Kotlyar, V.V. Calculation of phase formers of non-diffracting images and a set of concentric rings / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Optik. – 1996. – Vol. 102(2). – P. 45-50.
[13] Khonina, S.N. Generating a couple of rotating nondiffracting beams using a binary-phase DOE / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, J. Lautanen, M. Honkanen, J. Turunen // Optik. – 1999. – Vol. 110(3). – P. 137-144.
[14] Chattrapiban, N. Generation of nondiffracting Bessel beams by use of a spatial light modulator / N. Chattrapiban, E.A. Rogers, D. Cofield, W.T. Hill, R. Roy // Optics Letters. – 2003. – Vol. 28(22). – P. 2183-2185.
[15] Alvarez-Elizondo, M.B. Generation of Mathieu-Gauss modes with an axicon-based laser resonator / M.B. Alvarez-Elizondo, R. Rodriguez-Masegosa, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2008. – Vol.16(23). – P. 18770-18775.
[16] Courtial, J. Iterative algorithms for holographic shaping of non-diffracting and self-imaging light beams / J. Courtial, G. Whyte, Z. Bouchal, J. Wagner // Opt. Express. – 2006. – Vol. 14. – P. 2108-2116.
[17] Anguiano-Morales, M. Different field distributions obtained with an axicon and an amplitude mask / M. Anguiano-Morales, A. Martinez, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chavez-Cerda // Optics Communications. – 2008. – Vol. 281. – P. 401-407.
[18] Хонина, С.Н. Простой способ эффективного формирования различных бездифракционных лазерных пучков // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 1. – С. 70-78.
[19] Lopez-Aguayo, S. Method to Generate Complex Quasinondiffracting Optical Lattices / S. Lopez-Aguayo, Y.V. Kartashov, V.A. Vysloukh, L. Torner // Physical Review Letters. – 2010. – Vol.105. – P. 013902.
[20] Khonina, S.N. Generalized parabolic nondiffracting beams of two orders / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, S. Chávez-Cerda // Journal of the Optical Society of America A. – 2018. – Vol. 35(9). – P. 1511-1517.
[21] Khonina, S.N. Fractional two-parameter parabolic diffraction-free beams / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, A.P. Porfirev // Optics Communications. – 2019. – Vol. 450. – P. 103-111.

Peculiarities of the generalized and fractional parabolic beams

A.V. Ustinov[1]

[1]Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

Abstract. Earlier, we introduced generalized and fractional parabolic beams, and gave a description of their basic properties. This report is devoted to the consideration of not mentioned particular properties of this class of beams, and their theoretical proof. Additional properties that occur when one of the parameters is set to zero are discussed in detail here. We proved that for an integer and a half-integer index, the rotational symmetry of the intensity distribution of the order depending on the index value is manifested. For better visual observation of the rotational symmetry, it is proposed to perform a correction of the angular spectrum in the input plane. It was also proved that for the other values of the index symmetry is not quite strict, and there is an additional rotation of the picture at a certain angle. The value of the angle depends on the index and the distance from the center of the picture. The theoretical conclusions are in good agreement with the results of numerical modeling.