5. А л ь ф о р с Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М., " Мир", 1969.
6. Ш а ф е ё в М.Н. О методе вырожденных гипергеометрических преобразований. Материалы научно-технической конференции, КУАИ, 1972.
7. Ш а ф е е в М.Н. Автореферат докторской диссертации. Минск, 1974.
8. Reports BA Committee for the Calculation of Mathematical Tables, Lond, 1926.
9. С л е т е р Л. Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1966.
10. К у р а н т Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. т.II, М.-Л., Гостехиздат, 1951.

В.Я.ДАВЫДОВ, Г.В.ФИЛИППОВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

Если на тело, перемещающееся в вязкой среде на заданное расстояние z_K за определенное время τ_K, действует центральная сила, уменьшающаяся пропорционально квадрату расстояния $P = \frac{P_0}{z^2}$, то, имея в виду инерционные свойства перемещаемого объекта, можно сформулировать следующую вариационную задачу при квадратичном законе сопротивления: найти управление P_0, дающее минимум функционалу

$$A = \int_0^{\tau_K} P_0 \, d\tau ,$$

если фазовые координаты V и z удовлетворяют уравнениям связи

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{P_0}{z^2} - V^2 ; \quad \frac{dz}{d\tau} = aV \qquad (1)$$

и граничным условиям

$$\tau = 0 : \ V = 0, \ z = 1; \quad \tau = \tau_K : \ V \geqslant V_K , \ z = z_K .$$

На управление наложено ограничение

$$0 \leqslant P_0 \leqslant 1,$$

V - скорость движения тела, a - константа.

Воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина [1]. Запишем функцию Гамильтона

$$H = -P_0 + \psi_z aV + \psi_V \left(\frac{P_0}{z^2} - V^2 \right).$$

Система дифференциальных уравнений для вспомогательных функций имеет вид

$$\dot{\psi}_z = 2P_0 \frac{\psi_v}{z^3}\ ; \quad \dot{\psi}_v = -a\psi_z + 2V\psi_v \qquad (2)$$

Функция переключений определяется уравнением

$$M = \frac{\psi_v}{z^2} - 1$$

откуда возможны три дуги:

$$P_0 = \begin{cases} 0 & (\psi_v < z^2) \\ 1 & (\psi_v > z^2) \\ var & (\psi_v = 1) \end{cases}$$

Исследуем особый режим. Из (2_2) при $\psi_v = z^2$ получим

$$\psi_z = 2V\left(\frac{z^2}{a} - z\right).$$

Дифференцируя (3) по времени и сравнивая результат с (2_1), найдем управление при особом режиме

$$P_0 = V^2 z^2 \left[1 - \frac{a(a-z)}{z(2a-z)}\right]. \qquad (4)$$

Уравнения связи (I) в этом случае интегрируются в конечном виде. Разделим (1_1) на (1_2)

$$\frac{dV}{dz} = \frac{1}{aV}\left(\frac{P_0}{z^2} - V^2\right). \qquad (5)$$

После подстановки (4) переменные в (5) разделяются

$$\frac{dV}{V} = \frac{a-z}{z(z-2a)}\,dz$$

и квадратура берется

$$V = V_K\left[\frac{z_K(z_K-2a)}{z(z-2a)}\right]^{0,5} \qquad (6)$$

Кривая, описываемая уравнением (6), не проходит через начальную точку ($V=0$, $z=1$), следовательно, первой дугой оптимального режима может быть только дуга "максимальной тяги". Существование двух других дуг устанавливается путем наложения траекторий $V(z)$ для особого режима и режима P_0 =I. Если они не пересекаются, т.е. траектория при особом управлении располагается выше траектории при $P_0 = 1$, то граничные условия могут удовлетвориться только на последнем режиме. Задача вырождается. В случае пересечения траекторий последовательность дуг оптимального режима следующая:

$$P_0 = 1 \rightarrow P_0 = var \rightarrow P_0 = 0.$$

В частных случаях дуга нулевой тяги может располагаться между дугами P_0 =I и P_0 = var, либо вообще отсутствовать. Заметим, что условие Келли-Брайсона

$$\frac{\partial}{\partial P_0}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial P_0}\right) - \frac{2}{z^3}(z-2a) \geqslant 0$$

удовлетворяется при $z \geqslant 2a$, т.е. как видно из (6), во всей области существования особого управления. Следовательно, особое управление является оптимальным.

Литература

I. Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М., "Машиностроение", 1969.

В.М.БУЛАТОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОУДАРЕНИЯ ЖИДКИХ ПАР

Одним из вопросов, который необходимо решать при исследовании процесса взаимодействия капли с жидкой полубесконечной мишенью, является вопрос о возможности физического моделирования соударения жидких пар.

Уравнения движения и неразрывности жидкости при соударении сферической капли с жидкой полубесконечной мишенью имеют вид [I]:

$$\frac{\partial \bar{v}_{1i}}{\partial \tau} + (\bar{v}_{1i}\, grad)\, \bar{v}_{1i} = -\frac{1}{\rho_{1i}}\, grad(p_{1i} + \rho_{1i} g z_{1i}); \quad div\, \bar{v}_{1i} = 0,$$

где i = I,2 - индекс, присваемый соответственно капле или мишени; v_{1i} - скорость; ρ_{1i} - плотность; p_{1i} - давление; z_{1i} - вертикальная координата; g - ускорение свободного падения; τ - время. Аналогичная система уравнений запишется для соударяющихся жидких пар моделируемого процесса.

Приведем дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия к безразмерному виду с помощью следующих масштабных преобразований: V_0 - скорость соударения, d - диаметр капли, τ_0 - время образования кратера, $\rho_2 g d$ - характерное давление (прописными буквами обозначим соответствующие безразмерные масштабы).

Уравнение неразрывности в безразмерной форме не дает дополнительных условий подобия, поэтому в дальнейшем оно не рассматривается.

Уравнения движения при соударении жидкой пары в безразмерной форме примут вид:

внутри капли

$$\frac{d}{V_0 \tau_0}\, \frac{\partial \bar{V}_{11}}{\partial T} + (\bar{V}_{11}\, grad)\, \bar{V}_{11} = -\frac{\rho_{12}\, g\, d_1}{\rho_{11} V_0^2}\, grad\left(P_{11} + \frac{\rho_{11}}{\rho_{12}} Z_{11}\right); \qquad (I)$$

в полубесконечной мишени