

В.М.ГОЛОВИН, Ю.Л.ФАЙНИЦКИЙ

О НОВОМ ПРОФИЛЕ СКОРОСТЕЙ И ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ  
ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ  
В ГИДРАВЛИЧЕСКИ ГЛАДКИХ ТРУБАХ

Принятые обозначения

- $v$  - скорость жидкости  
 $V$  - максимальная скорость на оси трубы  
 $W$  - средняя по объемному расходу скорость  
 $V_s = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$  - динамическая скорость  
 $\tau_w$  - касательное напряжение на стенке  
 $\rho$  - плотность жидкости  
 $\mu_w$  - молекулярная вязкость на стенке  
 $M$  - турбулентная вязкость  
 $m = \frac{M}{\mu_w}$  - безразмерная турбулентная вязкость  
 $R$  - радиус трубы  
 $z$  - текущий радиус, отсчитываемый от оси трубы  
 $\varphi = R - z$  - расстояние от стенки  
 $\varphi = \frac{z}{R}$  - безразмерный радиус  
 $Re = \frac{W R}{\mu_w}$  - число Рейнольдса  
 $\lambda$  - коэффициент сопротивления трубы

При решении целого ряда задач гидродинамики и теплообмена особый интерес представляют единые формулы, описывающие движение жидкости в трубе при различных режимах течения. Такого рода соотношения не только значительно облегчают проведение соответствующих расчетов, но и позволяют лучше понять скрытые особенности протекающих процессов. Поэтому представляется актуальным и с практической и с методологической точек зрения определение формул для профилей скорости и коэффициента сопротивления, справедливых в возможно более широком диапазоне чисел Рейнольдса.

1. Профили скорости

Многочисленные эксперименты показали, что при турбулентных течениях в гидродинамически гладких трубах отношение максимальной скорости жидкости к средней по объемному расходу есть монотонная

функция числа Рейнольдса  $\frac{V}{W} = \varphi(Re)$ . Поэтому зависимость скорости жидкости от этого числа  $v = Vf(\varphi, Re)$  может быть переписана в форме  $v = V\Phi(\varphi, \frac{V}{W})$ . Из определения средней по объёмному расходу скорости  $W = 2 \int_0^1 v \varphi d\varphi$  следует, что искомая функция  $\Phi(\varphi, V/W)$  удовлетворяет интегральному соотношению

$$2 \int_0^1 \Phi(\varphi, \frac{V}{W}) \varphi d\varphi = \frac{W}{V}. \quad (1)$$

Кроме того, на стенке и на оси трубы

$$\Phi(1, \frac{V}{W}) = 0; \quad \Phi(0, \frac{V}{W}) = 1. \quad (2)$$

При ламинарном режиме течения

$$\Phi = 1 - \varphi^2; \quad \frac{V}{W} = 2.$$

Для турбулентного режима Ф.А. Шевелев [1] на основании обработки опытов Никурадзе [2] предложил формулу

$$\frac{V}{W} = 1 + \frac{0,744}{Re^{0,113}}$$

По нашим расчетам несколько лучше согласуется с данными [1], [2] соотношение

$$\frac{V}{W} = 1 + \frac{0,7}{Re^{0,11}}$$

Поскольку с увеличением числа Рейнольдса профиль должен становиться все более полым, целесообразно в качестве искомой функции принять

$$\Phi = (1 - \varphi^2)^{V/W-1},$$

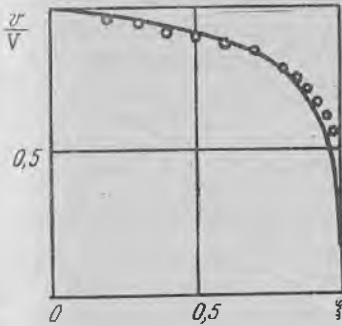
откуда

$$v = V(1 - \varphi^2)^{V/W-1}. \quad (3)$$

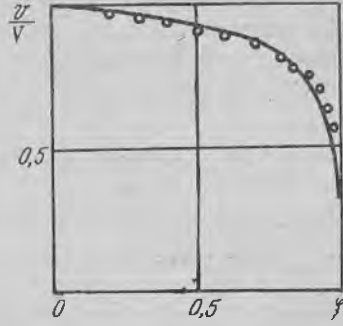
В этом случае соотношения (1) - (2) удовлетворяются тождественно.

При ламинарном режиме движения получается параболический профиль скорости. Сравнение расчетных и экспериментальных профилей скорости при турбулентном режиме для ряда чисел Рейнольдса приведены на рис. 1-4. Сплошными линиями нанесены значения, рассчитанные по соотношению (3), кружками - экспериментальные данные Никурадзе [2].

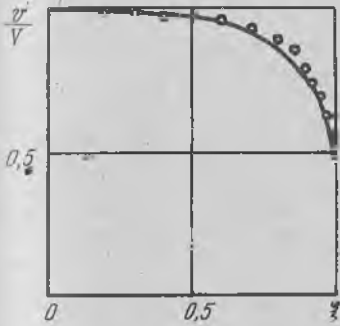
Сопоставление профилей (3) с результатами экспериментальных исследований турбулентного движения [1] - [5] показывает, что во всем диапазоне чисел Рейнольдса от  $Re = 3 \cdot 10^3$  до  $Re = 3,24 \cdot 10^6$  формула дает для ядра течения ( $\frac{V_0 \varphi}{v} > 70$ ) относительную погрешность не выше 3%. В переходной зоне между вязким подслоем и турбулентным ядром ( $11,5 < \frac{V_0 \varphi}{v} < 70$ ) расчеты по указанной формуле соответствуют экспериментам в той же мере, в какой эти эксперименты согласуются



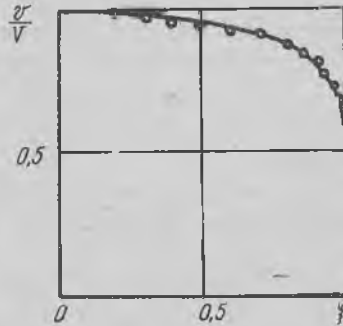
Р и с.1.  $Re = 2,33 \cdot 10^4$



Р и с.2.  $Re = 1,05 \cdot 10^5$



Р и с.3.  $Re = 1,11 \cdot 10^6$



Р и с.4.  $Re = 3,24 \cdot 10^6$

ся между собой (до 8 - 10% ближе к границе вязкого подслоя).

## 2. Закон сопротивления

Полученная для профиля скоростей формула позволяет установить связь между законом сопротивления и отношением средней скорости к максимальной.

Как известно, при любом режиме течения в трубе касательные

напряжения в жидкости распределяются по линейному закону  $\tau = \tau_w \frac{z}{R}$ . Если воспользоваться гипотезой Буссинеска о справедливости закона Ньютона при турбулентном течении  $\tau = -M \frac{dv}{dz}$ , то напряжение трения на стенке может быть вычислено по формуле  $\tau_w = -M \frac{R}{2} \frac{dv}{dz}$ .

Соответственно, для коэффициента сопротивления  $\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho W^2}$

после введения числа Рейнольдса и перехода к безразмерной координате получается соотношение

$$\lambda = -\frac{16}{WR_e} \frac{m}{\varphi} \frac{dv}{dy}. \quad (4)$$

Оно справедливо в любой точке сечения. Если воспользоваться профилем скорости (3), то  $\frac{1}{\varphi} \frac{dv}{dy} = -2V \left( \frac{V}{W} - 1 \right) (1-y^2)^{V/W-2}$ .

Поэтому наиболее простой вид формула (4) принимает на оси трубы

$$\lambda = \frac{32}{Re} m_0 \frac{V}{W} \left( \frac{V}{W} - 1 \right), \quad (5)$$

где  $m_0 = m/y=0$ .

Учитывая общую тенденцию возрастания  $m_0$  с увеличением числа Рейнольдса, естественно принять закон его изменения в форме

$$m_0 = \frac{Re}{Re_*} f_1 \left( \frac{V}{W} \right),$$

где  $Re_*$  - число Рейнольдса, при котором происходит завершение переходного режима.

Если учесть структуру соотношения (5), то функцию  $f_1(V/W)$ , описывающую отклонение зависимости  $\lambda_0(Re)$  от линейного закона, определим по формуле

Тогда 
$$f_1 \left( \frac{V}{W} \right) = \left( \frac{V}{W} \right)^{p-1} \left( \frac{V}{W} - 1 \right)^{q-1}$$

$$\lambda = \frac{32}{Re_*} \left( \frac{V}{W} \right)^p \left( \frac{V}{W} - 1 \right)^q. \quad (6)$$

Согласно экспериментальным данным  $Re_* = 2700-3300$ . Если принять  $Re_* = 2780$ , то из условия совпадения значений (6) с формулой Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$$

при  $Re = 2780$  и  $Re = 10^5$  следует, что  $p = 8$ ,  $q = 0,6$  и

$$\lambda = 0,0115 \left( \frac{V}{W} \right)^8 \left( \frac{V}{W} - 1 \right)^{0,6}$$

или

$$\lambda = \frac{0,00328}{Re^{0,66}} \left( 1 + \frac{0,7}{Re^{0,11}} \right)^8$$

Это выражение для коэффициента сопротивления согласуется с универсальной формулой Л. Прайдтля

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg Re \sqrt{\lambda} - 0,8 \quad (7)$$

с точностью до 2% вплоть до  $Re = 5 \cdot 10^6$  (табл.). Очевидным преимуществом соотношения (6) перед (7) является простота его использования при расчетах.

Т а б л и ц а

Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса

$Re$	$\lambda$		
	по формуле (6)	по формуле Блазиуса	по формуле Прандтля (7)
$5 \cdot 10^3$	0,0366	0,0376	0,0374
$10^4$	0,0307	0,0316	0,0309
$5 \cdot 10^4$	0,0209	0,0212	0,0209
$10^5$	0,0182	0,0178	0,0180
$0,5 \cdot 10^6$	0,0131	-	0,0131
$10^6$	0,0117	-	0,0116
$1,5 \cdot 10^6$	0,0108	-	0,0109
$2 \cdot 10^6$	0,0103	-	0,0104
$5 \cdot 10^6$	0,0088	-	0,0090

Л и т е р а т у р а

1. Шевелев Ф.А. Исследование основных гидравлических закономерностей турбулентного движения в трубах. М. Стройиздат, 1953.
2. Никуртзе И. Закономерности турбулентного движения в гладких трубах. В сб.: Проблемы турбулентности. ОНТИ, 1936.
3. Гуржиянко Г.А. Экспериментальное исследование установившегося турбулентного потока в прямой цилиндрической трубе. ЦАГИ, технические заметки № 180, 1938.
4. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., " Мир", 1968.

5. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow NASA, Report N1174, 1954.

В.Г.ШАХОВ

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В работе строятся конечно - разностные уравнения повышенного порядка точности, эквивалентные исходным дифференциальным уравнениям, являющимся модельными в теории стационарных и нестационарных плоских и пространственных пограничных слоев в магнитной гидродинамике.

При решении различных задач теории пограничного слоя и конвективного теплообмена встречаются уравнения типа

$$\sum_{\alpha=1}^p a_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t_{\alpha}} = Lu - qu + f; \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (I)$$

где  $u$  - любая составляющая скорости или температура;  $x$  - координата, отсчитываемая по нормали к поверхности обтекаемого тела;  $t_1$  - время;  $t_2, \dots, t_p$  - координаты, отсчитываемые вдоль поверхности обтекаемого тела.

Коэффициенты  $a_{\alpha}$ ,  $q$  и функция  $f$  в общем случае зависят от  $t_{\alpha} (\alpha=1, \dots, p)$  и от  $x$ . Задача состоит в решении уравнения (I) с соответствующими граничными (обычно при  $x=0$  и  $x=1$ ) и начальными (при  $t_{\alpha}=0, \alpha=1, \dots, p$ ) условиями. В дальнейшем будем предполагать, что при  $x=0$  и  $x=1$  заданы граничные условия I рода [1].

Введем сетку на единичном отрезке [0, 1]

$$\omega_h = \{x_i = ih, i=1, 2, \dots, N-1, h=1/N\} \quad (2)$$

Пусть  $\Omega$  - гиперкуб в  $p$  - мерном пространстве "времени",  $t = (t_1, \dots, t_p)$  - точка  $p$  - мерного пространства. В дальнейшем  $p = 0, 1, 2, 3$ . Проведем  $p$  - семейств плоскостей (прямых при  $p=2$ , точек при  $p=1$ ) [2]:

$$t_{\alpha} = t_{\alpha}^{(j_{\alpha})} \quad j_{\alpha} = 1, 2, \dots, \alpha = 1, \dots, p, \\ t_{\alpha}^{(j_{\alpha})} > t_{\alpha}^{(j_{\alpha}-1)}$$

Точки  $t_j = (t_1^{(j_1)}, \dots, t_p^{(j_p)}) \in \Omega$  - пересечения этих плоскостей (прямых) назовем узлами сетки  $\omega_{\tau}$ . Введем шаг сетки  $\omega_{\tau}$