14. J. Laufer, The structure of turbulence in fully developed pipeflow, NACA, Report, 1954, № 1174.
15. J. Boussinesq, Théorie de l'écoulement tourbillant Mém. prés. Acad. Sci. 1877, XXIII.
16. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.- М.: Наука, 1974.
17. H. Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flussigkeiten, Forsch. Arb. Ing.-Wes. 1913.
18. H. Ombeck, Druckverlust strömender Luft in geraden Zylindrischen Röhrenleitungen, Forsch. Arb. Ing.-Wes. 1914.
19. H. Helmholtz, Zur Theorie stationären Ströme in reibenden Flussigkeiten, Verhand. der naturalist-med. Vereines. 30 Okt. 1868.
20. Христов Х.И. Принцип наименьшей скорости диссипации энергии и возможность его применения к турбулентному течению в плоском канале. - ДАН СССР, 1979, 245 №5.
21. Прандтль Л. Механика вязких жидкостей. - В кн.: Аэродинамика/ Под ред. В. Дюрэнд. т. Ш.-М.-Л.: Оборонгиз, 1939.

УДК 532.517.4

М.Я. Сычев

О МЕТОДАХ РАСЧЕТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Принятые обозначения:

U – осредненная по времени скорость жидкости;
W – средняя по объемному расходу скорость;
u_0 – скорость на оси трубы;
$q = \frac{W}{u_0}$ – отношение средней скорости к максимальной;
ρ – плотность жидкости;
μ – молекулярная вязкость;
μ_t – турбулентная вязкость;
ν – кинематическая вязкость;
$m = \frac{\mu_t}{\mu}$ – безразмерная турбулентная вязкость;
τ_w – напряжение трения на стенке;
$V_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ – динамическая скорость;

r_0 – радиус трубы;
d – диаметр трубы;
r – текущий радиус;
y – расстояние от стенки;
$\xi = \frac{r}{r_0}$ – безразмерный текущий радиус;
$\eta = \frac{V_* y}{\nu} = \frac{1}{4\sqrt{2}} Re\sqrt{\lambda}(1-\xi)$ – универсальная переменная (безразмерное расстояние от стенки);
$\eta_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}} Re\sqrt{\lambda}$ – значение универсальной переменной на оси трубы;
λ – коэффициент сопротивления трения;
Re – число Рейнольдса, подсчитанное по средней скорости и диаметру.

Традиционно коэффициент сопротивления λ определяется по формуле

$$\lambda = 8\frac{V_*^2}{W^2},$$

в которой динамическая скорость $V_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ в эксперименте находится из перепада давления, а средняя скорость – по расходу жидкости. При теоретическом решении задачи V_* вычисляется по напряжению трения на стенке

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}\bigg|_{y=a},$$

а средняя скорость – по формуле

$$W = 2\int_0^1 u\xi d\xi . \qquad (I)$$

Наряду с указанным косвенным методом опытного определения λ известны и прямые, основанные на непосредственном измерении трения на стенке. Некоторые из них с успехом используются в исследованиях пограничного слоя [I], [2]. Для теоретического или полуэмпирического нахождения сопротивления в распоряжении исследователя имеется достаточно широкий выбор, не стесняемый возможностями измерительной техники.

Из безразмерного уравнения движения жидкости в трубах получается следующее выражение для коэффициента сопротивления:

$$\lambda = -\frac{16}{q Re}(1+m)\frac{1}{\xi}\frac{df}{d\xi}, \text{ где } f(\xi, Re) = \frac{u}{u_0} .$$

Из выражения видно, что если задана (например, из опыта) функция $q=q(Re)$, то λ может быть вычислен при любом значении ξ, для которого известны $m(\xi,Re)$ и $f(\xi,Re)$, в частности для $\xi=0$. Последний метод развивался в работах [3], [4], [5], основанных на применении необходимого, но недостаточного условия тождественности, получаемого из формулы (I):

$$8\int_0^1 \Phi(\xi,q)\,\xi\, d\xi \equiv q \qquad \Phi(\xi,q)=\frac{u}{u_0},$$

или его видоизмененной формы

$$\int_0^{\eta_0}\frac{u}{V_*}\left(1-\frac{\eta}{\eta_0}\right)d\eta \equiv \frac{Re}{4}. \qquad (2)$$

Условие (2) может быть использовано двояким образом: для контроля теоретических или экспериментальных результатов; для определения сопротивления по известному профилю скоростей в универсальных координатах.

Применение условия (2) для контроля теоретических результатов может быть проиллюстрировано на примере ламинарного движения, когда распределение скоростей имеет вид

$$\frac{u}{V_*}=\eta-\frac{\eta^2}{2\eta_0}.$$

Подстановка этого выражения в левую часть условия (2) и интегрирование дают

$$\int_0^{\eta_0}\left(\eta-\frac{\eta^2}{2\eta_0}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_0}\right)d\eta=\frac{\eta_0^2}{8}\equiv\frac{Re^2\lambda}{32\cdot 8}. \qquad (3)$$

Так как коэффициент сопротивления λ, вычисляемый по касательному напряжению на стенке, будет в этом случае $\lambda=64/Re$, то подставляя λ в результат (3), находим $\frac{Re^2 64}{32\cdot 8\, Re}=\frac{Re}{4}$, т.е. условие тождественности выполняется.

Если, наоборот, приравнять результат (3) правой части условия (2), то получим $\frac{Re^2\lambda}{32\cdot 8}=\frac{Re}{4}$. Откуда следует, что $\lambda=64/Re$.

При обработке опытных данных по распределению скоростей довольствуются обычно известными методами оценки точности. В то же время очевидно, что применение условия (2) в принципе позволяет их скорректировать. Это особенно важно при исследовании переходного и турбулентного режимов движения. Так, проверка известных экспериментальных данных Никурадзе [6] по распределению скоростей путем графического их интегрирования обнаруживает в области малых чисел Рейнольдса расхождения с условием (2). При $Re = 6{,}1 \cdot 10^3$ рассогласование составляет около 6%, при $Re = 9{,}?\cdot 10^3$ – порядка 3% в сторону занижения. При больших числах Рейнольдса расхождения ничтожны.

Использование условия (2) для получения коэффициента сопротивления λ для различных аппроксимаций универсального профиля скоростей двух-или трехслойной моделей течения показано на следующих примерах.

Для логарифмической аппроксимации Прандтля-Кармана

$$\frac{U}{V_*} = A \ln \eta + B.$$

После интегрирования левой части условия (2) получаем

$$\int_0^{\eta_0} (A \ln \eta + B)\left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right) d\eta = \frac{\eta_0}{2}\left[A \ln \eta_0 + \left(B - \frac{3}{2}A\right)\right].$$

Приравнивая полученное выражение к числу $\frac{Re}{4}$, стоящему в правой части, находим:

$$\frac{\eta_0}{2}\left[A \ln \eta_0 + \left(B - \frac{3}{2}A\right)\right] = \frac{Re}{4},$$

откуда после подстановки $\eta_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}} Re\sqrt{\lambda}$ и сокращений имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[A \ln\left(\frac{1}{4\sqrt{2}} Re\sqrt{\lambda}\right) + \left(B - \frac{3}{2}A\right)\right]. \tag{4}$$

При $A = 2{,}5$, $B = 5{,}5$ из формулы (4) следует известный закон сопротивления Прандтля [7] :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}035 \lg Re\sqrt{\lambda} - 0{,}91. \tag{5}$$

Рейхардтом [8] предложен профиль скоростей, описываемый по всему сечению трубы формулой

$$\frac{U}{V_*} = 2{,}5 \ln(1 + 0{,}4\eta) + 7{,}8\left[1 - \exp\left(-\frac{\eta}{11}\right) - \frac{\eta}{11}\exp(-0{,}33\eta)\right]. \tag{6}$$

Подстановка этого профиля в левую часть условия (2) и интегрирование приводят к весьма громоздкому выражению, содержащему 12 слагаемых, ряд которых, однако, может быть сразу же отброшен при $\eta > 120 \; (Re > 3100)$ в связи с их малостью. Тогда получается

$$J(\eta_0)=\left[1{,}25\ln(1+0{,}4\eta_0)+5{,}925\right]\eta_0+6{,}25\ln(1+0{,}4\eta_0)+$$

$$+\frac{1}{\eta_0}\left[7{,}813\ln(1+0{,}4\eta_0)+983\right]-95{,}4. \qquad (7)$$

Приравнивая интеграл (7) правой части условия (2), приходим к формуле для определения λ в неявной форме:

$$J\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}Re\sqrt{\lambda}\right)=\frac{Re}{4}. \qquad (8)$$

В случае двух- или трехслойной моделей интегралы в левой части условия тождественности соответственно равны:
для двухслойной модели

$$\left.\begin{aligned}&\frac{U}{V_*}=\eta \quad 0\leqslant\eta\leqslant5\\ &\frac{U}{V_*}=2{,}5\ln\eta+5{,}5 \quad 5\leqslant\eta\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$J(\eta_0)=1{,}25\eta_0\ln\eta_0+3{,}625\eta_0-\frac{14}{\eta_0}-25{,}4;$$

для трехслойной модели

$$\left.\begin{aligned}&\frac{U}{V_*}=\eta \quad 0\leqslant\eta\leqslant5\\ &\frac{U}{V_*}=4{,}99\ln\eta-3{,}038 \quad 5\leqslant\eta\leqslant30\\ &\frac{U}{V_*}=2{,}5\ln\eta+5{,}5 \quad 30\leqslant\eta\end{aligned}\right\}$$

$$J(\eta_0)=\eta_0(1{,}25\ln\eta_0+0{,}875)+\frac{575{,}9}{\eta_0}-64. \qquad (10)$$

Результаты расчетов по формуле (5), а также по формуле (8), левая часть которой определяется последовательно формулами (7), (9),(10), сопоставлены в таблице с данными, полученными по формуле Блазиуса [9]

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{Re^{0{,}25}} . \qquad (II)$$

Значения коэффициентов сопротивления

Re	λ по формулам				Δ, %
	(6)	(9)	(I0)	(II)	
$2{,}5\cdot I0^3$	0,0463	0,05400	0,08386	0,0447	20,8
3,0	0,0437	0,04980	0,04974	0,0427	I6,6
4,0	0,040I	0,04425	0,04425	0,0398	II,2
5,0	0,0375	0,04060	0,04067	0,0367	8,0
7,5	0,0334	0,03522	0,03532	0,0340	3,6
$I{,}0\cdot I0^4$	0,0309	0,032I2	0,03222	0,03I64	I,5
2,5	0,0244	0,02480	0,02487	0,0252	
5,0	0,0208	0,0209I	0,02096	0,02I2	
7,5	0,0I90	0,0I906	0,0I9I03	0,0I9I	
$I{,}0\cdot I0^5$	0,0I78	0,0I790	0,0I794	0,0I78	
2,5	0,0I48	0,0I484	0,0I486		
5,0	0,0I30	0,0I30I	0,0I302		
7,5	0,0I2I	0,0I209	0,0I2I0		
$I{,}0\cdot I0^6$	0,0II5	0,0II49	0,0II50		
2,5	0,0098б	0,009862	0,009869		
5,0	0,00884	0,008843	0,008848		

Обращает на себя внимание поразительное совпадение λ по Рейхардту и по трехслойной модели. В последней колонке таблицы приведен расхождения λ по формулам (7), (I0) со значениями, вычисленными по Блазису (II). Еще один метод определения коэффициента сопротивления основан на представлении о "дефиците" средней скорости:

$$\frac{U_0 - W}{V_*} = -\frac{2}{\varkappa}\int_0^1 ln\left(\frac{y}{r_0}\right)\left(1-\frac{y}{r_0}\right) d\frac{y}{r_0} = \frac{3}{2\varkappa} \qquad (I$$

При $æ$ =0,4 получается $\frac{U_0 - W}{V_*} = 3{,}75$.

Так как $\frac{U_0}{V_*} = A\ln\eta_0 + B$, то с учетом величины указанного "дефицита" после простых выкладок получается формула Прандтля (5).

Укажем на возможность получения целого класса формул сопротивления. Как показано в работе [5], в пределах точности опыта каждая точка универсальной кривой $\frac{U}{V_*} = \varphi(\eta)$ может рассматриваться одновременно как точка кривой $\frac{U_0}{V_*} = \varphi(\eta_0)$, являющейся геометрическим местом вершин турбулентных профилей скоростей на оси трубы при разных Re.

В соответствии с двухслойной моделью Прандтля (например [7])

$$\frac{U_0}{V_*} = \frac{1}{æ}\ln\eta_0 + \alpha - \frac{1}{æ}\ln\alpha. \tag{13}$$

С другой стороны, $\frac{U_0}{V_*}$ можно представить в виде

$$\frac{U_0}{V_*} = \frac{2\sqrt{2}}{q\sqrt{\lambda}}, \tag{14}$$

где $q = q(Re)$ известная из опытов функция. Приравнивая выражения (12) и (13), получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{q}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{æ}\ln\eta_0 + \alpha - \frac{1}{æ}\ln\alpha\right],$$

где $\alpha = \frac{V_*\delta}{\nu}$ – безразмерная толщина вязкого пристеночного слоя (подслоя).

Нетрудно видеть, что из формулы (14) при некоторых средних значениях q в определенном диапазоне Re, а также констант $æ$ и α можно получить целый ряд логарифмических формул:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = a\lg Re\sqrt{\lambda} + b.$$

Например, при q =1, $æ$ =0,4, α =6,4 получается формула (5). При q =1, $æ$ =0,407, α =6,77 получается другая формула Прандтля:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}0\lg Re\sqrt{\lambda} - 0{,}8.$$

Отметим, что α =6,4 и α =6,77 лучше отвечают современным представлениям, нежели принятое первоначально α =11,5.

Литература

1. Репик Е.У., Тарасова В.Н. Измерение силы трения в пограничном слое при малых и умеренных числах Рейнольдса.- Труды ЦАГИ, 1970, вып. 1218.
2. Чикурин А.К. К вопросу об измерении напряжения трения на стенке. - Материалы научно-технической конференции. Ч.I. Февраль, 1970.
3. Головин В.М., Чайницкий Ю.Л. О новом профиле скоростей и законе сопротивления при турбулентном движении жидкости в гладких трубах.- В сб.: Гидрогазодинамика. - Куйбышев: КуАИ, 1976.
4. Головин В.М., Сарбатова А.Ф. К вопросу о влиянии вязкой составляющей на общее сопротивление гидравлически гладких труб при турбулентном режиме течения. - ИВУЗ. Нефть и газ. 1980, №2.
5. Головин В.М., Юмашев Л.П. Некоторые аспекты феноменологической теории турбулентного движения жидкости в гладких трубах.- Куйбышев, 1982.- Рукопись представлена КуАИ, с. 45. Деп. в ВИНИТИ 7 сент. 1982, № 4778-82.
6. Никурадзе И. Основные закономерности турбулентного движения в гладких трубах. - В сб.: Проблемы турбулентности. - М.-Л.: ОНТИ СССР, 1975.
7. Прандтль Л. Механика вязкой жидкости. - В кн.: Аэродинамика Под ред. В. Дюренда,т. 3. - М.: Машиностроение, 1939.
8. Reichardt H., Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen.- ZAMM. 1951, 31.
9. Blasius H. Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flussigkeiten Forsch. Arb. Ing.-Wes. Berlin, 1913.

10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1969.

УДК 532.135

А.Д. Рудой, О.А. Ткачев

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВИБРОВОЗДЕЙСТВИЙ НА ВЯЗКОСТЬ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ