О.Ф.МЕНЬШИХ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

I. Рассмотрим следующую систему квазилинейных уравнений, имеющую одинаковые главные части [I] :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}=0,$$

$$u=\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Vmatrix}; \qquad A_i=\begin{Vmatrix} a_i & & 0 \\ & a_i & \\ 0 & & a_i \end{Vmatrix} \tag{I}$$

– квадратная диагональная матрица типа ($m \times m$), $m \leq n+1$, $a_i = a_i(u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

З а м е ч а н и е I. В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые функции являются достаточно гладкими в малых областях.

О п р е д е л е н и е I. Бегущей волной ранга r [2], [3] назовем такое решение системы (I), при котором общий ранг матрицы

$$M_1=\begin{Vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} & \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

равен $r\ (1 \leq r \leq m-1)$.

Выведем все бегущие волны системы (I) в виде

$$u_{r+j} = \omega_j (u_1, u_2, \ldots, u_r); \quad (j = \overline{1, m-r}; \ r = \overline{1, m-1}). \quad (2)$$

При этом предполагаем, что

$$\Delta_1 = \frac{\partial (u_1, u_2, \ldots, u_r)}{\partial (x_1, x_2, \ldots x_r)} \neq 0. \quad (3)$$

Условие (3) позволяет в систему (I) ввести новые функции

$$x_k = x_k (u_1, u_2, \ldots, u_r; x_{r+1}, \ldots, x_n; t) \ (k = \overline{1, r}). \quad (4)$$

В силу условия (2) последние ($m-r$) уравнений системы (I) будут следствием первых r уравнений при произвольных функциях ω_j .

Из (4) следуют тождества:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} = -\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (k = \overline{1, r}; \ \alpha = \overline{r+1, n}).$$

Подставляя тождества (5) в первые r уравнений системы (I), получим новую систему:

$$\sum_{\beta=1}^{r} \Gamma_\beta \frac{\partial u_k}{\partial x_\beta} = 0; \quad (k = \overline{1, r}),$$

$$\Gamma_\beta = a_\beta - \left\{ \frac{\partial x_\beta}{\partial t} + \sum_{\alpha=r+1}^{n} a_\alpha \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \right\}, \quad (\beta = \overline{1, r}). \quad (6)$$

Будем смотреть на формулу (6), как на систему линейных однородных уравнений относительно Γ_β . Определитель этой системы $\Delta_1 \neq 0$ в силу условия (3). Следовательно, $\Gamma_\beta = 0$ или

$$\frac{\partial x_\beta}{\partial t} + \sum_{\alpha=r+1}^{\beta} a_\alpha \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} = a_\beta; \quad (\beta = \overline{1, r}). \quad (7)$$

Интегрируя отдельно каждое из уравнений системы (7), получим

$$x_k - a_k t = \varphi_k (C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}; u_1, u_2, \ldots, u_r);$$

$$C_\alpha = x_{r+\alpha} - a_{r+\alpha} t; \quad (k = \overline{1, r}; \ \alpha = \overline{1, n-r}), \quad (8)$$

где φ_k - произвольные функции.

Для однозначного решения (8) относительно $u_1, u_2, \ldots u_r$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_2 = \frac{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial (u_1, u_2, \ldots, u_r)} \neq 0. \quad (9)$$

Предположим, что условие (9) выполняется, тогда формулы (2) и (8) будут определять все бегущие волны системы (I).

Из формул (8) и (2) видно, что существуют ($m-1$) классов бегущих волн. Каждый из этих интегралов содержит $(m-r)$ произвольных функций, r переменных и r произвольных функций r переменных. Непосредственной проверкой с учетом (8) устанавливается, что

$$\Delta_2 \Big|_{t=0} = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_r)}\Big|_{t=0} = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_r)}\Big|_{t=0}$$

Подчиним функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ дополнительному условию

$$\sigma = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_r)} \neq 0.$$

Тогда вследствие непрерывности всех $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k}$ имеем $\sigma \neq 0$ и в некоторой окрестности гиперплоскости $t=0$. Следовательно, формулы (8) можно переписать в этом случае в виде

$$u_\alpha = f_\alpha(S_1, S_2, \dots, S_n),$$
$$S_i = x_i - a_i t \qquad (i = \overline{1,n}), \tag{10}$$

где f_α - произвольные функции.

Для обратного перехода от (10) к (8) потребуем, чтобы

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_r)}{\partial(S_1, S_2, \dots, S_r)} \neq 0.$$

2. Пусть в системе (I) число функций $m = n+1$. Покажем, что в этом случае все решения этой системы являются бегущими волнами. В самом деле, рассматривая (I) как систему $(n+1)$ линейных однородных уравнений относительно $1, a_1, a_2, \dots, a_n$, получаем, что определитель этой системы

$$\Delta = \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})} = 0$$

Значит, между функциями $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ должны существовать некоторые зависимости, которые, не умаляя общности, имеют вид (2).

Переходим к случаю, когда в системе (I) $m < n+1$. Здесь могут существовать решения, которые не являются бегущими волнами, т.е. для которых выполняется условие

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)} \neq 0.$$

Для интегрирования (I) аналогично предыдущему вводим новые функции

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_m; x_{2+1}, \dots, x_n; t) \quad (i = \overline{1,m}).$$

При этом приходим к соотношениям (5) - (7), в которых следует положить $m=r$. Интегрируя систему уравнений (7), получим общее решение

$$x_k - a_k t = T_k(C_1, C_2, \dots, C_{n-m}; u_1, u_2, \dots, u_m);$$
$$C_\alpha = x_{m+\alpha} - a_{m+\alpha} t, \tag{11}$$
$$(k = \overline{1,m};\ \alpha = \overline{1, n-m}),$$

где T_k - произвольные функции.

Если функции $T_1, T_2, \dots, T_m$ удовлетворяют условию

$$\left.\frac{\partial(T_1, T_2, \dots, T_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)}\right|_{t=0} \neq 0,$$

то аналогично формулы (II) можно переписать в виде

$$u_i = f_i(S_1, S_2, \dots, S_n) \qquad (i = \overline{1,m});$$

$$S_k = x_k - a_k t \qquad (k = \overline{1,n}),$$

где f_i - произвольные функции, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(S_1, S_2, \dots, S_m)} \neq 0.$$

Т е о р е м а I. Если в системе (I) $m = n+1$, то все решения этой системы являются бегущими волнами ранга $r\ (1 \leqslant r \leqslant n)$ и определяются формулами (2), (8); если $m < n+1$, то, кроме бегущих волн, система (I) имеет также решения, которые описываются формулой (II).

З а м е ч а н и е 2. В [4] была проинтегрирована система

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \psi(v)\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \varphi(u)\frac{\partial v}{\partial x} + \psi(v)\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

являющаяся частным случаем системы (I).

3. Система уравнений, описывающая пространственное нестационарное движение политропного газа, имеет вид [5] :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad , \qquad (i = 1,2,3);$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\left(u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \gamma p \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = 0; \tag{I2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\left(u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = 0,$$

где t - время; u_i - проекции векторов скорости $\vec{V}$ на оси декартовой системы координат; ρ - плотность газа; p - давление; γ - показатель адиабаты Пуассона.

Найдем интегралы системы (I2) в случае постоянного давления $p = const$(случаи одномерного нестационарного и плоского нестационарного движения газа при произвольном уравнении состояния рассматривались в [4]).

Полагая в (I2) $p = const$, получим следующую систему:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \qquad (i = 1,2,3) \tag{13,а}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \tag{13,б}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0. \tag{13,в}$$

Подсистема (I3,а) принадлежит к классу систем (I). Необходимо найти такие её интегралы, которые удовлетворяют также уравнению (I3,б). Если система (I3,а), (I3,б) совместна, то для определения плотности необходимо интегрировать уравнение (I3,в).

Рассмотрим 3 случая интегрирования системы (I3,а):

$$1)\ ранг \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\| = 1; \quad 2)\ ранг \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\| = 2; \quad 3)\ ранг \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\| = 3.$$

Опуская вычисления, приведем окончательные результаты.

Первый случай. $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \neq 0,$

$$u_2 = W_1(u_1); \quad u_3 = W_2(u_1); \quad \rho = W_3(u_1, T_1, T_2). \tag{I4}$$

Функция $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3, t)$ определяется из уравнения

$$W_4(u_1; \Pi_1, \Pi_2) = 0., \tag{I5}$$

где $T_i = u_{i+1} x_1 - u_1 x_{i+1}$; $\Pi_i = x_i - u_i' x_1 + (u_1 u_i' - u_i), (i = 1,2)$;

$u_i' = \dfrac{d u_i}{d u_1}$; W_k – четыре произвольные функции, ($k = \overline{1,4}$).

Второй случай.

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0, \tag{I6}$$

$$x_i = u_i t + \lambda_i(u_1, u_2, z), \qquad (i = 1,2);$$

$$\lambda_1 = z\mu_2 - \mu_1 \lambda_2 + \mu_3; \quad z = x_3 - u_3 t \tag{I7}$$

относительно λ_2 получено уравнение

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial z} = \frac{\alpha_{11} z + \alpha_{12} \lambda_2 + \alpha_{13}}{\alpha_{21} z + \alpha_{22} \lambda_2 + \alpha_{23}}, \tag{I8}$$

где $\alpha_{11} = \mu_2 \dfrac{\partial \mu_2}{\partial u_1}$; $\alpha_{12} = -\mu_2 \dfrac{\partial \mu_1}{\partial u_1}$; $\alpha_{13} = \mu_2 \dfrac{\partial \mu_3}{\partial u_1}$;

$\alpha_{21} = -\alpha_{12}$; $\alpha_{22} = \dfrac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \mu_1 \dfrac{\partial \mu_1}{\partial u_1}$; $\alpha_{23} = \mu_1 \dfrac{\partial \mu_3}{\partial u_1} - \dfrac{\partial \mu_3}{\partial u_2}$.

Функции μ_1 и μ_2 связаны уравнением

$$\mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial u_1} - \mu_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial u_2} = 0 . \tag{I9}$$

Интегрированием вполне интегрируемой системы

$$\frac{\partial u_3}{\partial u_1} = \frac{1}{\mu_2}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial u_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (\mu_2 \neq 0) \tag{20}$$

определяется функция $u_3 = u_3(u_1, u_2)$.

Обращением формул (I6) находятся u_1 и u_2, при этом

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0, \quad p = \bar{p}(u_1, u_2, z) \tag{2I}$$

Уравнение (I8) можно рассматривать как обикновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое сводится к однородному. При интегрировании его необходимо рассмотреть 2 случая:

а) $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \mu_2 \frac{\partial(\mu_2, \mu_1)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$,

тогда уравнение (I8) имеет интеграл вида

$$\alpha_{22}(\bar{\lambda}_2)^2 + 2\alpha_{21}\bar{\lambda}_2 \bar{z} - \left\{\alpha_{11}(\bar{z})^2 + C_1(u_1, u_2)\right\} = 0, \tag{22}$$

где $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2 - \beta_1$, $\bar{z} = z - \beta_2$, $C_1(u_1, u_2)$ – произвольная функция;

$$\beta_1 = \frac{\partial(\mu_2, \mu_3)}{\partial(u_1, u_2)} \Big/ \frac{\partial(\mu_2, \mu_1)}{\partial(u_1, u_2)}; \quad \beta_2 = \frac{\partial(\mu_1, \mu_2)}{\partial(u_1, u_2)} \Big/ \frac{\partial(\mu_2, \mu_1)}{\partial(u_1, u_2)},$$

б) $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} - \mu_2 \frac{\partial(\mu_2, \mu_1)}{\partial(u_1, u_2)} = 0; \ \mu_2 \neq 0 \ \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial u_1} \neq 0\right)$.

В этом случае интеграл (I8) примет вид

$$\mu_2 \mu_1' \frac{\partial \mu_2}{\partial u_1} \frac{W^2}{2} + \alpha_{23} W + (\alpha_{13}\mu_1' - \alpha_{23}) z + C_2(u_1, u_2) = 0, \tag{23}$$

где $W = z - \mu_1' \lambda_2$; $C_2(u_1, u_2)$ – произвольная функция;

$\mu_1 = g(\mu_2)$; $\mu_3 = \Phi(\xi)$; $\xi = u_1 + (\mu_1 - \mu_2 \mu_1') u_2$,

$g(\mu_2)$; $\Phi(\xi)$ – произвольные функции.

<u>Третий случай.</u> $\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0$.

В этом случае интеграл системы (I3,а) не удовлетворяет уравнению (I3,б), т.е. система (I3,а), (I3,б) противоречива.

Таким образом, найдены все решения системы (I3) в замкнутом виде.

Т е о р е м а 2. Все решения системы уравнений газовой динамики в случае постоянного давления (I3) описываются формулами (I4), (I5) и (I6) - (22), (I6) - (2I), (23).

Замечание 3. Если в формуле (I4) $\rho = W_3(u_1)$ и в формуле (2I) $\rho = \rho(u_1, u_2)$, то будем иметь соответственно частные решения типа простых и двойных волн, здесь такие движения будут вихревые.

Л и т е р а т у р а

1. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., " Мир", 1964.
2. П о г о д и н Ю.Я., С у ч к о в В.А., Я н е н к о Н.Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. ДАН СССР, 1958, т. II9, № 3.
3. Я н ё н к о Н.Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. Труды 4 Всесоюзного математического съезда, т.2. Л., " Наука", 1964.
4. Noh W.F., Protter M.H. Difference methods and equations of hydrodynamics. „Journal of mathematics and mechanics, 1963, vol. 12, N2.
5. К о ч и н Н.Е., К и б е л ь И.А., Р о з е Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч. П. М., Физматгиз, 1963.

С.М.ПОБЕРЕЗКИН

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим движение идеальной несжимаемой жидкости, вращающейся вокруг вертикальной оси z, в области $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $H < z < 0$, где x, y, z образуют декартову систему координат. Средний уровень моря - плоскость $z = 0$, океанское дно - плоскость $z = -H$, где $H - const$. Уравнение пластины $y = 0$, $|x| < b$.

Линеаризованные уравнения сохранения количества движения, массы и объема имеют вид [1]: