РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Л.Я. Осипова, В.Н. Шумилов

Введение

Принцип обратной связи является одним из основополагающих принципов кибернетики. Любая локальная экономика (в широком смысле этого слова, т.е. предприятие, группа предприятий, отрасль и т.п.) является типичной системой с наличием обратных связей. При этом четкое функционирование субъектов экономической деятельности, включенных в указанную систему, определяется и человеческими и экономическими факторами. Грубо говоря, эффективность работы системы зависит от общего капитала системы, объема инвестиций в нее, от наличия оборотных средств, величины налогов, а также от волевого решения руководства, которое распоряжается всеми ресурсами.

Представляется очевидным, что рациональное распределение ресурсов (даже при очень ограниченном их общем объеме) по направлениям деятельности может существенно повысить эффективность их использования. Но это возможно лишь в том случае, когда как ближайшие, так и достаточно отдаленные результаты принимаемых решений поддаются прогнозированию, для чего, собственно говоря, и предназначено математическое моделирование. Целью настоящей работы является обзор и анализ наиболее популярных экономико-математических моделей, в которых реализован принцип обратной связи, а эффекты запаздывания в больших экономических системах учитываются в явном виде.

Прежде чем приступить к перечислению особенностей анализируемых моделей, напомним некоторые основные математические и кибернетические понятия, которые потребуются в дальнейшем.

Для начала рассмотрим простую модельную задачу для системы с обратной связью-мультипликатором, детально исследованную в классической монографии [2]. Термин «обратная связь-мультипликатор» означает, что результат работы системы снова попадает в неё и складывается с входным сигналом (рис.1).

Пусть исходный сигнал, подаваемый на вход системы, имеет простую синусоидальную форму и система его не искажает. Тогда, если первичный и вторичный (прошедший через систему) сигналы синфазны, то обратная связь положительна и система будет работать как усилитель. Такие обратные связи широко используются, например, в радиотехнике. Если же вторичный сигнал попадает на вход системы в противофазе с первичным сигналом, то первичный сигнал будет ослабляться. В этом случае обратная связь будет отрицательной. В технике устройства с отрицательной обратной связью чаще всего используются в системах автоматического управления или стабилизации.

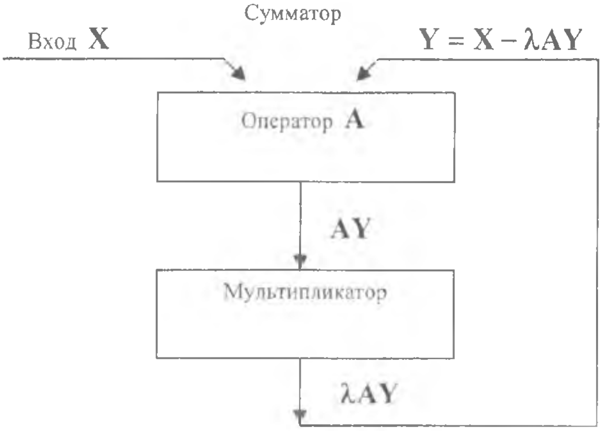

Рис.1. Иллюстрация принципа обратной связи

Прокомментируем схему, представленную на рис. 1.

Сигнал $\mathbf{X}$ на входе (в технике это может быть амплитуда электрических колебаний, в экономике - объем инвестиций или кредита) и, умножаясь на число λ, превращается в выходной сигнал $\mathbf{Y}$.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \lambda \mathbf{A} \mathbf{Y}. \tag{1}$$

Отсюда легко видеть, что

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{X}}{1 + \lambda \mathbf{A}}, \tag{2}$$

и выходной сигнал системы будет

$$\mathbf{AY} = \frac{\mathbf{AX}}{1 + \lambda \mathbf{A}}. \tag{3}$$

В этом случае оператор, создаваемый всем механизмом обратной связи, равен $\frac{\mathbf{A}}{1 + \lambda \mathbf{A}}$. Этот оператор будет бесконечно большим тогда, когда $\mathbf{A} = -\frac{1}{\lambda}$. В случае, когда точка $-\frac{1}{\lambda}$ внутренняя [2], обратная связь с коэффициентом λ приведет к катастрофически нарастающим по амплитуде колебаниям системы. Если же точка $-\frac{1}{\lambda}$ внешняя [2], то обратная связь устойчива.

Уже на этом простейшем примере можно убедиться, что даже незначительные вариации обратной связи могут радикально менять характер временной зависимости исследуемого процесса.

В истории математической экономики и теории управления известно множество моделей, из которых наибольший интерес для нас представляют модели экономического регулирования. В справочных целях опишем основные особенности простейших классических моделей.

1. Модель Харрода - Домара

Модель Харрода-Домара [1, 7, 8] исторически была одной из первых моделей, созданных более 50 лет тому назад в рамках теории экономического регулирования. В этой модели присутствуют четыре экономических параметра: $\mathbf{Y}$ - доход, $\mathbf{C}$ - личное потребление, $\mathbf{A}$ - независимые расходы и $\mathbf{I}$ - инвестиции. Записанная ниже система уравнений представляет собой простейшее уравнение баланса (экономическая система с нулевым сальдо) и констатирует тот факт, что произведенный продукт расходуется на собственное потребление, инвестиции и независимые расходы (например, налоги):

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = \mathbf{C} + \mathbf{I} + \mathbf{A}, \\ \mathbf{I} = \nu \dfrac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dt}}, \\ \mathbf{C} = \mathbf{cY}. \end{cases} \tag{4}$$

Обратная связь осуществляется за счет того, что поток производимой продукции $\mathbf{Y}$ через посредство собственного потребления $\mathbf{C}$ воздействует сам на себя. В модели присутствуют индуцированные капиталовложения

$$\mathbf{I} = \nu \frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dt}}, \tag{5}$$

где $\mathbf{\nu}$ - коэффициент акселератора.

2. Модель Филипса

Вслед за моделью Харрода-Домара в 1954 году появилась несколько более совершенная модель Филипса [10], в которой в отличие от системы уравнений (4) присутствует такой важный экономический параметр, как спрос $\mathbf{Z}$:

$$
\begin{cases}
\mathbf{Z} = \mathbf{C} + \mathbf{I} + \mathbf{A}, \\
\mathbf{C} = \mathbf{cY}, \\
\mathbf{I} = \dfrac{\kappa}{\mathbf{D} + \kappa} \nu \mathbf{DY}, \\
\mathbf{Y} = \dfrac{\lambda}{\mathbf{D} + \lambda} \mathbf{Z},
\end{cases}
\tag{6}
$$

где $\mathbf{D} = \dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}$ - дифференциальный оператор, а κ и λ - скорости реакций запаздывания. Модель, описываемая системой уравнений (6), уже является достаточно гибкой и позволяет описывать колебания в системе «спрос-предложение», рассчитывать (весьма приближенно) продолжительность экономических циклов и, в какой-то мере, прогнозировать ситуацию на рынке инвестиций. Однако даже на макроэкономическом уровне эта модель остается слишком грубой.

3. Модель Калецкого

Для принятия решений на макроуровне достаточно привлекательной выглядит модель Калецкого [9]:

$$
\begin{cases}
\mathbf{Y} = \mathbf{C} + \mathbf{I} + \mathbf{A}, \\
\mathbf{I} = \dfrac{1}{\theta} \displaystyle\int_{t-\theta}^{t} \mathbf{B}(\tau) \mathbf{d}\tau, \\
\mathbf{B} = \alpha(1 - \mathbf{c})\mathbf{Y} - \kappa \mathbf{K}, \\
\mathbf{C} = \mathbf{cY}, \\
\dfrac{\mathbf{dK}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{B}(\mathbf{t} - \theta),
\end{cases}
\tag{7}
$$

где снова, как и в модели Харрода-Домара, $\mathbf{A}$ - независимые расходы; $\mathbf{B}$ - объем решений о капиталовложениях, $\mathbf{K}$ - основной капитал, $\mathbf{Y}$ - продукция, производимая в единицу времени, $\mathbf{Z}$ - спрос, $\mathbf{C}$ - потребительские расходы, $\mathbf{I}$ - инвестиционные расходы.

Следует отметить, что все рассмотренные модели являются сильно укрупненными и основываются исключительно на зависимости мультипликатор - акселератор и некоторых тесно примыкающих к ним различиях между решениями об инвестициях, фактическими затратами на капиталовложения и поставками капитальных благ. Перечень этих моделей с указанием их достоинств (простота и наглядность) и недостатков (схематичность) можно продолжать до бесконечности.

При анализе локальной экономики представляется разумным найти "золотую середину", т.е. разумный компромисс между степенью подробности модели, вычислительной эффективностью и простотой интерпретации результатов расчета для выработки эффективного управленческого решения.

4. Модель Гудвина-Калецкого

Всем вышеперечисленным требованиям, на наш взгляд, удовлетворяет модель Гудвина-Калецкого, предложенная в серии работ самарских авторов и подробно описанная в монографии [5]. Ниже мы изложим основные положения этих работ.

Предположим, что в локальной экономике взаимодействуют между собой $\mathbf{N}$ предприятий (отраслей хозяйства).

Синтезируем модели Калецкого [9] и Гудвина [6] для $\mathbf{i}$- го предприятия без учета взаимного влияния предприятий:

$$
\mathbf{Z}_i = \mathbf{C}_i + \mathbf{I}_i + \mathbf{A}_i \;, \tag{8}
$$

где Z_i - спрос в i - м предприятии, C_i - потребительские расходы в i - м предприятии, I_i - инвестиционные расходы, A_i - независимые расходы. В свою очередь, каждая их этих позиций может быть представлена в виде

$$B_i = \alpha_i (1 - c_i) Y_i - \kappa_i \cdot K_i \ , \tag{9}$$

где Y_i - продукция i - го предприятия, K_i - величина основного капитала i - го предприятия, B_i - объем решений о капиталовложениях в i – е предприятие. Согласно работам [1,5-10]

$$I_i = \frac{1}{\theta_i} \int_{t-\theta_i}^{t} B_i(t')dt' \ , \tag{10}$$

причем θ_i - время запаздывания (отставания инвестиционных расходов от решения о капиталовложениях в i - е предприятие). Потребительские расходы C_i i - го предприятия связаны с произведенной продукцией Y_i стандартным соотношением

$$C_i = c_i \cdot Y_i \ . \tag{11}$$

Кроме того, величина основного капитала меняется с течением времени по закону

$$\frac{dK_i}{dt} = B_i(t - \theta_i) \ . \tag{12}$$

В отличие от классической модели Калецкого мы должны добавить зависимость между спросом и произведенным в i - м предприятием продуктом:

$$Y_i = \frac{Z_i \lambda_i}{\hat{D} + \lambda_i} \ , \tag{13}$$

где $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$ - дифференциальный оператор. Связь (13) описывает отставание произведенного продукта от величины спроса.

Попутно заметим, что входящие в уравнения (8)-(13) константы α_i, c_i, k_i, θ_i и λ_i являются параметрами, подлежащими нахождению в процессе идентификации обсуждаемой математической модели. Следующий шаг - рассмотрение соотношений (8)-(13) как системы $i = \overline{1, N}$ уравнений:

$$\begin{cases} Z_i = C_i + I_i + A_i, \\ B_i = \alpha_i \cdot (1 - c_i) \cdot Y_i - k_i \cdot K_i, \\ C_i = c_i \cdot Y_i, \\ I_i = \dfrac{1}{\theta_i} \displaystyle\int_{t-\theta_i}^{t} B_i(t')dt', \\ \dfrac{dK_i}{dt} = B_i(t - \theta_i), \\ Y_i = \dfrac{Z_i \lambda_i}{\hat{D} + \lambda_i}. \end{cases} \tag{14}$$

Взаимное влияние предприятий можно учесть, вводя перекрестные члены. Для обозначения соответствующих коэффициентов мы будем употреблять греческие буквы $\beta, \gamma, \delta, \ldots$. Например, понятно, что на уровне руководства суммарные инвестиции ограничены:

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = I \ . \tag{15}$$

Ограничен также суммарный основной капитал:

$$\sum_{i=1}^{N} K_i = K \ . \tag{16}$$

В первом приближении можно считать также подчиняющимся системе (14) общий объем решений о капиталовложениях:

$$\sum_{i=1}^{N} B_i = B. \tag{17}$$

Приращение основного капитала **i** - го предприятия

$$\frac{dK_i}{dt} = B_i(t-\theta_i) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \beta_{ij} Y_j(t). \tag{18}$$

Например, приращение капитала одного субъекта локальной экономики напрямую зависит от выпуска продукции другим субъектом, входящим в рассматриваемую систему.

На данном этапе рассмотрения дальнейшее усложнение модели Гудвина-Калецкого представляется нецелесообразным.

Учет управленческих решений и инфляционных процессов в рассматриваемой модели осуществляется заменой коэффициентов α_i, c_i, k_i, θ_i, λ_i, β_{ij} и γ_{ij} на функции времени. В конечном счете система уравнений модели Гудвина-Калецкого принимает вид

$$\begin{cases} Z_i(t) = C_i(t) + I_i(t) + A_i(t), \\ B_i(t) = \alpha_i \cdot (1-c_i) \cdot Y_i(t) - k_i \cdot K_i(t), \\ C_i(t) = c_i \cdot Y_i(t), \\ I_i(t) = \dfrac{1}{\theta_i}\left(K_i(t+\theta_i) - K_i(t)\right), \\ \dfrac{dK_i(t)}{dt} = B_i(t-\theta_i) + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \beta_{ij} Y_j(t-\theta_i), \\ Y_i(t) = \left(\hat{D} + \lambda_i\right)^{-1} Z_i(t)\lambda_i + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \gamma_{ij} \cdot \left(\hat{D} + \lambda_j\right)^{-1} Z_j(t)\lambda_j, \end{cases} \tag{19}$$

при ограничениях на уровне дирекции:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{N} I_i = I; \sum_{i=1}^{N} K_i = K; \sum_{i=1}^{N} B_i = B. \right. \tag{20}$$

Если рассматривать локальную экономику как целостную систему, то система уравнений (19) сильно упрощается:

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt} = \lambda \cdot \left(\dfrac{1}{\theta}[K(t+\theta) - K(t)] + A(t) - (1-c)Y(t) \right), \\ \dfrac{dK(t+\theta)}{dt} = \alpha \cdot (1-c) \cdot Y(t) - k \cdot K(t). \end{cases} \tag{21}$$

Еще раз подчеркнем, что в системе (21) параметр λ определяет запаздывание предложения от спроса, а θ определяет "инвестиционную историю" системы.

Воспользуемся результатами работ [3, 5] и применим метод преобразования Лапласа для решения системы (21). В лапласовских изображениях она приобретает вид

$$\begin{cases} [\mu + \lambda(1-c)]\tilde{Y}(\mu) - \dfrac{\lambda}{\theta}[\exp(\mu\theta) - 1]\tilde{K}(\mu) = \lambda\tilde{A}(\mu) + Y(0) - \dfrac{\lambda}{\theta}\exp(\mu\theta)\tilde{K}_0(\mu), \\ -\alpha(1-c)\tilde{Y}(\mu) + [\mu \cdot \exp(\mu\theta) + k]\tilde{K}(\mu) = \mu \cdot \exp(\mu\theta)\tilde{K}_0(\mu) + K(\theta), \end{cases} \tag{22}$$

где величина

$$\tilde{K}_0(\mu) \equiv \int_0^{\theta} dt \cdot \exp(-\mu t) K_0(t) \tag{23}$$

описывает "инвестиционную историю " ($K(t) = K_0(t)$ при $t \in [0,\theta]$).

Система уравнений (22) имеет очевидное решение:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{Y}}(\mu) = \widetilde{\kappa}_1(\mu) + \widetilde{\kappa}_2(\mu) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}(\mu) + \widetilde{\kappa}_3(\mu) \cdot \widetilde{\mathbf{K}}_0(\mu), \\ \widetilde{\mathbf{K}}(\mu) = \widetilde{\eta}_1(\mu) + \widetilde{\eta}_2(\mu) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}(\mu) + \widetilde{\eta}_3(\mu) \cdot \widetilde{\mathbf{K}}_0(\mu), \end{cases} \tag{24}$$

где

$$\begin{cases} \widetilde{\kappa}_1(\mu) = \dfrac{\big(\mu \exp(\mu\theta) + \mathbf{k}\big)\mathbf{Y}(0) + (\lambda/\theta)\big(\exp(\mu\theta) - 1\big)\mathbf{K}(\theta)}{\Delta(\mu)}, \\ \widetilde{\kappa}_2(\mu) = \dfrac{\lambda\big(\mu \exp(\mu\theta) + \mathbf{k}\big)}{\Delta(\mu)}, \\ \widetilde{\kappa}_3(\mu) = -\dfrac{\lambda}{\theta}\dfrac{\big(\mu + \mathbf{k}\big)\exp(\mu\theta)}{\Delta(\mu)}, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\eta}_1(\mu) = \dfrac{\alpha(1-\mathbf{c})\mathbf{Y}(0) + \big(\mu + \lambda(1-\mathbf{c})\big)\mathbf{K}(\theta)}{\Delta(\mu)}, \\ \widetilde{\eta}_2(\mu) = \dfrac{\alpha\lambda(1-\mathbf{c})}{\Delta(\mu)}, \\ \widetilde{\eta}_3(\mu) = \dfrac{1}{\theta}\dfrac{\big(\theta\mu^2 + \lambda(1-\mathbf{c})(\theta\mu - \alpha)\big)\exp(\mu\theta)}{\Delta(\mu)}, \end{cases} \tag{26}$$

причем аналитическая функция

$$\Delta(\mu) = (\mu + \lambda(1-\mathbf{c}))(\mu \cdot \exp(\mu\theta) + \mathbf{k}) - \lambda\alpha \cdot (1-\mathbf{c})\frac{\exp(\mu\theta) - 1}{\theta} \tag{27}$$

представляет собой определитель системы уравнений (22).

Коэффициенты, определяемые соотношениями (25), (26), также являются аналитическими функциями аргумента μ. Они имеют лишь полюса, положение которых определяется трансцендентным уравнением

$$\Delta(\mu) = 0. \tag{28}$$

Лапласовские оригиналы этих функций имеют вид

$$\begin{cases} \kappa_i(\mathbf{t}) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{j}\big[\exp(\mu \mathbf{t})\widetilde{\kappa}_i(\mu)\big] = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \kappa_i^{(j)}(\mathbf{t}), \\ \eta_i(\mathbf{t}) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{j}\big[\exp(\mu \mathbf{t})\widetilde{\eta}_i(\mu)\big] = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta_i^{(j)}(\mathbf{t}). \end{cases} \tag{29}$$

Если уравнение (28) имеет корни кратности $\mathbf{s}_j$ (включая тривиальный случай простых корней, т.е. $\mathbf{s}_j = 1$), то j -тое слагаемое в сумме (29) имеет вид

$$\begin{cases} \kappa_i^{(j)}(\mathbf{t}) = \dfrac{1}{(\mathbf{s}_j - 1)!}\dfrac{d^{\mathbf{s}_j - 1}}{d\mu^{\mathbf{s}_j - 1}}\Big[\exp(\mu \mathbf{t})\widetilde{\kappa}_i(\mu)(\mu - \mu_j)^{\mathbf{s}_j}\Big]_{\mu=\mu_j} = \exp(\mu_j \mathbf{t}) \cdot \sum\limits_{k=1}^{\mathbf{s}_j - 1} \mathbf{t}^k \mathbf{v}_k, \\ \eta_i^{(j)}(\mathbf{t}) = \dfrac{1}{(\mathbf{s}_j - 1)!}\dfrac{d^{\mathbf{s}_j - 1}}{d\mu^{\mathbf{s}_j - 1}}\Big[\exp(\mu \mathbf{t})\widetilde{\eta}_i(\mu)(\mu - \mu_j)^{\mathbf{s}_j}\Big]_{\mu=\mu_j} = \exp(\mu_j \mathbf{t}) \cdot \sum\limits_{k=1}^{\mathbf{s}_j - 1} \mathbf{t}^k \mathbf{w}_k, \end{cases} \tag{30}$$

где $\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k$ - постоянные коэффициенты.

Для нахождения окончательного результата воспользуемся теоремой о конволюции, а также тем фактом, что независимые расходы $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ и "инвестиционная история" $\mathbf{K}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}_0(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in [0, \theta]$ в рамках решаемой задачи считаются известными функциями времени.

Тогда

$$\begin{cases} \mathbf{Y(t)} = \sum_{l=1}^{3} \mathbf{Y}_l\mathbf{(t)}, \\ \mathbf{K(t)} = \sum_{l=1}^{3} \mathbf{K}_l\mathbf{(t)}, \end{cases} \tag{31}$$

причем

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1\mathbf{(t)} = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_1^{(j)}\mathbf{(t)}, \\ \mathbf{K}_1\mathbf{(t)} = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_1^{(j)}\mathbf{(t)}, \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_2\mathbf{(t)} = \int_0^t \kappa_2(\xi)\mathbf{A}(\mathbf{t}-\xi)\mathbf{d}\xi, \\ \mathbf{K}_2\mathbf{(t)} = \int_0^t \eta_2(\xi)\mathbf{A}(\mathbf{t}-\xi)\mathbf{d}\xi, \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_3\mathbf{(t)} = \int_0^\tau \kappa_3(\xi)\mathbf{K}_0(\mathbf{t}-\xi)\mathbf{d}\xi, \\ \mathbf{K}_3\mathbf{(t)} = \int_0^\tau \eta_3(\xi)\mathbf{K}_0(\mathbf{t}-\xi)\mathbf{d}\xi, \end{cases} \tag{34}$$

где $\tau = \mathbf{min(t,\theta)}$. Формулы (29)- (34) дают исчерпывающее описание динамики изучаемой экономической системы "в целом". В случае малых времен запаздывания решений об инвестициях система (22) превращается в стандартную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. В нулевом приближении по параметру θ уравнение (27) принимает вид

$$\mu^2 + 2\zeta_1\mu + \zeta_2 = \mathbf{0}. \tag{35}$$

где $\mathbf{2\zeta_1 = \lambda(1-\alpha)(1-c)+k}$, $\mathbf{\zeta_2 = k\lambda(1-c)}$. Корни этого уравнения очевидным образом выражаются через параметры модели Гудвина - Калецкого:

$$\mu_{1,2} = -\zeta_1 \pm \sqrt{(\zeta_1)^2 - \zeta_2}. \tag{36}$$

Сама модель Гудвина - Калецкого в этом случае становится тривиальной. Однако, поскольку ее строгая идентификация едва ли является целесообразной, то определение входящих в нее параметров следует производить с помощью итерационного процесса, уточняя параметры в процессе детализации модели.

Изложенный выше математический аппарат, последовательно развитый в монографии [9], позволяет качественно исследовать исключительно важный вопрос о том, каков оптимальный сценарий инвестиций в локальную экономику. В этой же монографии дан детальный численный анализ различных инвестиционных сценариев в промышленности.

Однако наша задача состоит в том, чтобы подобрать адекватный математический аппарат и исследовать экономические процессы в системах, для которых времена задержки в подсистеме «инвестиции - капитал» (отставание видимых результатов инвестиций от момента принятия решения об инвестициях) достаточно велики. В этом случае приближение «расторопного инвестора», использовавшееся автором работы [9], становится принципиально непригодным.

Дело в том, что для социально-экономических систем, заметная эволюция которых связана с временами, большими времени релаксации в чисто экономической подсистеме, существенными становятся нелинейные эффекты.

В свете вышеизложенного представляется разумным осуществить синтез уравнений математической экономики, описывающих переходные и колебательные процессы в системе «спрос-предложение», с нелинейными уравнениями, описывающими изменение демографической ситуации в обществе в духе работы [4]. Кроме того, необходимо исследовать динамику производственных процессов, поскольку производительность труда сильно зависит от того, что Станислав Лем очень образно и емко назвал «суммой технологий».

Выводы

1. В работе сделан обзор наиболее популярных линейных экономических моделей, в которых реализован принцип обратной связи.
2. Поставлена задача построения агрегированной нелинейной модели социально-экономического развития общества на базе модели, предложенной в работе [4], с учетом современных реалий.

Список литературы

1. Аллен Р. Математическая экономия -М.: ИИЛ, 1963. 667 с.
2. Винер Н. Кибернетика. -М.: Советское радио, 1968. 326 с.
3. Зубов В.И. Лекции по теории управления. -М.: Наука, 1975. 494 с.
4. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. -М.: Наука, 1997. 495 с.
5. Швидак А.И. Качественные методы анализа нестабильной экономики. / СамИИТ, РАТ. Самара, 2000. 170 с.
6. Goodwin R.M. The non-linear accelerator and the Persistence of Business Cycles//Econometrica, 1951. **19**, p.1.
7. Harrod R.F. Towards a Dynamics Economics. 1948
8. Domar E.D. Capital expansion// Rate of Growth and Employment, 1946, **14**, p.137.
9. Kalecki M. Theory of Economic Dynamics// Allen and Unwin, 1954.
10. Phillips A.W. Stabilisation Policy in Closed Economy// Economic Journal, 1954, (1) **64**, p.290.