

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

И.П. Завершинский, М.Э. Лисянский, В.В. Максимов, Ю.Л. Ратис

Введение

При анализе эволюции различных систем довольно часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда точная математическая модель, описывающая процесс, неизвестна.

При этом возникают два класса задач. Первый - решение обратной задачи нелинейной динамики и восстановление модели, хотя бы топологически эквивалентной (на фазовой плоскости) реализации процесса. Второй - предсказание дальнейшего поведения системы на промежутке времени, превышающем данный.

Часто имеющиеся в наличии данные представляют собой реализацию каких-либо переменных процесса. Фиксируемые в эксперименте динамические переменные являются лишь частью переменных, которыми описывается данная система. Отсутствие информации о математической модели нередко делает невозможным предсказание поведения системы. Поэтому особое значение имеет восстановление дифференциальных уравнений динамических систем по наблюдаемым временным рядам. Привлекают внимание три аспекта решения этой проблемы. Во-первых, восстановление системы дифференциальных уравнений делает возможным предсказание поведения динамической системы на временах, превышающих характерное время автокорреляции исследуемого экспериментального процесса. Другой аспект заключается в возможности сочетать формальную процедуру восстановления дифференциальных уравнений с физическим осмыслением восстановленных переменных и нелинейностей системы. Наконец, в-третьих, восстановление системы дифференциальных уравнений позволяет провести имитационный анализ эволюции свойств системы при изменении ее параметров.

Степень сложности решения задачи восстановления дифференциальных уравнений определяется не только типом исследуемой системы и уровнем шумов, но и количеством переменных, доступных наблюдению. В данной работе развит метод выявления скрытых переменных динамической системы в форме, удобной для восстановления дифференциальных уравнений в определенном классе, что позволяет при исследовании систем n -го порядка строить топологически эквивалентные системы по реализации одной динамической переменной процесса. Доступность реализации одной динамической переменной процесса является часто встречающейся ситуацией в экспериментальных наблюдениях.

Вполне однозначное решение такого рода обратной задачи возможно для некоторых классов динамических систем. Важным фактором является топологическая «уникальность» фазовых траекторий системы. Этому условию удовлетворяют динамические системы с хаосом в силу существования в их фазовом пространстве странного аттрактора того или иного типа. В этом случае фазовая траектория пронизывает обширную часть фазового пространства и поэтому содержит в себе значительно большую информацию о системе по сравнению с регулярными аттракторами типа предельного цикла. Однако если речь идет о предсказании поведения динамической системы, то следует отметить, что для регулярных периодических процессов задача предсказания значительно проще, так как в этом случае время предсказания ограничивается действием внешнего шума, который в ряде случаев можно исключить фильтрацией. Для хаотических систем ситуация значительно сложнее, так как сама система обладает свойством локальной неустойчивости.

Для построения и исследования алгоритма решения обратной задачи и построения топологически эквивалентной системы уравнений взяты две хорошо изученные нелинейные автостохастические системы 3-го порядка - система уравнений Лоренца и Неймарка [1,2].

Система уравнений Лоренца – наиболее известная и изученная базовая система теории динамического хаоса, к которой сводится довольно широкий класс задач. Все фазовые траектории системы образуют странный аттрактор.

Рассмотренный далее алгоритм восстановления дифференциальных уравнений автостохастических систем по временной реализации одной переменной может быть применен к

целому ряду динамических систем. Многие динамические модели могут иметь топологически эквивалентную систему дифференциальных уравнений, и в этом случае возможно предсказание поведения системы на временах, превышающих время реализации переменной.

Зачастую не существует математической модели из-за сложности системы и отсутствия повторяемости эксперимента. Например, сложность описания всех составляющих в биологических системах и сильное влияние внешних факторов делают математические модели весьма приблизительными и громоздкими для анализа. Обилие доступных нам экспериментальных данных, как правило, содержит в себе не только информацию о процессе, но и шумовую компоненту, не несущую на себе смысловой нагрузки. Устранение шумовой компоненты важно для увеличения времен предсказания.

1. Решение обратных задач с помощью методов регрессии и авторегрессии

Интерес к решению обратных задач нелинейной динамики возник относительно недавно, но накопление большого числа экспериментальных данных в различных областях науки способствовало развитию методов решения обратных задач. Особое развитие методы решения обратных задач получили при развитии диагностических систем и систем распознавания образов. Как отмечалось в [4], решение обратных задач нелинейной динамики является ключевой задачей в обработке экспериментальных данных медицинской диагностики. Многие другие задачи предсказания поведения системы могут быть решены при помощи решения обратной задачи.

Для решения задачи предсказания поведения системы по выборке значений в [5] и [6] использовался метод регрессии с различными вариациями и дополнениями. Суть метода регрессии заключалась в том, что искался функционал $F(x, \alpha)$, минимизирующий выражение вида:

$$I(\alpha) = \int (y - F(x, \alpha))^2 dx dy$$

При этом предсказание поведения системы зависело от объема выборки, но для предсказания поведения системы на временах, не превышающих характерное время автокорреляции, слабо зависело от шумов, наложенных на реализацию.

Дальнейшее развитие задача предсказания поведения системы на временах, сравнимых со временем автокорреляции, получила в методе авторегрессии, описанном в [5,6]. Этот метод базируется на нахождении следующего значения ряда через предыдущие с использованием соотношения $x_{n+1} = g(x_n, \dots, x_{n-1})$. где $g(x_n, \dots, x_{n-1})$ - полином m -ной степени от переменных x_n, \dots, x_{n-1} .

Предсказание поведения системы с помощью этого метода малочувствительно к шумам на временах, не превосходящих время автокорреляции, но имеет ряд существенных недостатков. Во-первых, малое время достоверного предсказания поведения системы (не более времени автокорреляции). Во-вторых, анализ физических основ процессов затруднен из-за наличия нелинейностей, не характерных основам системы, а вызванных результатами решения обратной задачи. В-третьих, исходная реализация должна быть достаточно большой по объему и для восстановления одной из динамических переменных требуется наличие реализации всех динамических переменных системы, что зачастую невозможно без априорных знаний о процессе. Отмеченные недостатки этих методов являются существенными. Из-за них невозможно использовать указанные методы для анализа реальных экспериментальных данных.

2. Метод восстановления топологически эквивалентного уравнения

Важной проблемой при решении поставленной задачи является задача фильтрации внешних шумовых воздействий. Будем считать, что внешние шумы аддитивны.

Рассмотрим наблюдаемый процесс $y(t)$ как совокупность динамического сигнала $x(t)$ и аддитивного шума $\xi(t)$, записанных в виде дискретного временного ряда:

$$y_i = x_i + \xi_i, \tag{1}$$

где $i = 1, \dots, N$; $y_i = y(t_i)$, $x_i = x(t_i)$, $\xi_i = \xi(t_i)$.

Тем самым налагается существенное ограничение на тип флуктуационных процессов, происходящих в исследуемых системах.

Наряду со спектральными методами фильтрации, получившими широкое распространение, использовались два других достаточно эффективных, но менее известных метода ликвидации шумовой компоненты процесса.

Первый из используемых нами способов фильтрации шума заключается в следующем.

Рассмотрим функционал вида

$$\Phi = \sum_{i=1}^N [\alpha(x_i - x_{i+1})^2 + \xi_i^2]. \quad (2)$$

где α - весовой коэффициент.

Минимум этого функционала достигается при минимальном уровне шума ξ_i и минимальной разности $x_i - x_{i+1}$, т.е. выделяется динамическая компонента процесса с максимальным временем автокорреляции. Из условия минимума функционала (2) получаем линейную систему уравнений:

$$\alpha Dy = M(\alpha)\xi, \quad (3)$$

где

$$Dy = \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ y_1 - 2 \cdot y_2 + y_3 \\ y_2 - 2 \cdot y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{N-1} - y_N \end{pmatrix}; \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix};$$

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} -(1+\alpha) & \alpha & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & -(1+2\alpha) & \alpha & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & -(1+2\alpha) & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha & -(1+\alpha) \end{pmatrix}.$$

В результате решения системы (3) находим N отсчетов шумовой компоненты ξ_i . Частично очищенный от шума сигнал определяется выражением

$$y_i^{cor} = y_i - \xi_i. \quad (4)$$

Подставляя y_i^{cor} в систему уравнений (2) и решая её относительно ξ_i с учетом (4) находим новое значение y_i^{cor} .

Последовательное n -кратное применение процедуры (3), (4) к наблюдаемому процессу позволяет достаточно хорошо очистить исходный сигнал от аддитивного шума. Выбор фактора α определяется из компромисса между количеством шагов фильтрации и степенью искажения динамической компоненты сигнала при фильтрации.

Второй способ редукции шумовой компоненты - это SVD (single value decomposition) - фильтрация с применением винеровского фильтра для собственных значений ковариационной матрицы, описанного в [7]. Этот метод удобно применять после описанного выше для уточнения собственных значений и собственных векторов ковариантной матрицы исследуемого процесса. С учетом шума собственные значения ковариантной матрицы записываются в виде $\beta_j = \beta_j^s + \beta_j^{\xi}$, ($j = 1, \dots, m$), где β_j^s - собственные значения в отсутствие шума, β_j^{ξ} - вклад в собственные значения шумовой компоненты процесса.

Составим проекционную матрицу вида

$$P_{ik} = \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{\beta_j^{\epsilon}}{\beta_j} \right) \mu_{ji} \mu_{jk} \quad (5)$$

Для фильтруемого сигнала получим следующее выражение:

$$y_i^{\text{cor}} = \sum_{k=1}^m y_k \frac{1}{1+m} \sum_{n=i-m}^i P_{i-n, k-n} \quad (6)$$

где y_i^{cor} стремится к x_i при последовательном применении процедур (5), (6).

Предположим, что после фильтрации шумовой компоненты исследуемого процесса имеется чисто динамическая составляющая $x(t)$. Определим размерность пространства вложения и построим ортонормированный базис из независимых переменных, а также выявим скрытые динамические переменные и построим оптимальный базис и формы восстановления дифференциальных уравнений.

Рассмотрим общий случай, когда размерность системы равна N . Зададим размерность пространства вложения, равную $n > N$. Выберем n переменных, определяемых по заданной реализации исходного процесса, характерное время дискретизации τ : $x_{1k} = x(t_k)$, $x_{2k} = x(t_2 + \tau)$, ..., $x_{nk} = x(t_k + n\tau)$. Тем самым определим вектор состояния x_k динамической системы в момент времени t_k . Собственные векторы S_i ($i = 1, \dots, n$) ковариантной матрицы \bar{C} определяются из следующей системы однородных уравнений:

$$(\bar{C} - \beta_i \bar{E}) S_i = 0 \quad (7)$$

где

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}, \quad S_i = \begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \vdots \\ \mu_{in} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$\sigma_{ik} = \sum_{j=0}^n x^2(t_k + j\tau)$, $\sigma_{ki} = \sigma_{ik} = \sum_{j=0}^n x(t_k + j\tau)x(t_i + j\tau)$, $\mu_{i1}, \dots, \mu_{in}$ - координаты i -го собственного вектора, β_i - i -ое собственное значение, \bar{E} - единичная матрица.

Первые N векторов S_i составляют базис для новых переменных. Переход к ним осуществляется с помощью выражения

$$z_{ik} = \frac{x_k S_i}{|S_i|} \quad (9)$$

Используя при $\tau \rightarrow 0$ разложение переменных x_{jk} ($j = 2, \dots, n$) в ряд Тейлора с точностью до $O(\tau^N)$ получим

$$z_{ik} = \sum_{m=1}^N \left[\frac{d^{(m-1)}}{dt^{(m-1)}} x_{1k} \right] u_{im},$$

где $u_{im} = \sum c_{imj} \mu_{ij}$ - координаты новых базисных векторов S'_i , число которых равно размерности системы N ; c_{imj} - константы.

Выберем в качестве новых переменных величины

$$x'_{mk} = \frac{d^{(m-1)}}{dt^{(m-1)}} x_{1k} \quad (10)$$

В соответствии с выражением (10) переход к новым переменным x'_{mk} осуществляется в результате решения следующей системы уравнений:

$$X'_k \bar{R} = Z_k \quad (11)$$

где

$$\mathbf{X}'_k = \begin{pmatrix} x'_{1k} \\ \vdots \\ x'_{Nk} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & \dots & u_{NN} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} z_{1k} \\ \vdots \\ z_{Nk} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (11) имеет вид

$$\mathbf{X}'_k = \mathbf{Z}_k \bar{\mathbf{R}}^{-1}. \quad (12)$$

Варьируя размерность пространства вложения n , изменяем ориентацию векторов \mathbf{S}'_k , что позволяет значительно уменьшить действие шумов и влияние ошибки усечения ряда Тейлора.

Для системы 3-го порядка, используя выражение (12) и выбирая размерность пространства вложения $n > 5$, получим:

$$x'_{1k} = c_1 z_{1k}, \quad x'_{2k} = c_2 z_{2k}, \quad x'_{3k} = c_3 z_{1k} + c_4 z_{3k},$$

где c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) - константы.

В соответствии с (11) имеем:

$$x'_{1k} = \dot{x}_{1k}, \quad x'_{2k} = \dot{x}_{2k}, \quad x'_{3k} = \dot{x}_{3k}. \quad (13)$$

При восстановлении системы дифференциальных уравнений ограничимся обыкновенными дифференциальными уравнениями с полиномиальными нелинейностями, которые описывают достаточно широкий класс динамических систем. В соответствии с видом выражения для новых переменных (13) будем искать систему уравнений в следующей форме (штрихи и индекс k у новых переменных опущены):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = \frac{\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)}{\mathbf{f}(x_1)}, \quad (14)$$

где $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$ - полином M -й степени от переменных x_1, x_2, x_3 ; $\mathbf{f}(x_1)$ - одна из функций вида 1 ; x_1 ; x_1^2 ; $x_1 x_j$; $i, j = 1, 2, 3$.

Задача восстановления численных значений коэффициентов функций \mathbf{F} и \mathbf{f} последнего уравнения системы (14) сводится к поиску минимума функционала:

$$\Phi = \sum_{k=1}^N [f_k \dot{x}_{3k} - F_k]^2. \quad (15)$$

где f_k , F_k - значения функций \mathbf{F} и \mathbf{f} в момент времени t_k .

Из условия минимума функционала (15) получим систему линейных уравнений вида

$$\tilde{\mathbf{X}}_F^T \mathbf{D} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{X}}_F^T \tilde{\mathbf{X}}_F \mathbf{A}. \quad (16)$$

где

$$\mathbf{D} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} f_1 \dot{x}_{31} \\ \vdots \\ f_N \dot{x}_{3N} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{X}_F = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{11}^2 & (x_{11} x_{21}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & x_{3N} & x_{1N}^2 & (x_{1N} x_{2N}) & \dots \end{pmatrix}.$$

\mathbf{A} - вектор коэффициентов полинома \mathbf{F} . $\tilde{\mathbf{X}}_F$ - матрица значений членов полинома \mathbf{F} , взятых в моменты времени от t_1 до t_N .

Решая систему (16), найдем значения коэффициентов A_j полинома $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$ и тем самым определим конкретный вид системы уравнений (14).

3. Система Лоренца

Проиллюстрируем рассмотренную методику на примере системы Лоренца:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy. \quad (17)$$

Параметры σ , b и r предполагаются положительными. Дальнейшие численные исследования относятся к случаю $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r < 150$.

Замена переменных x , y , z на $-x$, $-y$, z не меняет вида уравнений (17), и поэтому фазовый портрет симметричен относительно оси z .

Все фазовые траектории системы (17) идут внутрь сферы:

$$V = x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2 = K^2(\sigma + r)^2 \quad (18)$$

с центром в точке $x = y = 0$, $z = \sigma + r$ и радиусом $K(\sigma + r)$. Действительно, согласно (17) производная по времени от функции

$$V = x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2$$

равна:

$$\dot{V} = -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2b\left(z - \frac{\sigma + r}{2}\right)^2 + b\frac{(\sigma + r)^2}{2}.$$

Поэтому сделанное утверждение будет иметь место, если сфера (18) лежит вне эллипсоида, определяемого уравнением $\dot{V} = 0$, что заведомо имеет место, если

$$K^2 = \frac{1}{4} + \frac{b}{4} \max\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right).$$

При возрастании времени имеет место повсеместное сжатие фазового объема, поскольку для уравнений (17) выполняется условие:

$$\operatorname{div}(x, y, z) = -1 - b - \sigma < 0. \quad (19)$$

Точка O ($x = y = z = 0$) является состоянием равновесия при всех значениях параметров σ , b и r . Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0. \quad (20)$$

Из соотношения (20) следует, что при $r < 1$ имеет место состояние равновесия типа $O^{3,0}$; при $r > 1$ - типа $O^{2,1}$. То есть соответственно устойчивый узел и седло-узел, а бифуркация происходит при переходе через границу.

При $r > 1$ кроме описанного состояния равновесия O ($x = y = z = 0$) имеются еще два состояния равновесия - O_1 и O_2 с координатами $x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}$ и $z = r - 1$. Они возникают при потере устойчивости состоянием равновесия O при $r = 1$ и расположены симметрично относительно оси z . В силу симметрии их типы одинаковые и определяются корнями характеристического уравнения:

$$\lambda + (\sigma + b + 1)\lambda + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0. \quad (21)$$

Согласно уравнению (21) при возрастании r от значения $r = 1$ состояния равновесия O_1 и O_2 являются последовательно устойчивыми узлами типа $O_1^{3,0}$ и $O_2^{3,0}$, затем устойчивыми фокусами, и при выполнении условия

$$r > \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \sigma \quad (22)$$

- седлофокусами $O_1^{1,2}$ и $O_2^{1,2}$.

Смена устойчивости состояний равновесия O_1 и O_2 происходит при переходе через границу (22) и поэтому сопровождается либо влипанием в них неустойчивых седловых периодических движений, либо рождением устойчивых периодических движений. Что именно произойдет, зависит от знака ляпуновской величины. Её подсчет показывает, что имеет место влипание неустойчивого периодического движения. При $b = 8/3$ и $\sigma = 10$ потеря устой-

чивости состояниями равновесия и одновременное вливание в них неустойчивых седловых периодических движений. согласно (22) происходит при $r = 24,74$.

Численное моделирование прямой и обратной задачи для системы Лоренца было произведено со следующими параметрами: $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r < 150$. При решении обратной задачи на «чистую» реализацию налагался шум для создания условий, близких к физическому эксперименту. Аддитивный шум в нашем случае использовался равномерно распределенный. Математическое ожидание и дисперсия для каждого из графиков указана дополнительно.

Далее приводится ряд графиков, иллюстрирующих результаты численного эксперимента.

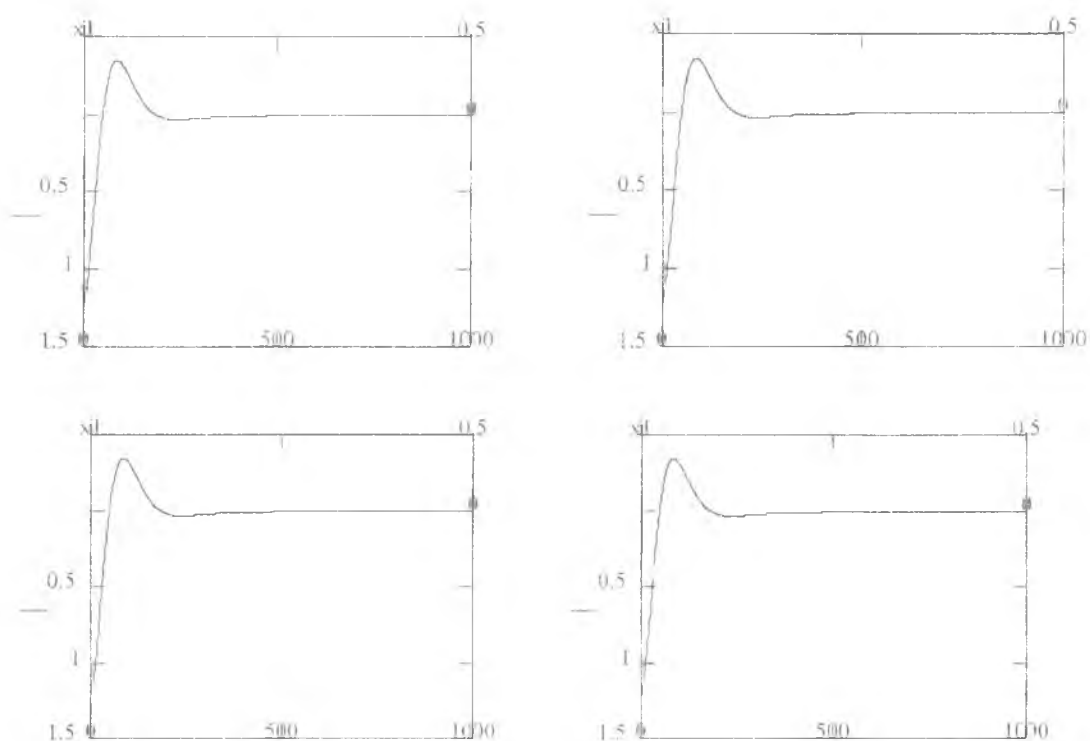


Рис. 1. Реализация переменной x при параметрах $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 8$

На рис. 1 представлены реализации переменной x для четырех стадий: моделирование процесса методом решения прямой задачи, добавление шумовой компоненты к сигналу (уровень шума по амплитуды 10%), фильтрация шумовой компоненты и предсказание поведения системы по восстановленному дифференциальному уравнению. Из рис. 1 хорошо видно, что визуально все четыре графика очень похожи. Однако даже успешная попытка восстановить систему по реализации процесса сопряжена с определенными трудностями.

На рис. 2, размещенном несколько ниже, представлены реализации фазового портрета для четырех стадий: моделирование процесса методом решения прямой задачи, добавление шумовой компоненты к сигналу (уровень шума по амплитуды 10%), фильтрация шумовой компоненты и предсказание поведения системы по восстановленному дифференциальному уравнению. Хорошо видно, что наличие шумовой компоненты мало меняет интегральную картину фазового портрета. Однако совершенно очевидно, что топология фазового портрета при этом меняется. Конкретнее, меняется его фрактальная размерность. Дело в том, что фазовый портрет для прямой задачи представляет собой гладкую кривую. После зашумления он, вообще говоря, становится фракталом.

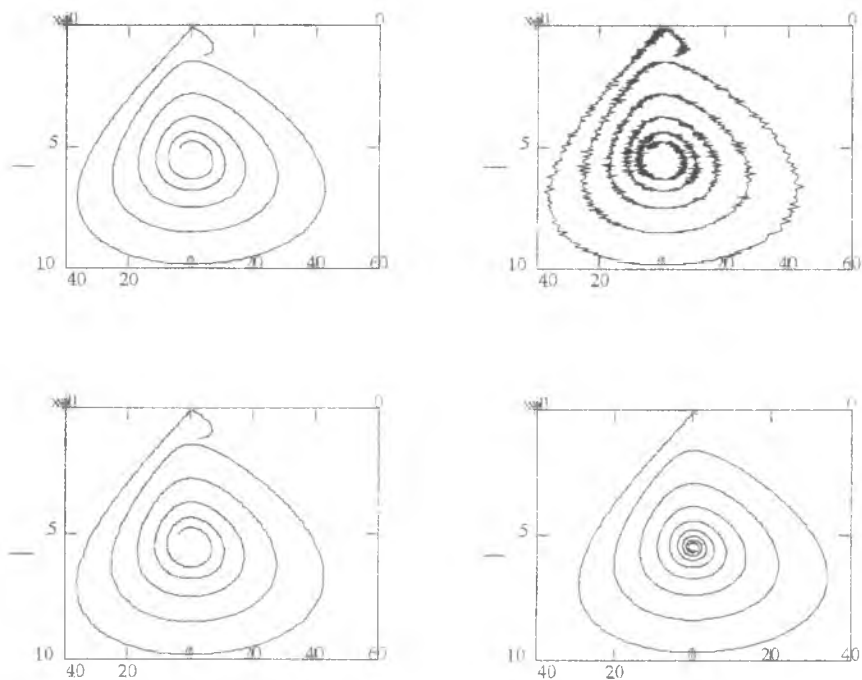


Рис. 2. Реализация фазового портрета при параметрах $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 12,2$

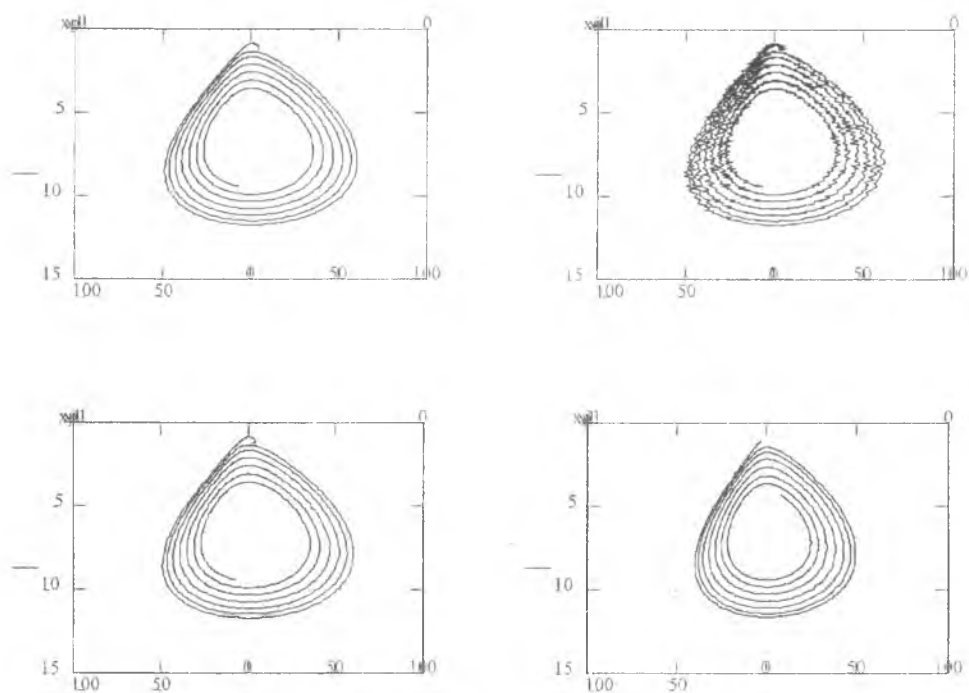


Рис. 3. Реализация фазового портрета при параметрах $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 18$

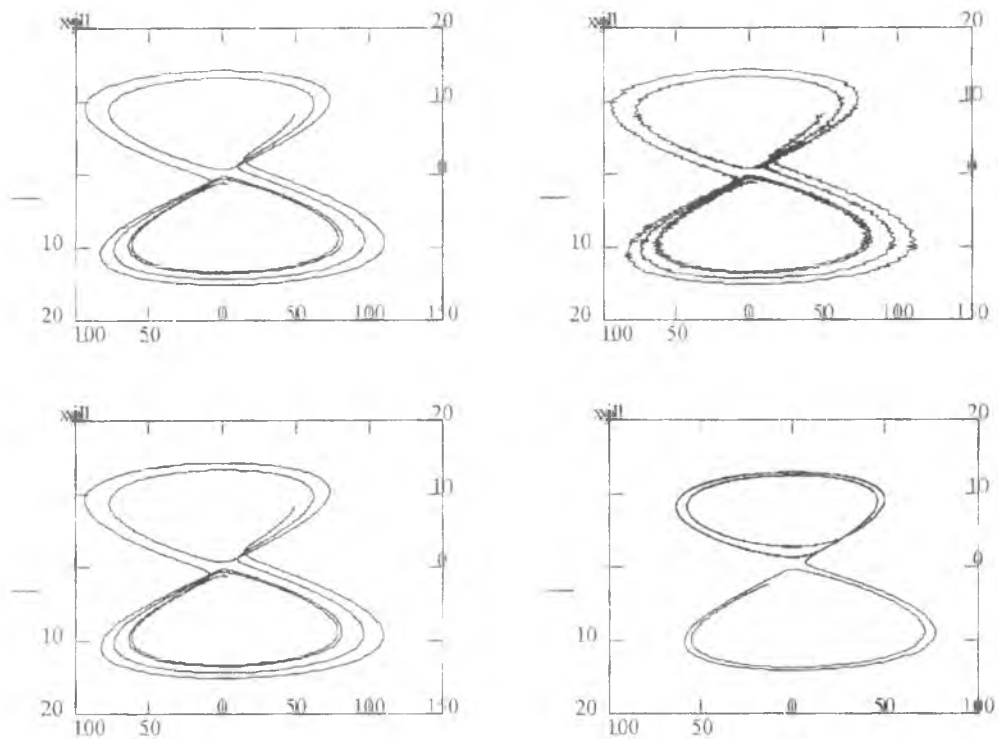


Рис. 4. Реализация фазового портрета при параметрах $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 22,5$

На рис. 3 представлены реализации фазового портрета для четырех стадий: моделирование процесса методом решения прямой задачи, добавление шумовой компоненты к сигналу (уровень шума составляет 10% амплитуды сигнала), фильтрация шумовой компоненты и предсказание поведения системы по восстановленному дифференциальному уравнению.

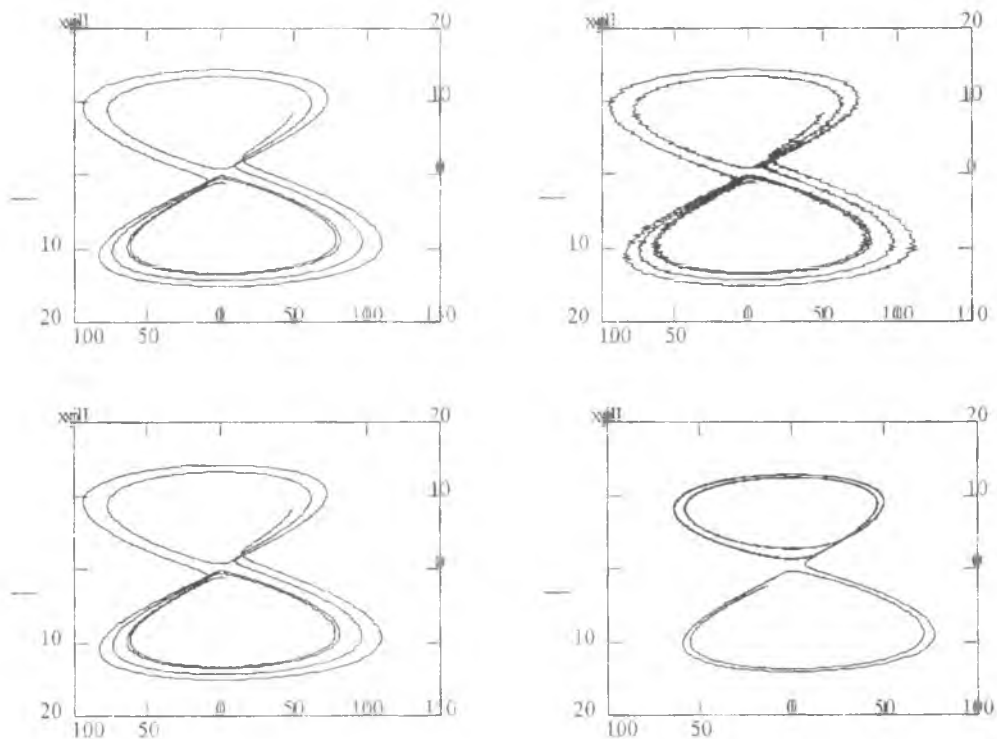


Рис. 5. Реализация фазового портрета при параметрах $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28,8$

На рис. 4 представлены реализации фазового портрета для четырех стадий: 1) моделирование процесса методом решения прямой задачи; 2) добавление шумовой компоненты к сигналу (уровень шума составляет 10% амплитуды сигнала); 3) фильтрация шумовой компоненты и 4) предсказание поведения системы по восстановленному дифференциальному уравнению. На рис. 5 представлены реализации фазового портрета для тех же четырех стадий, что и на рис 3.

4. Исследование и восстановление бифуркаций стохастического аттрактора осциллятора с параметрическим возбуждением

Рассмотрим уравнения вида:

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = M - h\omega + (v + \mu \sin t)\sin \varphi, \quad (25)$$

где φ - угловая переменная, а M , h , v и μ - параметры. Такие дифференциальные уравнения описывают, например, движение дисбалансного ротора или маятника на колеблющемся основании, движение заряженной частицы в поле синусоидальной волны и многое другое и рассмотрены в [1,3]. В системе, описываемой уравнениями (25) возможны как явления синхронизации, так и хаотизации движений. При $M = h = 0$ система (25) представляет собой неавтономную гамильтонову систему, которая при замене $\sin \varphi$ на φ превращается в широко известное уравнение Матье, описывающее явления линейного параметрического возбуждения и резонанса. При $v = 0$ уравнения имеют прямое отношение к задачам синхронизации вибраторов, при исследовании которых были обнаружены как различные типы синхронизмов, так и неперiodические движения, устойчивые по Пуассону, а по современной классификации - хаотические движения.

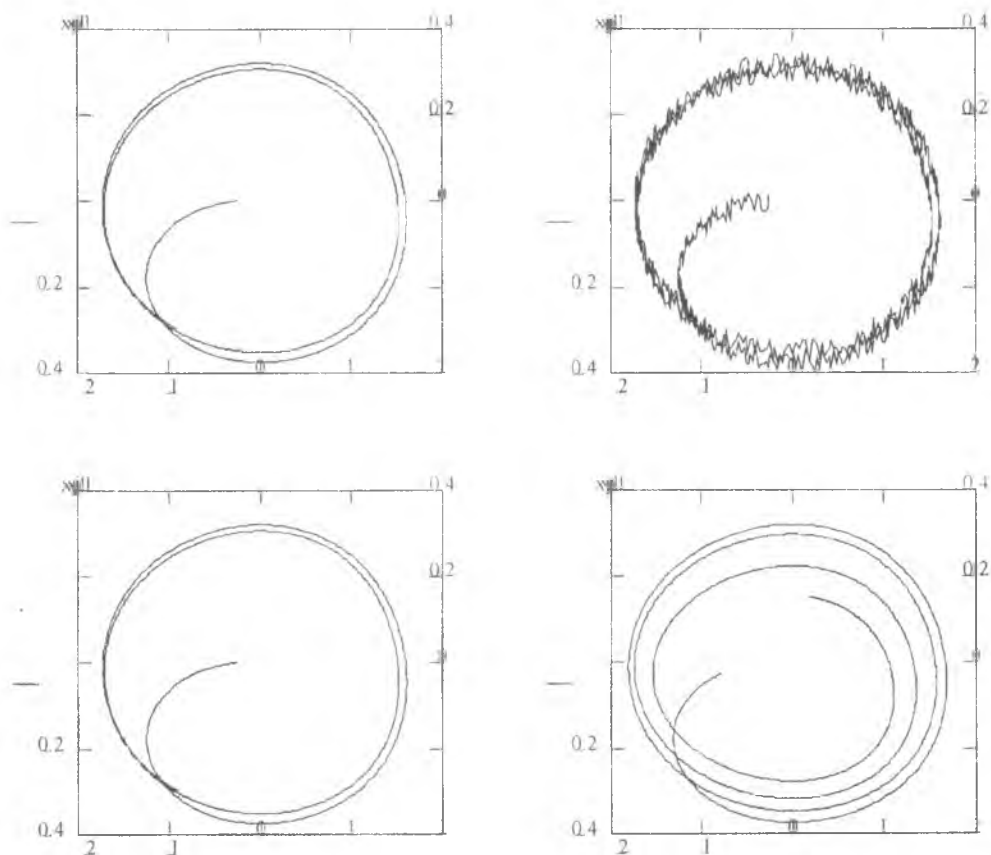


Рис. 6. Реализация фазового портрета при параметрах $v = 0$, $M = 0,1$, $h = 1$ и $\mu = 0,5$

На рис. 6 представлены реализации фазового портрета для четырех стадий: 1) моделирование процесса, методом решения прямой задачи, 2) добавление шумовой компоненты к сигналу (уровень шума по амплитуде составляет 15% от сигнала), 3) фильтрация шумовой компоненты и 4) предсказание поведения системы по восстановленному дифференциальному уравнению.

Заключение

В работе показана возможность восстановления в заданном классе дифференциальных уравнений динамической системы по временной реализации одной переменной при наличии аддитивных шумов. Произведено моделирование восстановления системы дифференциальных уравнений на ряде систем 3-го порядка. Исследовано восстановление режимов с характерными бифуркациями систем. Полученные в результате восстановления дифференциальные уравнения описывают поведение систем на временах, больших, чем время автокорреляции, характерное для восстановления при помощи метода авторегрессии и регрессии.

Список литературы

1. Рабинович М.И. Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. -М.: Наука, 1984. 367 с.
2. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. -М.: Наука, 1987. 424с.
3. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. -М.: Наука, 1984. 320 с.
4. Неймарк Ю.И. и др. Распознавание образов и медицинская диагностика, -М.: Наука, 1972.
5. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / Под ред. Вапника В.Н. -М.: Наука, 1984, 816с.
6. Вапник В.Н. Распознавание образов и восстановление зависимостей. -М.: Наука, 1979. 448 с.
7. Brush J.S. Kadtke J.B. // Proc. ICASSP-92, San Francisco, 1992, p. 321-325.