

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЁВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»  
(СГАУ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

**Устинов Андрей Владимирович**

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ЛАЗЕРНОГО  
ИЗЛУЧЕНИЯ НА АСФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ,  
ОПИСЫВАЕМОЙ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ**

**01.04.05 – Оптика**

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
**Хонина Светлана Николаевна,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Самара – 2015

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1 АСФЕРИЧЕСКАЯ ЛИНЗА ПРИ ЕЁ ГЕОМЕТРО-ОПТИЧЕСКОМ РАССМОТРЕНИИ ....	16
1.1 Асферическая линза.....	16
1.2 Распределение интенсивности на оптической оси .....	23
1.2.1 Приближённое решение .....	24
1.2.2 Частные точные решения .....	25
1.3 Сравнение со сферической линзой .....	30
1.4 Эллиптическая линза.....	31
1.5 Рассмотрение возможности бесконечной интенсивности в точке фокуса.....	33
1.5.1 Бесконечная интенсивность при использовании асферической линзы.....	34
1.5.2 Сжатие фокального отрезка в одну точку .....	36
1.6 Рассмотрение конфигураций хода лучей и расчёт комплексной функции пропускания рефракционных аксиконов.....	39
1.6.1 Расчёт хода лучей при падении излучения на плоскую сторону рефракционного аксикона.....	39
1.6.2 Расчёт хода лучей при падении излучения на остриё рефракционного аксикона .....	47
1.6.3 Примеры вычисления комплексной функции пропускания аксикона.....	49
1.7 Выводы к главе 1 .....	51
2 ДЕЙСТВИЕ АСФЕРИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ В ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ В РАМКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФРЕНЕЛЯ.....	54
2.1 Общие соотношения .....	54
2.2 Постановка задачи .....	55
2.3 Параболическая линза ( $\gamma = 2$ ) .....	57
2.4 Аксикон ( $\gamma = 1$ ).....	61
2.5 Аналитические и численные оценки осевого распределения для различных диапазонов показателя $\gamma$ .....	68
2.5.1 Диапазон $0 < \gamma < 1$ .....	71
2.5.2 Диапазон $1 \leq \gamma < 2$ .....	73
2.5.3 Диапазон $\gamma > 2$ .....	74
2.6 Анализ поперечного распределения в точке фокуса.....	77
2.7 Дифракция Гауссова пучка на асферической линзе.....	81
2.7.1 Анализ осевого распределения .....	81
2.7.2 Анализ поперечного распределения в фокусе.....	89
2.8 Выводы к главе 2 .....	93
3 ДЕЙСТВИЕ АСФЕРИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ В ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ В НЕПАРАКСИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ .....	96
3.1 Общие соотношения в непараксиальном скалярном случае .....	96
3.2 Дробный аксикон ( $0 < \gamma < 1$ ) .....	100
3.3 Аксикон( $\gamma = 1$ ).....	103
3.3.1 Результаты численного моделирования для $\gamma \leq 1$ .....	104
3.4 Поправки к результатам пункта 3.2 в ближней зоне.....	108
3.4.1 Результаты численного моделирования и анализ необходимости поправок в ближней зоне .....	113
3.5 Аксикон с числовой апертурой выше предельной (дополнение к пункту 3.3) .....	118
3.5.1 Анализ продольного распределения .....	119
3.5.2 Анализ поперечного распределения.....	128
3.5.3 Численный расчет на основе интеграла Рэлея-Зоммерфельда .....	129
3.6 Фраксикон ( $1 < \gamma \leq 2$ ).....	133

3.6.1	Осевое распределение при освещении фраксикона плоской волной .....	133
3.6.2	Распределение на оси при освещении плоской волной параболической линзы .....	140
3.6.3	Результаты численного моделирования.....	142
3.7	Обобщённая линза ( $\gamma > 2$ ) .....	146
3.7.1	Общие соотношения для комплексной амплитуды на оптической оси.....	147
3.7.2	Частные примеры и приближения для случая больших и малых расстояний от оптического элемента.....	148
3.7.3	Результаты численного моделирования.....	153
3.8	Выводы к разделу 3 .....	156
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....		159
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....		160
ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АСФЕРИЧЕСКИХ ЛИНЗ И МЕТОДОВ ИХ АНАЛИЗА .....		
		176
П.1	Исследование локальных фокусов бинарной линзы .....	176
П.1.1	Параксиальный анализ осевого распределения для осесимметричных оптических элементов с кусочно-постоянной функцией пропускания.....	177
П.1.2	Анализ осевого распределения для бинарной линзы .....	178
П.1.3	Анализ осевого распределения для бинарной асферической линзы.....	180
П.1.4	Анализ для бинарной линзы в непараксиальном случае.....	182
П.1.5	Численное моделирование для фазовой бинарной линзы.....	185
П.1.6	Экспериментальные результаты .....	188
П.2	Острая фокусировка лазерного излучения с помощью двухзонного аксиального микроэлемента .....	191
П.2.1	Анализ в приближении тонкого элемента .....	192
П.2.2	Численный расчёт в приближении тонкого элемента .....	194
П.2.3	Численный расчёт для объёмного элемента.....	197
П.3	Выводы.....	204

## ВВЕДЕНИЕ

Более ста лет используются частные варианты рефракционных и отражательных оптических элементов с осесимметричной поверхностью: параболическая и сферическая линзы. Позднее появились другие их типы. Более полувека прошло с момента присвоения коническому элементу, формирующему протяжённое вдоль оптической оси изображение, названия «аксикон» [1]. Хотя аксиконы использовались и исследовались задолго до своего официального названия [2], именно во второй половине прошлого века этот оптический элемент вызвал бурную дискуссию и повышенный интерес, связанный с бездифракционными свойствами формируемых им пучков [3]. Такие пучки нашли применение во многих областях [2, 4], включая оптическое манипулирование [5 - 7], оптическую когерентную томографию [8, 9], метрологию [10, 11].

В работе J.H. Mcleod 1954 года [1] под аксиконом понимался любой оптический элемент с поверхностью, обладающей осевой симметрией, который за счёт отражения и/или преломления преобразует свет от точечного источника, расположенного на оптической оси, в осевой отрезок. Позднее классическим аксиконом стал называться оптический элемент, фазовая функция которого имеет линейную зависимость от радиуса – линейный или конический аксикон [12]. (Далее в диссертации, если нет оговорок, линейный аксикон называем просто аксиконом.) Кроме него имеется много других осесимметричных оптических элементов, отличающихся свойствами формируемого светового отрезка, среди которых: логарифмический аксикон [13 - 15], обобщённый аксикон [16] и аксилинза [17]. Интересными свойствами обладает также тандем из линзы и аксикона – линзакон [18 – 20\*], который позволяет формировать конические осевые распределения.

Преобразование света от точечного источника в осевой отрезок определяет основное отличие аксикона от линзы, которая изображает точечный источник в точку. К сожалению, это свойство аксикона сопровождается низким

качеством изображения внеосевых точек [21 - 23], а в результате – низким качеством полного изображения при использовании его как отдельного изображающего элемента [24, 25]. Другое свойство аксикона – изображение точки с меньшим поперечным дифракционным пределом (меньшим расплыванием) [3], чем обеспечивает линза с той же числовой апертурой – приводит к более высокому уровню боковых лепестков, что также препятствует получению качественного изображения.

Поэтому, как правило, аксикон эффективно используется в других приложениях: метрологии [26, 27], неразрушающем тестировании материалов и устройств [11, 28], сканирующих биомедицинских системах [8, 9, 29 - 31], оптическом микроманипулировании [5, 6, 32, 33], как часть датчика волнового фронта [34].

Оптические элементы, отличающиеся от классических элементов, таких, как линзы и аксиконы, используются для компенсации аберраций [35], для улучшения продольного и поперечного разрешения [36 - 39], увеличения протяжённости фокуса изображающей системы [40 - 43] или его смещения [44], для оптической связи в свободном пространстве [45], а также при оптическом манипулировании [46 – 50, 51]. Аналог аксилинзы, правда, с нарушением радиальной симметрии, применённый для увеличения протяжённости фокуса, описан в [52].

Известно, что сочетание аксикона с другим классическим элементом – параболической линзой – позволяет управлять как продольным, так и поперечным распределением интенсивности лазерных пучков [18, 19, 22]. При этом формируется коническая фокальная область с переменным размером центрального светового пятна [22, 53]. В работе [54] дан пример использования сочетания аксикона и линзы для фокусировки лазерного импульса в существенно удлинённую область оптического пробоя среды и описано применение этого эффекта при выполнении лазерных операций на глазах.

Похожий принцип с использованием отражения, использован в конструкции мезооптического микроскопа, применяемого в исследованиях в об-

ласти ядерной физики [55]. Такой микроскоп позволяет получить трёхмерную информацию о следе частицы без перефокусировки по глубине, что существенно ускоряет просмотр (мезооптика – раздел оптики, в котором изучают и используют физические свойства конических волновых полей).

Дифракционное исследование аксикона в сходящемся сферическом пучке было проведено в работах [57, 58]. Линза с отрицательной сферической абберацией, что эквивалентно комбинации параболической линзы с обобщённой, была использована для получения равномерно освещённого отрезка при освещении частично-когерентным излучением [59]. В работе [60] было описано использование синтезированных на ЭВМ голограмм в качестве фокусирующих элементов, в том числе и осесимметричных.

В работе [53] было показано, что при использовании средств дифракционной оптики тандем «линза + аксикон» можно заменить одним дифракционным элементом, фаза которого имеет степенную зависимость от радиальной координаты вида  $ar^\gamma$ . Отличительные особенности действия линзакон в непараксиальной области рассмотрены в [56\*]. Такой дифракционный элемент в частном случае  $\gamma=2$  соответствует параболической линзе, а при  $\gamma=1$  является аксиконом. Другие вариации параметров степенной зависимости позволяют получить не только аналог линзакон [18], или логарифмического аксикона [19], но и другие различные новые типы оптических элементов.

В диссертации выполняется теоретическое исследование оптических элементов, поверхность которых (в геометро-оптическом приближении) или фаза (в рамках волновой теории) описывается степенной функцией  $f(r) = ar^\gamma + b$ . Будем называть такие элементы асферическими линзами. Также будем использовать более узкие термины в зависимости от показателя степени  $\gamma$ : дробный аксикон при  $\gamma < 1$ , фраксикон при  $1 < \gamma < 2$ , и обобщённая линза при  $\gamma > 2$ . Обоснование границ дано в диссертации ниже.

Фазовые оптические элементы с высокими показателями степени ( $\gamma > 2$ ) используются для кодирования волнового фронта с целью увеличения глуби-

ны поля изображающей системы [43-46], а также для уменьшения влияния хроматических aberrаций [61, 62]. Фраксикон ( $1 < \gamma < 2$ ) может заменить набор из линзы и аксикона в различных сочетаниях. Дробный аксикон ( $\gamma < 1$ ) в дальней зоне дифракции является рассеивающим, а в ближней зоне дифракции обладает фокусирующими свойствами аналогично логарифмическому аксикону [75].

Новый тип оптического элемента позволяет расширить возможности фокусирующих систем. Для управления трёхмерным распределением в фокальной области линзы часто используют дополнительные дифракционные оптические элементы (ДОЭ). Для расчёта комплексной функции пропускания таких ДОЭ используются различные оптимизационные алгоритмы [68]. Хотя оптимизационные процедуры позволяют найти наилучшее по некоторому критерию решение, реализация рассчитанной комплексной функции пропускания на физическом носителе сопряжена с определёнными проблемами, так как оптимально рассчитанные решения могут быть очень чувствительны к искажениям, вызванным погрешностями изготовления ДОЭ. Поэтому желательно использовать ДОЭ, комплексная функция которого имеет определённый аналитический вид, но позволяет варьировать параметры в широких пределах. Асферическая линза является типом таких элементов.

Следует отметить, что использование оптических элементов в ближней зоне требует для их анализа строгой электромагнитной теории [76 – 79], что приводит к существенным затратам вычислительных ресурсов при моделировании. Для быстрого приближённого расчёта можно использовать более простые модели, в частности интегральные операторы распространения [84, 85], а также аналитические оценки [86\*], которые затем уточняются более строгими методами [79, 81\*]. Алгоритм быстрого расчёта дифракционного интеграла Рэлея – Зоммерфельда разработан в [82\*].

Необходимо отметить, что дифракционные элементы часто изготавливаются в виде зонных пластинок, действие которых не полностью совпадает с действием исходного элемента. Амплитудная зонная пластинка Френеля,

которая использовалась лордом Рэлеем ещё в 1871 году, действует как линза с множеством фокусов, каждый из которых содержит некоторую долю падающей на пластинку энергии. При этом в основном фокусе содержится всего около 10% всей энергии. Столь низкая эффективность бинарной линзы по сравнению с рефракционной препятствовала её использованию во многих приложениях.

Множество усилий было сосредоточено на увеличении эффективности «плоской» линзы. В частности, в 1898 году Вуд предложил фазовый вариант бинарной зонной пластинки [87], который позволял повысить эффективность в основном фокусе до 40%. Линза Френеля, исполненная в виде кусочно-гладкого рельефа, теоретически позволяет достичь 100%, а приблизиться к этой эффективности можно за счёт многоуровневого рельефа [88]. Однако при этом погрешности изготовления влияют как на качество изображения, так и на эффективность [89]. Пример замены кольцеобразных зон распределением точечных отверстий приведён в [90]. Переход к бинарной зонной пластинке уменьшает эффективность за счёт наличия нескольких порядков дифракции, но иногда это свойство можно полезно применить: в [91] описано, как соединение бинарного аксикона со спиральной фазовой пластинкой используется в профилометрии.

Как правило, локальные фокусы бинарной линзы исключаются из рассмотрения, потому что доля энергии, которая на них приходится, уменьшается обратно пропорционально квадрату номера локального фокуса [92, 93]. Однако при этом упускается из виду тот факт, что поперечный размер локального фокуса также уменьшается пропорционально номеру, а, следовательно, при меньшей площади фокального пятна его интенсивность оказывается соизмеримой с интенсивностью основного максимума [94]. Этот факт может быть использован для улучшения разрешения фокусирующих систем.

Использование дифракционных элементов в различных оптических системах обеспечивает меньший размер, вес и стоимость при огромном разнообразии выполняемых функций. Одно из эффективных применений дифрак-

ционных элементов – фокусировка лазерного излучения в ближней зоне дифракции [95 – 98].

В статье [95] рассматривается дифракция на субволновом отверстии и фокусировка с помощью решётки. В работах [96 – 98] для острой фокусировки лазерного излучения в ближней зоне дифракции используются бинарные аксиконы с высокой числовой апертурой, в работе [98] также рассмотрена зонная пластинка, представляющая собой бинарный аналог микролинзы.

Заметим, что структура периферийной части зонной пластинки с коротким фокусом приближается к виду аксикона, то есть кольца становятся равной ширины. Фактически, отличие аксикона с высокой числовой апертурой и зонной пластинки с коротким фокусом определяется только центральной частью. Таким образом, структура центральной части элемента является очень важным свойством при фокусировке в ближней зоне.

Простейший элемент состоит всего из двух центральных зон, разность фаз в которых составляет  $\pi$  радиан. В параксиальном случае фазовый скачок на  $\pi$  радиан был использован для формирования в фокальной плоскости распределения с плоским максимумом [99]. При острой фокусировке кольцевой фазовый скачок позволяет уменьшить размер фокального пятна [100\*].

В работах [99, 100\*] фазовый скачок является дополнительной аподизацией к функции пропускания фокусирующего элемента. Однако известно [81\*, 101, 102], что просто круглое микроотверстие в непрозрачном экране тоже обладает фокусирующими свойствами. Использование двух соосных зон с различным набегом фазы сохраняет простоту конфигурации, но расширяет возможности фокусировки по сравнению с отверстием в экране.

Таким образом, можно вынести следующее заключение. Различные виды осесимметричных оптических элементов, как рефракционных, так и дифракционных, успешно используются в различных областях практического применения. Как правило, теоретические исследования выполнялись для частных видов элементов. При этом общего, логически завершённого описания действия такого класса элементов, как асферическая линза с описываемой

степенной функцией поверхностью, нигде не было приведено. В диссертации аналитически и численно исследуется этот класс в различных оптических моделях: геометрической и волновой, в том числе в непараксиальной области. В геометрической модели степенной функцией описывается поверхность элемента, а в волновой – фазовая функция.

#### Цель диссертационной работы:

Теоретический и численный анализ преобразования излучения, выполняемого асферической рефракционной либо дифракционной линзой в рамках различных приближений: геометро-оптического и волнового (параксиального и непараксиального).

#### Задачи диссертационной работы:

1. Выполнить анализ асферической линзы, поверхность которой описывается степенной функцией, на основе геометро-оптической теории с целью вычисления распределения интенсивности на оптической оси и определения ее особенностей (наличие тени и положение её границы, области и скорость возрастания/убывания интенсивности, позиции максимальной интенсивности).

2. Получить явные аналитические выражения для комплексной амплитуды светового поля, прошедшего через тонкую асферическую степенную линзу, в рамках скалярной волновой теории (в параксиальном и непараксиальном случаях). Определить характерные свойства формируемого поля на оптической оси, а также в плоскости максимальной интенсивности.

3. Определить область применения полученных аналитических выражений.

#### Научная новизна:

В диссертации впервые получены следующие результаты.

1. Распределение интенсивности на оптической оси, формируемой асферической поверхностью, описываемой степенной функцией с показателем сте-

пени  $\gamma$ , полученное на основе геометро-оптического анализа. Наиболее интересный результат наблюдается для фраксикона (промежуточный элемент между линзой и аксиконом:  $1 < \gamma < 2$ ): формируется световой отрезок с теоретически бесконечной интенсивностью на краю.

2. С учетом как геометро-оптической, так и волновой теорий вычислена комплексная функция пропускания рефракционного аксикона при падении лучей как на основание аксикона, так и на его вершину. Полученные выражения справедливы также при углах, соответствующих полному внутреннему отражению.

3. В условиях параксиальной волновой модели получены приближенные аналитические выражения для комплексной амплитуды светового поля, имеющего начальную степенную фазовую функцию. Полученные выражения дают точный результат для показателей степени  $\gamma=1$  и  $\gamma=4$ .

4. На основе интеграла Рэля-Зоммерфельда получены аналитические выражения, приближенно описывающие поведение комплексной амплитуды светового поля на оптической оси при дифракции на тонкой степенной линзе в непараксиальной области. Показано, что наибольшая интенсивность в фокусе обеспечивается при использовании фраксикона ( $1 < \gamma < 2$ ).

#### Практическая значимость:

Результаты могут использоваться при конструировании рефракционных асферических линз; моделировании дифракционных оптических элементов со степенной фазовой функцией. Область применения данных линз включает в себя получение фокальных отрезков достаточно большой длины со слабо меняющейся интенсивностью как вблизи начальной плоскости, так и в отдалении от неё. Также возможно их применение в качестве фокусирующих элементов безотносительно к наличию параксиальности; как вспомогательных элементов в изображающих системах (для увеличения глубины фокуса, ликвидации хроматизма).

Достоверность полученных результатов:

Достоверность полученных результатов подтверждается близостью результатов численного моделирования, полученных с помощью независимых программ, и приближённо-аналитических оценок. В числе программ были реализации метода, основанного на разложении по плоским волнам в приближении тонкого элемента; прямого вычисления по квадратурным формулам; расчёт в рамках строгой электромагнитной теории программой Comsol. Также часть результатов дополнительно подтверждена экспериментальными данными.

На защиту выносятся:

1. Асферическая поверхность, описываемая степенной функцией с показателем  $\gamma < 1$ , позволяет формировать приближенно равномерное распределение интенсивности на оптической оси. Поверхность с показателем степени  $1 < \gamma < 2$  формирует световой отрезок с теоретически бесконечной интенсивностью на дальнем от поверхности краю отрезка. Поверхность с показателем степени  $\gamma > 2$  формирует вдоль оси распределение интенсивности, которое сначала имеет теневую область, затем интенсивность резко возрастает, а после точки максимума асимптотически убывает до нуля.

2. Комплексные функции пропускания рефракционного аксикона, полученные с учётом геометро-оптической и волновой теорий, справедливые при падении лучей как на основание аксикона, так и на его вершину, в том числе при углах, соответствующих полному внутреннему отражению.

3. Приближённые аналитические выражения для комплексной амплитуды светового поля, полученные в рамках параксиальной волновой модели, дают точный результат для показателей степенной функции  $\gamma=1$  и  $\gamma=4$ .

4. Аналитические выражения, выведенные на основе интеграла Рэлея-Зоммерфельда для поля с начальной степенной фазовой функцией, приближенно описывающие поведение комплексной амплитуды светового поля на

оптической оси. Полученные поправки уточняют основное решение в ближней зоне дифракции.

#### Публикации:

Основные результаты диссертации опубликованы в 17 статьях в реферируемых журналах, рекомендованных ВАК.

#### Структура диссертации:

В первой главе будет рассмотрен геометро-оптический анализ асферической линзы с поверхностью, описываемой степенной функцией. Хотя этот результат нельзя непосредственно переносить на действие ДОЭ, геометро-оптическое рассмотрение позволяет предсказать качественное поведение элементов, причём независимо от наличия параксиальности. Например, безабберационная линза получается одинаковой и при геометро-оптическом рассмотрении, и в непараксиальной волновой теории. Естественно, что для получения количественных результатов необходимо рассмотрение в рамках волновой теории, аналитически выражаемой интегральной формулой Рэлея-Зоммерфельда. Если не оговорено особо, используется скалярный вариант нахождения амплитуды электромагнитного поля.

Во второй главе рассматривается действие асферической линзы в волновой теории в параксиальной области (в рамках применимости приближения Френеля). В этой области удобно провести вычисление, так как уравнение, определяющее стационарную точку, всегда разрешимо аналитически. Введено понятие используемого модифицированного метода стационарной фазы. Частичное изменение классического метода стационарной фазы применялось в работе [57], но здесь делается дальнейший шаг: медленно меняющийся множитель выносится за знак интеграла не полностью, а так, что оставшийся интеграл можно вычислить аналитически.

В главе 2 на основе модифицированного метода стационарной фазы будут получены аналитические выражения для осевого распределения, форми-

руемого асферической линзой в параксиальном приближении. Введены два типа аналитических выражений; если показатель степени меньше двух, то более точным является первый тип, иначе второй.

На основе классического метода стационарной фазы выполнен анализ поперечного распределения, который показал возможность формирования с помощью асферической линзы более узкого светового пучка, чем обеспечивает линейный аксикон с той же числовой апертурой.

Так как приближение Френеля не всегда применимо, а некоторые эффекты, предсказываемые геометро-оптической теорией, могут наблюдаться только в непараксиальной области, естественно рассмотреть действие асферической линзы в этой области, что и сделано в третьей главе. Для этого необходимо вычисление интеграла Рэля-Зоммерфельда. Метод стационарной фазы применяется не к исходному интегралу, а к преобразованному выражению, которое обеспечивает выполнение граничного условия для амплитуды независимо от погрешности вычисления интеграла. (Преобразование является *точным*, в отличие, например, от метода ВКБ в квантовой механике [103, §9 главы VI], где ради наличия аналитического решения искусственно вводится дополнительное слагаемое.) К сожалению, в этой области уравнение стационарной точки разрешимо аналитически лишь в некоторых частных случаях, хотя само уравнение имеет одинаковый вид для любого показателя степени. В остальных ситуациях аналитически можно найти не саму амплитуду, а только некоторые характерные признаки распределения на оси: границы тени, позицию наибольшей интенсивности, порядок роста/убывания интенсивности в некоторой области. Приведены также выражения для амплитуды в очень близкой зоне, где приближение метода стационарной фазы (даже модифицированного) является недостаточно точным. В этой области введены дополнительные поправки, которые позволяют согласовать аналитические результаты с полученными численным интегрированием.

В приложение вынесены примеры применения введённого математического аппарата к физически реализованным оптическим элементам: бинар-

ной линзе, в частности, (стандартной) параболической, и двухзонному оптическому микроэлементу. Выявлено, в каких случаях бинарная асферическая линза может создать наибольший контраст интенсивности. В рамках скалярной теории (как параксиальной, так и непараксиальной) исследуются такие характеристики локальных фокусов, как размер фокального пятна и его интенсивность.

Также в приложении приведены результаты, показывающие, что в случае двухзонного элемента теоретические расчёты качественно согласуются даже с результатом решения уравнений Максвелла, при котором элемент не предполагается бесконечно тонким, а учитывается его объёмная структура.

# 1 АСФЕРИЧЕСКАЯ ЛИНЗА ПРИ ЕЁ ГЕОМЕТРО-ОПТИЧЕСКОМ РАССМОТРЕНИИ

В данной главе в рамках геометрической оптики мы рассматриваем фокусирующие свойства асферической рефракционной линзы, форму поверхности которой можно описать в виде степенной зависимости от радиуса. Также проводится сравнение полученных соотношений с рефракционной сферической линзой и линзой, являющейся сегментом эллипсоида вращения.

## 1.1 Асферическая линза

Рассмотрим фокусирующий осесимметричный рефракционный оптический элемент, изготовленный из материала с показателем преломления  $n$ , кривая поверхность которого описывается уравнением:

$$h(r) = z_0 - ar^\gamma. \quad (1.1)$$

В этом выражении  $\gamma$  – показатель степени,  $h$  – текущая высота элемента,  $z_0$  – координата вершины элемента,  $a$  – масштабный множитель. На рисунке 1.1 показаны радиальные сечения поверхностей вида (1.1) при  $a = 1$  и различных значениях  $\gamma$ .

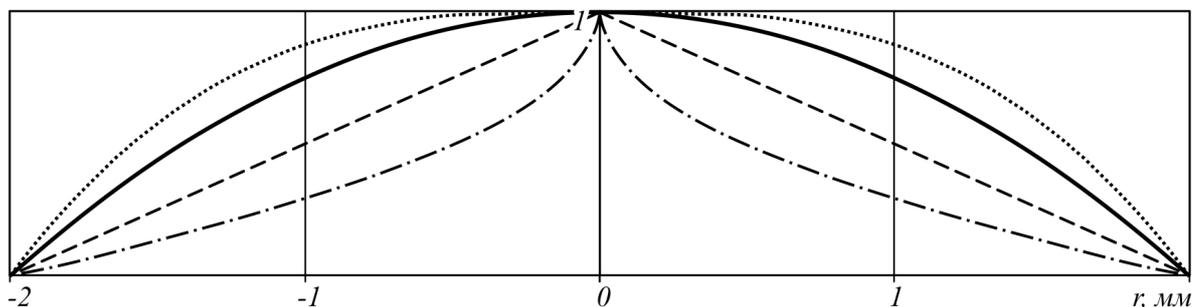


Рисунок 1.1 – Радиальные сечения поверхностей вида (1.1) при  $a = 1$  и  $\gamma = 0,5$  (штрихпунктирная линия),  $\gamma = 1$  (пунктирная линия),  $\gamma = 2$  (сплошная линия),  $\gamma = 3$  (точечная линия)

Предполагается, что вторая ограничивающая элемент поверхность – плоскость, перпендикулярная оси симметрии (оптической оси). Далее в этой главе, кроме особо оговорённых случаев, считается, что лучи освещающего пучка падают нормально на плоскую сторону линзы; а оптическая ось расположена горизонтально. Нашей задачей является найти зависимость положения точки пересечения луча, прошедшего через линзу, с оптической осью, от расстояния точки его падения до оптической оси. Для этого рассмотрим ход лучей, используя закон преломления. Исходя из уравнения (1.1), имеем следующие соотношения:  $r(h) = \left(\frac{z_0 - h}{a}\right)^{1/\gamma}$ ,  $r'(h) = -\frac{(z_0 - h)^{1-\gamma}}{\gamma a^{1/\gamma}}$ . Также из чертежа на рисунке 1.2 получаем равенство:  $\text{tg } \beta = \text{tg}(90^\circ - \alpha_i) = -r'(h)$ , из которого следует выражение для угла падения:

$$\text{tg}(\alpha_i) = \gamma a^{1/\gamma} (z_0 - h)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \gamma a (r(h))^{\gamma-1}. \quad (1.2)$$

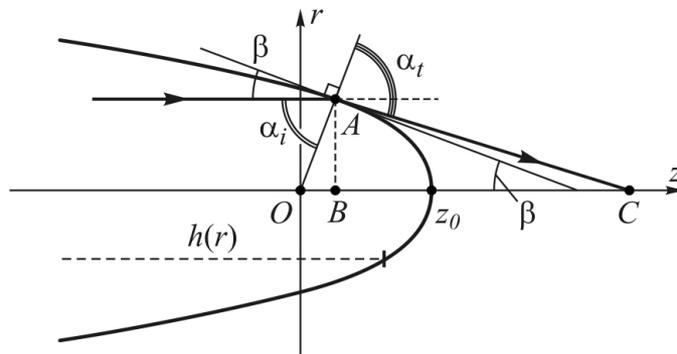


Рисунок 1.2 – Ход лучей через осесимметричный элемент

Из (1.2) находим синус угла падения  $\sin(\alpha_i) = \frac{\gamma a r^{\gamma-1}}{\sqrt{1 + \gamma^2 a^2 r^{2\gamma-2}}}$ , а в соот-

ветствии с законом преломления синус угла преломления равен  $\sin(\alpha_t) = n \sin(\alpha_i)$ , ( $n$  – показатель преломления). Величина справа должна быть не больше единицы, чтобы лучи выходили из оптического элемента. Решая полученное неравенство, находим предельные значения размеров (радиуса и высоты) асферической линзы:

$$r_{\text{lim}} = \left( \gamma a \sqrt{n^2 - 1} \right)^{1/(1-\gamma)} \quad (1.3)$$

$$h_{\text{lim}} = z_0 - a (r_{\text{lim}})^\gamma = z_0 - a \left( \gamma a \sqrt{n^2 - 1} \right)^{\gamma/(1-\gamma)}. \quad (1.4)$$

Таким образом, поперечный размер асферической линзы ограничивается условием полного внутреннего отражения лучей:

$$\begin{cases} r \leq r_{\text{lim}}, h \geq h_{\text{lim}} & \gamma > 1, \\ r \geq r_{\text{lim}}, h \leq h_{\text{lim}} & 0 < \gamma < 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

При  $\gamma = 1$  мы имеем особый случай, когда угол  $\alpha_t$  не зависит от радиуса, и условие полного внутреннего отражения связано только с параметром  $a$  и показателем преломления:

$$a \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (1.6)$$

На рисунке 1.3 приведены зависимости предельного радиуса (1.5) от параметра  $\gamma$  в различных диапазонах при  $a = 0,5$  и  $n = 1,5$ . Заметим, что зависимости имеют экстремальные значения, связанные с параметрами  $a$  и  $n$ . Позиции экстремумов равны корням уравнения  $\ln \gamma + 1/\gamma = 1 - \ln a_1$ , где  $a_1 = a \sqrt{n^2 - 1}$ . При  $a_1 < 1$  (в примере  $a_1 \approx 0,559$ ) имеется два корня (в примере  $\gamma_1 \approx 0,401$  и  $\gamma_2 \approx 3,715$ ) и график похож на рисунок 1.3. Если же  $a_1 > 1$ , то нет корней, соответственно нет экстремумов, и вид графика совсем другой.

При стремлении  $\gamma \rightarrow 1$  в обоих случаях теряется зависимость от радиуса: при  $\gamma > 1$   $r_{\text{lim}} \rightarrow \infty$ , а при  $0 < \gamma < 1$   $r_{\text{lim}} \rightarrow 0$ , т.е. условие (1.5) выполняется всегда с учётом (1.6).

Найдём искомую точку пересечения преломлённого луча с горизонтальной осью – точку С (рисунок 1.2). В треугольнике АВС мы знаем сторону  $AB = r$  и угол  $ACB = \alpha_t - \alpha_i$ . Используя формулу для тангенса разности, находим

$$|BC| = \frac{r}{\text{tg}(ACB)} = r \frac{1 + \text{tg}(\alpha_t) \text{tg}(\alpha_i)}{\text{tg}(\alpha_t) - \text{tg}(\alpha_i)}. \quad (1.7)$$

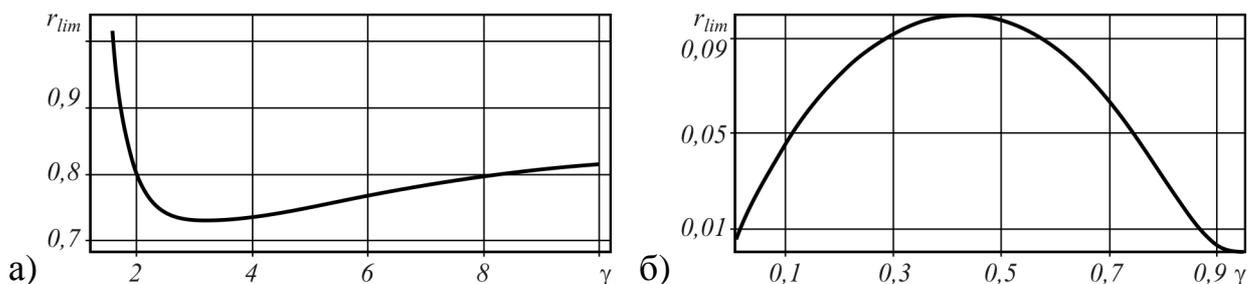


Рисунок 1.3 – Зависимость предельного радиуса (1.3) от параметра  $\gamma$

при  $\gamma > 1$  (а) и  $0 < \gamma < 1$  (б) для случая, когда  $a\sqrt{n^2 - 1} < 1$

Подставив величины углов падения и преломления в (1.7), получим

$$|BC| = \frac{1}{a\gamma r^{\gamma-2}} \cdot \frac{n\sqrt{1 + a^2\gamma^2 r^{2\gamma-2}(1-n^2)} + 1}{(n^2 - 1)}. \quad (1.8)$$

Таким образом, расстояние, на котором луч, проходящий на линзе через радиус  $r$ , пересекает оптическую ось, описывается выражением:

$$z(r) = z_0 - ar^\gamma + \frac{n\sqrt{1 - a^2\gamma^2 r^{2\gamma-2}(n^2 - 1)} + 1}{a\gamma r^{\gamma-2}(n^2 - 1)}. \quad (1.9)$$

Рассмотрим конкретные значения  $\gamma$ ; под  $z(0)$  понимается  $\lim_{r \rightarrow 0} z(r)$ :

1. При  $\gamma = 2$  получаем параболическую линзу, формула (1.9) примет вид

$$z(r) = z_0 - ar^2 + \frac{n\sqrt{1 + 4a^2r^2(1-n^2)} + 1}{2a(n^2 - 1)}, \quad (1.10)$$

а крайние значения:

$$z(0) = z_0 + \frac{n+1}{2a(n^2 - 1)}, \quad z(r_{\text{lim}}) = z_0 + \frac{1}{4a(n^2 - 1)}, \quad (1.11)$$

причём  $z(r_{\text{lim}}) < z(0)$ .

В параксиальном приближении:

$$z(r) \approx z_0 - ar^2(n+1) + \frac{1}{2a(n-1)}. \quad (1.12)$$

2. При  $\gamma > 2$  крайние значения:

$$z(0) = \infty, \quad z(r_{\text{lim}}) = z_0 + \frac{\gamma-1}{a^{\frac{1}{\gamma-1}} \left( \gamma \sqrt{n^2-1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}, \quad (1.13)$$

также  $z(r_{\text{lim}}) < z(0)$ .

В параксиальном приближении:

$$z(r) \approx z_0 - ar^\gamma \left( \frac{n\gamma}{2} + 1 \right) + \frac{1}{a\gamma(n-1)r^{\gamma-2}}. \quad (1.14)$$

Таким образом, при  $\gamma \geq 2$  центральная часть линзы фокусирует на более дальние расстояния от элемента, чем периферийная.

3. При  $1 < \gamma < 2$  крайние значения:

$$z(0) = z_0, \quad z(r_{\text{lim}}) = z_0 + \frac{\gamma-1}{a^{\frac{1}{\gamma-1}} \left( \gamma \sqrt{n^2-1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (1.15)$$

имеют соотношение  $z(r_{\text{lim}}) > z(0)$ .

Таким образом, на оптической оси фокус находится непосредственно в вершине линзы. В параксиальном приближении:

$$z(r) \approx z_0 - ar^\gamma \left( \frac{n\gamma}{2} + 1 \right) + \frac{r^{2-\gamma}}{a\gamma(n-1)}. \quad (1.16)$$

На рисунке 1.4 показаны зависимости расстояний от вершины линзы  $z_0$  до точки пересечения оптической оси (1.9) от радиуса оптического элемента при  $a = 0,1$  и  $n = 1,5$  для различных значений  $\gamma > 1$ .

Как видно из графиков, при  $1 < \gamma < 2$  лучи, проходящие через центральную часть оптического элемента, фокусируются сразу за поверхностью элемента. Периферийные лучи фокусируются ближе к поверхности элемента, чем «средние» лучи. Заметим, что средняя часть такой линзы работает без aberrаций, т.е. так же как центральная часть параболической линзы. Далее эта ситуация анализируется более подробно.

При  $\gamma = 2$  периферийные лучи пересекают оптическую ось ближе, чем центральные. При  $\gamma > 2$  периферийные лучи также фокусируются достаточно

близко от поверхности оптического элемента, в то время как центральные лучи пересекаются с оптической осью на значительном расстоянии. С увеличением  $\gamma$  точка пересечения будет уходить в бесконечность.

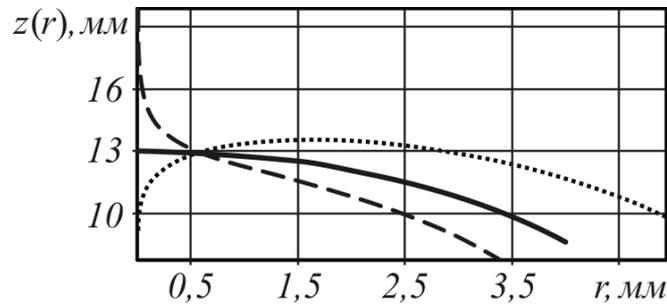


Рисунок 1.4 – Зависимости расстояний пересечения оптической оси (1.9) от радиуса оптического элемента при  $a = 0,1$  и  $n = 1,5$  для  $\gamma = 2,1$  (пунктирная линия),  $\gamma = 1,9$  (точечная линия),  $\gamma = 2$  (сплошная линия)

4. При  $0 < \gamma < 1$  область полного отражения находится не на периферии, а в центре линзы. Поэтому в отличие от предыдущих случаев часть лучей всегда будет отражаться. А при размере линзы меньше  $r_{\text{lim}}$  отразятся все лучи.

Так как в центральной части происходит отражение лучей, выражение

$$(1.9) \text{ удобнее переписать в виде } z(r) = z_0 - ar^\gamma + r^{2-\gamma} \frac{n\sqrt{1 - a^2\gamma^2(n^2 - 1)/r^{2-2\gamma} + 1}}{a\gamma(n^2 - 1)}.$$

Крайние значения:

$$z(r_{\text{lim}}) = z_0 - (1 - \gamma)a^{\frac{1}{1-\gamma}} \left( \gamma\sqrt{n^2 - 1} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}, \quad z(\infty) = \infty. \quad (1.17)$$

Точка фокуса для лучей, проходящих вблизи внутреннего радиуса элемента  $r_{\text{lim}}$ , оказывается внутри линзы, что затрудняет её использование в рефракционном виде, но вполне возможно в дифракционном варианте.

Отметим, что при выводе формулы (1.9) предполагалось, что после преломления на правой границе линзы луч повторно в линзу не входит. Поэтому её справедливость для упомянутых выше лучей можно обеспечить, рассмат-

ривая линзу без области полного внутреннего отражения, что абсолютно не изменяет её действия.

Можно найти значение  $r_0$ , при котором фокус совпадёт с  $z_0$  и перестанет находиться внутри оптического элемента. Оно равно

$$r_0 = a^{\frac{1}{(1-\gamma)}} \left( \frac{2 - n^2\gamma + n\sqrt{n^2\gamma^2 - 4\gamma + 4}}{2\gamma(n^2 - 1)} \right)^{\frac{1}{(2\gamma-2)}}. \quad \text{Заметим, что отношение}$$

$$\frac{r_0}{r_{\text{lim}}} = \left( \frac{\gamma}{2} \left( 2 - n^2\gamma + n\sqrt{n^2\gamma^2 - 4\gamma + 4} \right) \right)^{\frac{1}{(2\gamma-2)}} \text{ не зависит от } a.$$

В параксиальной области получить хорошее приближение не удаётся, но имеет место асимптотика для больших радиусов, которая совпадает с выражением (1.16).

На рисунке 1.5 показаны зависимости расстояний пересечения оптической оси (1.9) от радиуса оптического элемента при  $a = 0,1$  и  $n = 1,5$  для различных значений  $\gamma < 1$ . Центральная часть оптического элемента не пропускает лучи из-за полного внутреннего отражения. При уменьшении параметра  $\gamma$  периферийные лучи будут пересекать оптическую ось на всё большем удалении от оптического элемента.

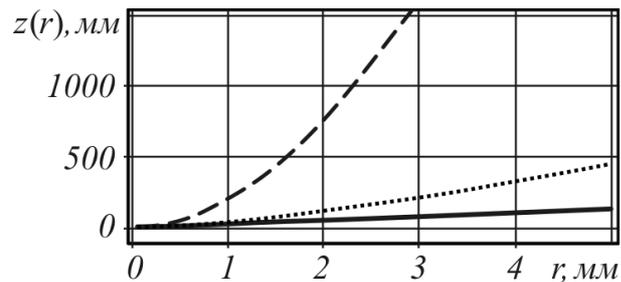


Рисунок 1.5 – Зависимости расстояний пересечения оптической оси (1.9) от радиуса оптического элемента при  $a = 0,1$  и  $n = 1,5$  для  $\gamma = 0,1$  (пунктирная линия),  $\gamma = 0,5$  (точечная линия),  $\gamma = 0,9$  (сплошная линия)

## 1.2 Распределение интенсивности на оптической оси

Зная зависимость положения точки фокуса от радиус-вектора точки, на которую падает луч, можно найти распределение интенсивности на оптической оси. Закон сохранения энергии для лучевых трубок (кольцо отображается на отрезок оптической оси):

$$2\pi r I_0(r)dr = I(z)dz \quad (1.18)$$

позволяет определить распределение интенсивности, формируемое линзой (1.1) на оптической оси. При плоском падающем пучке ( $I_0(r)=1$ ):

$$I(z) = 2\pi r \frac{dr}{dz}. \quad (1.19)$$

Знак «минус» у производной будет означать, что с увеличением  $r$  фокус приближается к началу координат. В работе [16] дано следующее истолкование равенства (1.18). Двумерная плотность энергии  $I_0(r)$  (в единицах  $\text{мм}^{-2}$ ) преобразуется (сжимается) в одномерную плотность энергии на оси  $I(z)$  (в единицах  $\text{мм}^{-1}$ ). Очевидно, что такая идеализация не учитывает дифракции, за счёт которой фокальная линия имеет конечный поперечный размер. Поэтому величина  $I(z)$  в данной формулировке может интерпретироваться как первое приближение интенсивности на оси.

Зависимость фокусного расстояния от радиуса  $z(r)$  дана формулой (1.9), но определение обратной зависимости  $r(z)$  в общем случае достаточно сложно. Поэтому сначала рассмотрим его упрощённые варианты, получаемые при определённом приближении: параксиальном при  $\gamma > 1$  или большого радиуса при  $0 < \gamma < 1$ . Отметим только, что с использованием (1.9) можно доказать, что на границе полного внутреннего отражения интенсивность непрерывным образом, без скачка, обращается в нуль даже без учёта Френелевского отражения. (В этой точке  $dz/dr$  стремится к бесконечности, соответственно  $dr/dz$  к нулю.)

### 1.2.1 Приближённое решение

1. Параксиальная область при  $\gamma = 2$ .

Из формулы (1.12) следует:

$$r^2 = \frac{1 - (z - z_0)2a(n-1)}{2a^2(n^2 - 1)}, \quad 2r \frac{dr}{dz} = \frac{d(r^2)}{dz} = -\frac{1}{a(n+1)},$$

откуда получаем  $I(z) = 2\pi r \frac{dr}{dz} = -\frac{\pi}{a(n+1)} = \text{const.}$  (1.20)

Таким образом, для параболической линзы интенсивность не меняется в пределах части фокального отрезка слева от точки  $z_0 + 1/\left[2a(n-1)\right]$ . Это выполняется лишь приближённо (смотри далее комментарий к формуле (1.27)).

2. Параксиальная область при  $\gamma > 2$

Здесь в формуле (1.14) придётся отбросить второе слагаемое, так как иначе уравнение неразрешимо. Вблизи оси оно мало, а последнее слагаемое неограниченно растёт, так как в данном диапазоне  $\gamma > 0$  и  $\gamma - 2 > 0$ . Однако необходима осторожность при  $\gamma \rightarrow 2$ , так как не гарантирована сшивка решения с  $\gamma = 2$ . Таким образом, получаем:

$$z = z_0 + \frac{1}{\gamma a(n-1)r^{\gamma-2}}, \quad r = \left[(z - z_0)\gamma a(n-1)\right]^{\frac{1}{2-\gamma}}, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{\gamma a(n-1)}{2-\gamma} \left[(z - z_0)\gamma a(n-1)\right]^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}},$$

откуда в результате:

$$I(z) = 2\pi r \frac{dr}{dz} = \frac{2\pi\gamma a(n-1)}{2-\gamma} \times \left[(z - z_0)\gamma a(n-1)\right]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}. \quad (1.21)$$

В формуле (1.21) показатель степени отрицателен, поэтому интенсивность убывает при удалении от начала координат.

3. Параксиальная область при  $1 < \gamma < 2$ .

В этом случае в формуле (1.16) также придётся отбросить второе слагаемое, так как иначе уравнение неразрешимо. Это слагаемое имеет более высокий порядок малости, так как в данном диапазоне  $2 - \gamma < \gamma$ . Осторожность необходима при  $\gamma \rightarrow 1$ , так как тогда порядки обоих слагаемых близки,

а также при  $\gamma \rightarrow 2$ , так как не гарантирована сшивка решения с  $\gamma = 2$ . Таким образом, получаем:

$$z = z_0 + \frac{r^{2-\gamma}}{\gamma a(n-1)}, \quad r = [(z - z_0)\gamma a(n-1)]^{\frac{1}{2-\gamma}}, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{\gamma a(n-1)}{2-\gamma} [(z - z_0)\gamma a(n-1)]^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}},$$

откуда в результате:

$$I(z) = 2\pi r \frac{dr}{dz} = \frac{2\pi\gamma a(n-1)}{2-\gamma} \times [(z - z_0)\gamma a(n-1)]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}. \quad (1.22)$$

Формально выражение (1.22) такое же, как и (1.21), однако показатель степени в (1.22) положителен, поэтому интенсивность возрастает при удалении от начала координат.

4. Область большого радиуса при  $0 < \gamma < 1$ .

В этом случае в формуле (1.16) оставляем только последнее слагаемое, так как оно (учитывая  $2 - \gamma > \gamma$ ) имеет более высокий порядок роста. При  $\gamma \rightarrow 1$  требуется осторожность, так как тогда порядки обоих слагаемых близки. Таким образом, получаем:

$$z = \frac{r^{2-\gamma}}{\gamma a(n-1)}, \quad r = [z\gamma a(n-1)]^{\frac{1}{2-\gamma}}, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{\gamma a(n-1)}{2-\gamma} [z\gamma a(n-1)]^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}},$$

откуда в результате:

$$I(z) = 2\pi r \frac{dr}{dz} = \frac{2\pi\gamma a(n-1)}{2-\gamma} [z\gamma a(n-1)]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}. \quad (1.23)$$

Так как показатель степени в (1.23) положителен, интенсивность возрастает при удалении от начала координат.

### 1.2.2 Частные точные решения

Рассмотрим общее уравнение (1.9) для некоторых значений  $\gamma$ .

1. Аксикон:  $\gamma = 1$ .

Хотя многие приведённые выше формулы нельзя напрямую использовать для  $\gamma = 1$  (по крайней мере, без раскрытия неопределённостей), формула

для фокусного расстояния является в этом смысле исключением. Поэтому подставим в (1.9)  $\gamma=1$ :

$$z = z_0 + r \left[ \frac{1}{a} \cdot \frac{n\sqrt{1+(1-n^2)a^2+1}}{n^2-1} - a \right] = z_0 + \beta r. \quad (1.24)$$

Разумеется, здесь предполагается, что выполнено неравенство, выражающее отсутствие внутреннего отражения  $a < 1/\sqrt{n^2-1}$ . В этом случае обеспечивается  $\beta > 0$ . Из (1.24) получаем  $r = \frac{z-z_0}{\beta}$ ;  $\frac{dr}{dz} = 1/\beta$ , и, следовательно,

$$I(z) = 2\pi r \frac{dr}{dz} = \frac{2\pi}{\beta^2} (z - z_0). \quad (1.25)$$

Таким образом, интенсивность линейно возрастает при удалении от начала координат.

2. Параболическая линза:  $\gamma = 2$ .

Подстановка в (1.9)  $\gamma = 2$  даёт:

$$z = z_0 - ar^2 + \frac{1}{2a} \cdot \frac{n\sqrt{1+(1-n^2)4a^2r^2+1}}{n^2-1}. \quad (1.26)$$

Из этого уравнения можно выразить  $r^2$ :

$$r^2 = \frac{n\sqrt{n^2+2u+1} - (u+n^2)}{2a^2(n^2-1)}; \quad u = (z-z_0)2a(n^2-1)-1, \text{ откуда}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(r^2)}{dz} &= \frac{d(r^2)}{du} \cdot \frac{du}{dz} = \frac{1}{2a^2(n^2-1)} \times \\ &\times \left\{ n \cdot \frac{1}{2\sqrt{n^2+2u+1}} \cdot 2-1 \right\} \cdot 2a(n^2-1) = \frac{1}{a} \cdot \left\{ \frac{n}{\sqrt{n^2+2u+1}} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому интенсивность равна

$$I(z) = 2\pi r \frac{dr}{dz} = \pi \frac{d(r^2)}{dz} = \frac{\pi}{a} \cdot \left\{ \frac{n}{\sqrt{n^2+2u+1}} - 1 \right\}. \quad (1.27)$$

На рисунке 1.6 приведён график интенсивности (без знака) при  $n=2$ ,  $a=0,05$ . При возрастании  $z$  интенсивность возрастает от нуля в точке граничного фокуса  $z_0 + \frac{1}{4a(n^2 - 1)}$  до  $\frac{\pi}{a(n+1)}$  в точке параксиального фокуса  $z_0 + \frac{1}{2a(n-1)}$ .

Можно доказать, что скорость возрастания интенсивности  $dI(z)/dz$  уменьшается при приближении к параксиальному фокусу, но не становится равной нулю. Отсюда следует, что параксиальное приближение (1.20) имеет первый порядок погрешности.

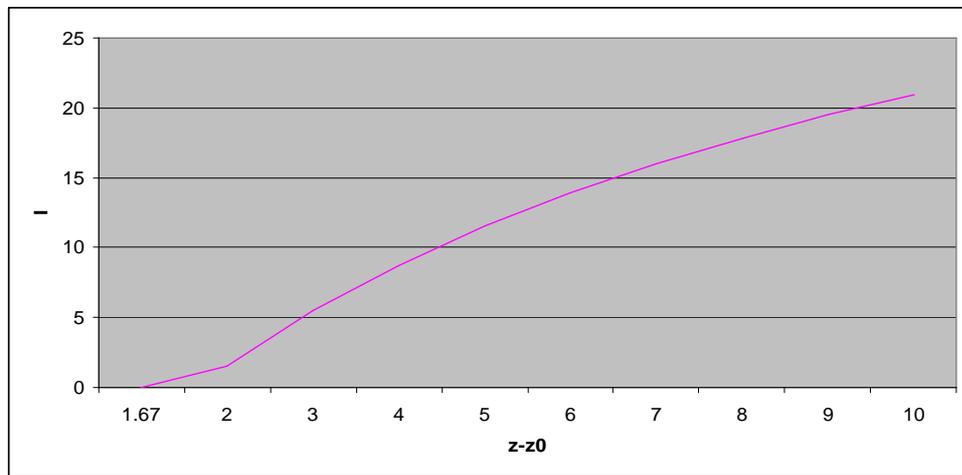


Рисунок 1.6 – Распределение интенсивности (1.27), формируемой параболической линзой

### 3. Произвольные значения $\gamma$ .

В общем случае уравнение (1.9) не имеет аналитического решения, поэтому далее выполним реализацию формулы (1.19) численным дифференцированием. Возьмём равномерную дискретизацию по радиусу:  $dr = r_{i+1} - r_i = h$ , тогда радиальным координатам  $r_i$  будут соответствовать осевые координаты из выражения (1.9):  $dz = z(r_{i+1}) - z(r_i)$ , а распределение интенсивности будет строиться в средних точках интервалов:

$$I\left(z\left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2}\right)\right) = \frac{\pi(r_{i+1} + r_i)(r_{i+1} - r_i)}{z(r_{i+1}) - z(r_i)}. \quad (1.28)$$

На рисунке 1.7 показаны распределения интенсивности (1.28) в зависимости от расстояния от оптического элемента при  $a = 0,1$  и  $n = 1,5$  для различных значений  $\gamma > 2$ . Левый край графиков с резким обрывом (граница тени) соответствует достижению на оптическом элементе радиуса  $r_{\text{lim}}$ , который определяет границу наступления полного внутреннего отражения. Отметим, что резкий обрыв получается исключительно за счёт наличия дискретизации, подробнее об этом перед началом п. 1.2.1.

Периферийные лучи с ростом  $\gamma$  пересекаются всё ближе к плоскости оптического элемента (минимальное расстояние определяется максимальным радиусом, при котором наступает полное внутреннее отражение), а центральные лучи распространяются практически параллельно оптической оси. Причём с ростом  $\gamma$  центральная часть оптического элемента становится всё более плоской и большее число лучей уходит в бесконечность.

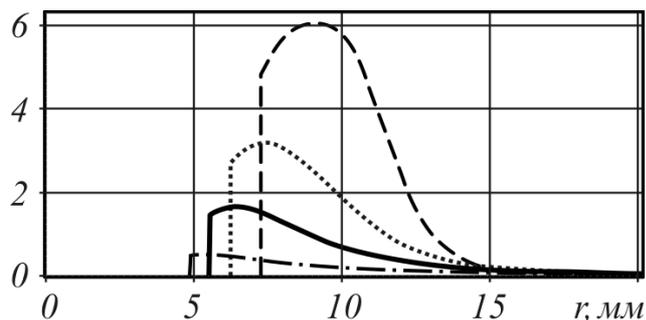


Рисунок 1.7 – Распределение интенсивности (1.28) в зависимости от расстояния от оптического элемента при  $a = 0,1$  и  $n = 1,5$  для  $\gamma = 2,2$  (пунктирная линия),  $\gamma = 2,5$  (точечная линия),  $\gamma = 3$  (сплошная линия),  $\gamma = 5$  (штрихпунктирная линия)

На рисунке 1.8 показаны распределения интенсивности (1.28) в зависимости от расстояния от оптического элемента при  $a = 0,1$  и  $n = 1,5$  для различных значений  $1 < \gamma < 2$ . При  $\gamma \rightarrow 1$  (сверху) зависимость интенсивности от расстояния  $z$  имеет монотонный характер вплоть до границы полного внутреннего отражения (рисунок 1.8a), которая наступает на всё большем удале-

нии от оптического элемента. Ниже, в пункте 1.5, будет показано, что вторая ветвь находится за пределами графика.

При  $2 > \gamma > 1$  две разные части элемента преломляют лучи в одну и ту же точку на оптической оси (см. немонотонную кривую на рисунке 1.4 для  $\gamma = 1,9$ ). Поэтому на рисунке 1.8б, в показаны две ветви, соответствующие этим частям. Точка появления второй ветви (скачок на рисунке 1.8б) соответствует полному внутреннему отражению на элементе. А правая точка смыкания двух ветвей соответствует на элементе радиусу наибольшего фокусного расстояния. Так как это точка гладкого экстремума функции  $z(r)$  при  $r \neq 0$ , то, согласно формуле (1.19), здесь получается бесконечное значение интенсивности (резкий рост интенсивности в правой части графиков).

При  $\gamma \rightarrow 2$  снизу непрерывного перехода к  $\gamma = 2$  не будет.

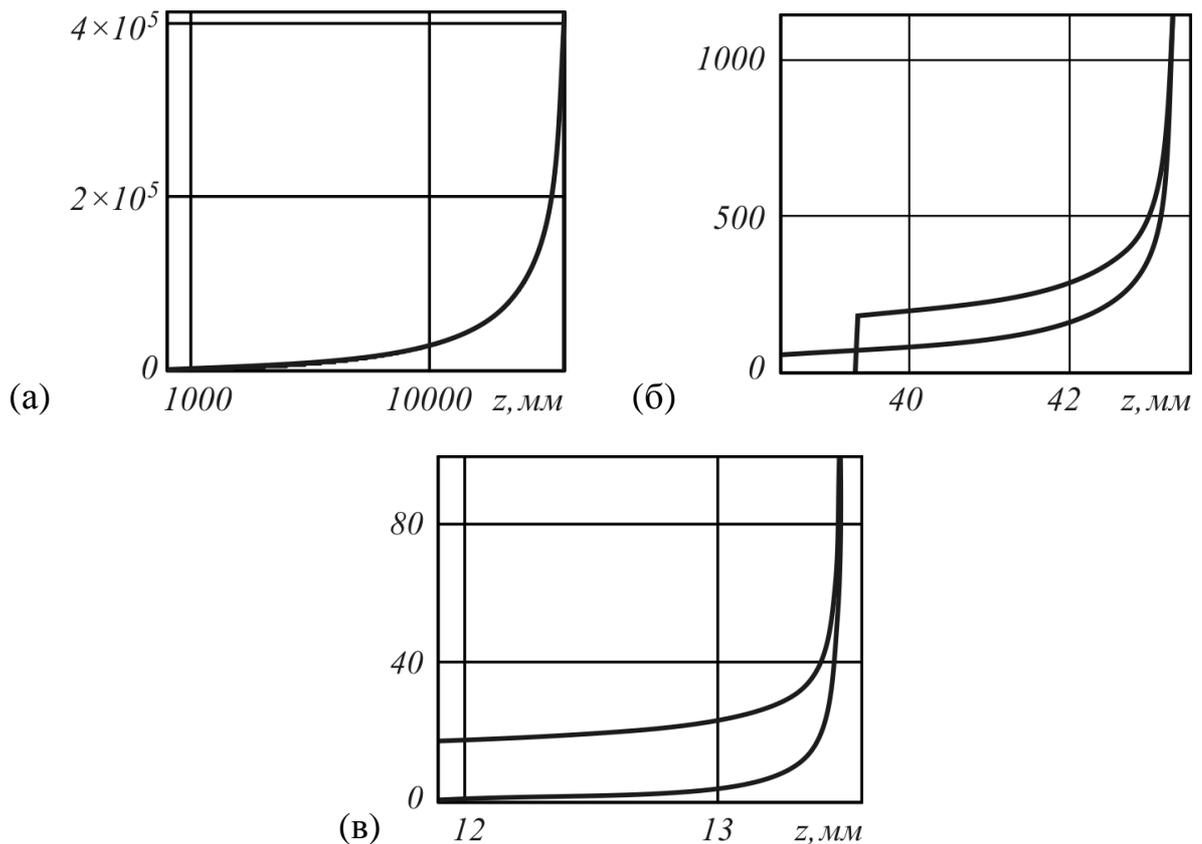


Рисунок 1.8 – Распределение интенсивности (1.28) в зависимости от расстояния от оптического элемента при  $a = 0,1$  и  $n = 1,5$  для  $\gamma = 1,2$  (а),  $\gamma = 1,5$  (б),  $\gamma = 1,9$  (в)

На рисунке 1.9 показаны распределения интенсивности (1.28) в зависимости от расстояния от оптического элемента при  $a = 0,1$  и  $n = 1,5$  для различных значений  $\gamma < 1$ . При  $\gamma \rightarrow 1$  (снизу) элемент начинает работать близко к аксикону и зависимость интенсивности при больших  $z$  стремится к линейной. Если же  $\gamma \rightarrow 0$  (плоскопараллельная пластинка), то зависимость интенсивности будет приближаться к постоянному значению, близкому нулю. Обрыв на графиках связан с конечностью размера элемента.

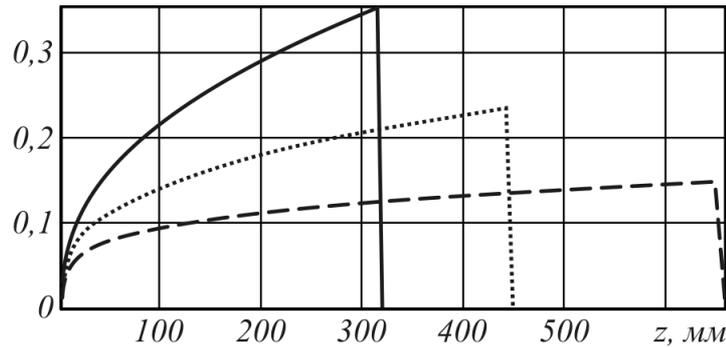


Рисунок 1.9 – Распределение интенсивности (1.28) в зависимости от расстояния от оптического элемента при  $a = 0,1$  и  $n = 1,5$  для  $\gamma = 0,4$  (пунктирная линия),  $\gamma = 0,5$  (точечная линия),  $\gamma = 0,6$  (сплошная линия)

### 1.3 Сравнение со сферической линзой

Аналогичное рассмотрение можно произвести и для сферической линзы.

Из уравнения сечения:  $h(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$  получаем  $\sin(\alpha_i) = \frac{r}{R}$ ,  $\sin(\alpha_t) = \frac{nr}{R}$ .

Из условия, что синус угла преломления не превосходит единицы, находим предельные значения размеров линзы:

$$r \leq r_{\text{lim}} = \frac{R}{n}, \quad h(r) \geq h_{\text{lim}} = R \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}, \quad (1.29)$$

По аналогии с выводом формулы (1.9) получаем координаты пересечения лучей с оптической осью (фокальной точки):

$$z(r) = \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{\sqrt{R^2 - r^2} \cdot \sqrt{R^2 - n^2 r^2} + nr^2}{n\sqrt{R^2 - r^2} - \sqrt{R^2 - n^2 r^2}}. \quad (1.30)$$

Крайние значения  $z(0) = R + \frac{R}{n-1}$ ,  $z(r_{\text{lim}}) = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}}$ , определяют глубину фокуса:

$$\Delta z = nR \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \right). \quad (1.31)$$

При малых значениях радиуса выражение (1.30) упрощается:

$$z(r) \approx R + \frac{R}{n-1} - \frac{n^2 r^2}{2R(n-1)}. \quad (1.32)$$

В области применимости этого приближения можно произвести сравнение сферической и параболической линз, имеющих одинаковое предельное (при угле падения, близком к нулю) фокусное расстояние. Так как в вершине параболы радиус кривизны  $R = 1/(2a)$ , то формула (1.12) примет вид

$$z(r) \approx z_0 + \frac{R}{n-1} - \frac{r^2(n+1)}{2R}. \quad (1.33)$$

Сравнивая (1.32) и (1.33), можно заметить, что фокус параболической линзы при любом показателе преломления отклоняется от своего предельного значения меньше, чем фокус сферической линзы, так как  $n+1 < \frac{n^2}{n-1}$ .

#### 1.4 Эллиптическая линза

По аналогии со сферической линзой рассмотрим осесимметричную линзу, профиль которой описывается уравнением эллипса (рисунок 1.10):

$$\frac{h^2}{R_1^2} + \frac{r^2}{R_2^2} = 1, h(r) = R_1 \sqrt{1 - r^2 / R_2^2}, r(h) = R_2 \sqrt{1 - h^2 / R_1^2}. \quad (1.34)$$

Вычисляя так же, как при выводе формулы (1.2), получим

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\sqrt{R_1^2 - h^2}}{h} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{r}{\sqrt{R_2^2 - r^2}}, \quad (1.35)$$

$$\sin \alpha_i = n \sin \alpha_i, \quad \sin \alpha_i = \frac{R_1 r}{\sqrt{R_2^4 + (R_1^2 - R_2^2) r^2}}. \quad (1.36)$$

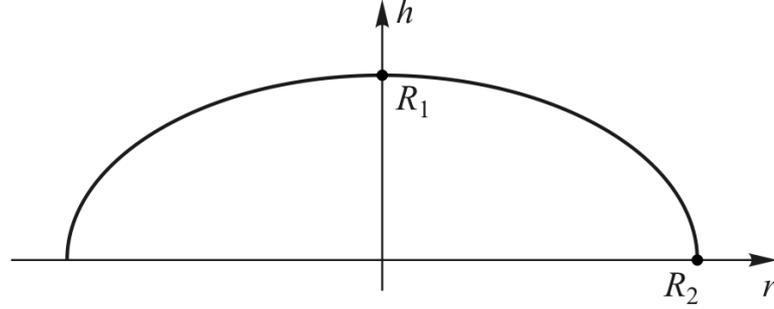


Рисунок 1.10 – Геометрия эллиптической линзы

Так как синус угла преломления не превосходит единицы, можно найти предельные значения размеров линзы:

$$r < r_{\text{lim}} = \frac{R_2^2}{\sqrt{(n^2 - 1)R_1^2 + R_2^2}}, \quad h > h_{\text{lim}} = \frac{R_1^2 \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{(n^2 - 1)R_1^2 + R_2^2}}. \quad (1.37)$$

Если радиус линзы превысит  $r_{\text{lim}}$ , то периферийные лучи будут претерпевать внутреннее отражение.

Аналогично выводу формул (1.3)-(1.5), получим точное значение фокуса

$$z(r) = R_1 \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_2^2}} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\sqrt{R_2^4 + [(1 - n^2)R_1^2 - R_2^2] r^2} \cdot R_2 \cdot \sqrt{R_2^2 - r^2} + n R_1^2 r^2}{n R_2 \sqrt{R_2^2 - r^2} - \sqrt{R_2^4 + [(1 - n^2)R_1^2 - R_2^2] r^2}}. \quad (1.38)$$

Крайние значения:

$$z(r=0) = R_1 + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_2^2}{n-1}, \quad z(r=r_{\text{lim}}) = \frac{R_1^2}{h_{\text{lim}}} = \frac{\sqrt{(n^2 - 1)R_1^2 + R_2^2}}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (1.39)$$

Параксиальное приближение:

$$z(r) \approx R_1 + \frac{R_2^2}{R_1(n-1)} - \frac{r^2}{2(n-1)R_1 R_2^2} \left\{ (n^2 - 1)R_1^2 + R_2^2 \right\}. \quad (1.40)$$

Эллиптическая линза близка к асферической с показателем  $\gamma > 1$  за исключением центральной части, т.к. на оптической оси у эллиптической лин-

зы есть принципиальное отличие (за исключением случая  $\gamma = 2$ ) – её радиус кривизны есть конечное число, не равное нулю. Именно поэтому фокус не попадает на вершину линзы и не уходит в бесконечность.

### **1.5 Рассмотрение возможности бесконечной интенсивности в точке фокуса**

Приведённые выше рассуждения бóльшей своей частью описаны в [104\*]. В данном разделе весьма важный вопрос о достижимости бесконечной интенсивности обсуждается подробнее.

Формула (1.19) на самом деле верна для любой осесимметричной линзы, от формы которой зависит лишь явное выражение функции  $r(z)$  (или  $z(r)$ ), определяющей расстояние, на котором луч, проходящий на линзе через радиус  $r$ , пересекает оптическую ось.

В разделе 1.2 были описаны численные эксперименты вычисления распределения интенсивности по формуле (1.19), точнее её конечно-разностному аналогу. Было обнаружено, что при  $2 > \gamma > 1$  имеется резкий максимум интенсивности на правом конце графика. Он соответствует радиусу с наибольшим текущим фокусным расстоянием. Так как это точка гладкого экстремума функции  $z(r)$  при  $r \neq 0$ , то, согласно формуле (1.19), аналитически получается бесконечное значение интенсивности. Условие, что максимум текущего фокусного расстояния находится не при  $r = 0$ , существенно. Без него в (1.19) получается неопределённость типа  $0 \cdot \infty$ , результат раскрытия которой вовсе не обязательно даст бесконечное значение: например, для параболической линзы ( $\gamma = 2$ ) получается конечное ненулевое число.

### **1.5.1 Бесконечная интенсивность при использовании асферической линзы**

Теперь рассмотрим это явление более подробно и выясним, когда имеется (потенциально) бесконечная интенсивность в фокусе и когда она «более бесконечная». Взятые в кавычки слова означают более высокий порядок или, при одинаковом порядке, больший коэффициент при превалирующем члене.

Из формулы (1.19) следует, что необходимо наличие гладкого экстремума у функции зависимости фокусного расстояния от радиуса. Точнее, достаточно иметь критическую точку, которая может и не быть экстремумом. Исследуя функцию (1.9), можно доказать, что в случае асферической линзы максимум имеется при любом  $\gamma$  в диапазоне  $1 < \gamma < 2$ . Значение радиуса, при котором достигается максимум, равно

$$(r_m)^{2\gamma-2} = \frac{2-\gamma}{\gamma^2 a^2 (n^2 - 1)}. \quad (1.41)$$

Тот факт, что при численном моделировании обнаруживалось некоторое граничное значение  $\gamma_0$ , объясняется следующим образом. При моделировании строился график не зависимости (1.9), а распределения интенсивности (1.19) и заранее было выбрано максимальное значение радиуса. В то же время, если соответствующий (в смысле  $\gamma \rightarrow 1$ ) линзе аксикон является пропускающим лучи, то есть  $a^2(n^2 - 1) < 1$ , то из формулы (1.41) следует, что значение радиуса, соответствующее максимуму, при  $\gamma$ , близком к единице, очень велико и оказалось за пределами графика.

Далее выясним, когда интенсивность «более быстро» стремится к бесконечности. Очевидно, что для этого требуется более пологий максимум – малое по модулю значение второй производной. Получим количественное выражение критерия, при этом не будем ограничиваться линзой (1.1). Разложим функцию  $z(r)$  в ряд Тейлора вблизи точки максимума (для минимума, если

он бывает при какой-либо форме линзы, - аналогично):

$z(r) \approx z(r_m) + \frac{1}{2} z''(r_m)(r - r_m)^2$ . Обратная формула:

$$r(z) = r_m \pm \sqrt{\frac{2(z - z_m)}{z''(r_m)}} = r_m \pm \sqrt{\frac{2(z_m - z)}{-z''(r_m)}}. \quad (1.42)$$

Возьмём производную:  $\frac{dr}{dz} = \mp \frac{1}{\sqrt{-2z''(r_m)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_m - z}}$ . С учётом формулы (1.19)

получаем, что вблизи особой точки интенсивность без знаков «плюс» и «минус» примерно равна

$$I(z) = 2\pi r_m \frac{1}{\sqrt{-2z''(r_m)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_m - z}}. \quad (1.43)$$

Мы видим, что порядок стремления к бесконечности независимо от пологости максимума всегда один и тот же – обратный квадратный корень от  $(z_m - z)$ . Он может увеличиться, только если в критической точке обращается в нуль более одной производной. Но в любом случае порядок будет меньше обратной величины  $(z_m - z)$ . Поэтому увеличить интенсивность вблизи особой точки мы можем только за счёт коэффициента при корне. Получаем, что критерием является величина  $\frac{r_m}{\sqrt{-z''(r_m)}}$ .

Если зависимость фокусного расстояния от радиуса задана формулой (1.9), то невозможно аналитически найти её максимум по переменной  $\gamma$ . Численные эксперименты позволяют сделать следующее заключение. Если соответствующий линзе аксикон является пропускающим лучи, ( $a^2(n^2 - 1) < 1$ ), то критерий не имеет максимума, а монотонно убывает при изменении  $\gamma$  от 1 до 2. В принципе этот результат можно считать очевидным: пропускающий аксикон не ограничен в размерах границей внутреннего отражения. Если же аксикон является отражающим, то при заданных  $a$  и  $n$  имеется оптимальное значение  $\gamma$ .

### 1.5.2 Сжатие фокального отрезка в одну точку

Если мы не будем ограничиваться поверхностями, описываемыми степенной функцией, то можем попытаться получить более яркий фокус за счёт наличия критической точки с более чем одной производной, равной нулю. Но для этого надо знать, можно ли для данной функции зависимости фокусного расстояния от радиуса найти соответствующую функцию, описывающую поверхность оптического элемента.

Для начала надо решить прямую задачу – получить аналог формулы (1.9) для произвольной поверхности. Рассуждая как при выводе (1.9), мы получаем следующую зависимость фокусного расстояния от радиуса для элемента, поверхность которого описывается функцией  $f(r)$ :

$$z(r) = f(r) - \frac{r}{f'(r)} \cdot \frac{1}{n^2 - 1} \cdot \left[ n\sqrt{1 - (n^2 - 1)f'^2(r)} + 1 \right]. \quad (1.44)$$

При выводе сделано два предположения (см. чертёж при выводе (1.9)) –  $f(0)$  является конечным числом,  $f'(r) \leq 0$ . Из (1.44) следует условие отсутствия внутреннего отражения:  $(n^2 - 1)f'^2(r) \leq 1$ .

Очевидно, что наибольшая возможная интенсивность в фокусе будет в том случае, когда фокусное расстояние совсем не зависит от радиуса – является константой. Для этого требуется решить дифференциальное уравнение (1.44) относительно  $f(r)$  при условии, что  $z(r)$  постоянно.

Обозначим  $z(r) = l = const$ ;  $f'(r) = x < 0$ . Будем считать, что фокус находится вне элемента:  $l > f(0) \rightarrow l > f(r)$ . Вместо (1.44) будет алгебраическое

уравнение  $f(r) - \frac{r}{x} \cdot \frac{1}{n^2 - 1} \cdot \left[ n\sqrt{1 - (n^2 - 1)x^2} + 1 \right] = l$ . При замене  $y = 1/x (< 0)$

оно преобразуется в квадратное уравнение:

$r^2 y^2 - 2(l - f)ry - \left[ (l - f)^2 (n^2 - 1) + n^2 r^2 \right] = 0$ , имеющее отрицательный корень

$y = \frac{1}{r} \left[ (l-f) - n\sqrt{(l-f)^2 + r^2} \right]$ . Возвращаясь к первоначальной переменной  $f'(r) = x = 1/y$ , получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{dr} = \frac{r}{(l-f) - n\sqrt{(l-f)^2 + r^2}} \quad (1.45)$$

с начальным условием  $f(r=0) = z_0$ . Заметим, что при его выводе мы нигде не использовали постоянность величины  $l = z(r)$ . Поэтому его можно использовать для получения формы образующей элемента для любой заданной функции зависимости фокусного расстояния от радиуса, а, учитывая (1.19), и любого распределения интенсивности вдоль оптической оси.

Если вернуться к случаю  $l = const$ , то уравнение (1.45) можно представить в более краткой форме, если сделать линейную подстановку:

$$y = l - f; \quad y' = -f' (> 0): \quad \frac{dy}{dr} = \frac{r}{n\sqrt{y^2 + r^2} - y} = \frac{r}{y \cdot \left( n\sqrt{1 + r^2/y^2} - 1 \right)}.$$

Это уравнение является однородным, и поэтому имеет решение в квадратурах. Для его решения используется стандартный способ [105] – делается замена  $t = y/r$ ;  $y = tr$ ;  $y' = t'r + t$ , после чего будет уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dt}{dr} = \left( \frac{1/t}{n\sqrt{1+1/t^2} - 1} - t \right) / r. \text{ Или, после деления пере-}$$

менных,

$$\frac{dt}{\frac{1/t}{n\sqrt{1+1/t^2} - 1} - t} = \frac{dr}{r}. \quad (1.46)$$

Правая часть интегрируется тривиально:  $\int \frac{dr}{r} = \ln r + C$ . В левой части

после преобразований и замены переменной получаем:

$$\int \frac{n\sqrt{t^2 + 1} - t}{(t^2 + 1) - nt\sqrt{t^2 + 1}} dt = [t = shx] = \int \frac{-nchx + shx}{-chx + nshx} dx. \text{ Последний интеграл име-}$$

ется в таблице [106, с.148]:

$$\int \frac{A + Bchx + Cshx}{achx + bshx} dx = (b > |a|) = \frac{A}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln th \frac{x + arth(a/b)}{2} + \frac{1}{b^2 - a^2} [(Cb - Ba)x + (Bb - Ca) \ln sh(x + arth(a/b))]. \quad (1.47)$$

В нашем случае  $A = 0$ ;  $B = -n$ ;  $C = 1$ ;  $a = -1$ ;  $b = n$ . Подставив эти значения в (1.47), получаем интеграл от левой части (1.46):  $-\ln sh(x - arth(1/n))$ . Таким образом, решение дифференциального уравнения (1.46) следующее:

$$-\ln sh(x - arth(1/n)) = \ln r + C \sim \frac{1}{sh(x - arth(1/n))} = C_1 r. \quad (1.48)$$

В исходных переменных из (1.48) получаем:  $\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{nt - \sqrt{1 + t^2}} = C_1 r$ . Подставив

$t = y/r$ , получим неявное решение  $ny - \sqrt{r^2 + y^2} = \sqrt{n^2 - 1}/C_1 = C_2$ , а явное

решение выражается формулой  $y_{1,2} = \frac{nC_2}{n^2 - 1} \pm \frac{1}{n^2 - 1} \sqrt{(n^2 - 1)r^2 + C_2^2}$ . Наконец,

заменив  $f = l - y$ , находим решение уравнения (1.45) – выражение для функции, описывающей поверхность элемента:

$$f = l - \frac{nC_2}{n^2 - 1} - \frac{1}{n^2 - 1} \sqrt{(n^2 - 1)r^2 + C_2^2}. \quad (1.49)$$

Мы оставили только знак «минус» из требования отрицательности производной  $f'(r) \leq 0$ . Из начального условия находим значение константы  $C_2 = (l - z_0)(n - 1)$ , что даёт конечный вид решения (1.49):

$$f(r) = l - \frac{n(l - z_0)}{n + 1} - \frac{\sqrt{n - 1}}{n^2 - 1} \sqrt{(n + 1)r^2 + (l - z_0)^2(n - 1)}. \quad (1.49a)$$

Хотя для вычислений явное выражение (1.49a) удобнее, для наглядного представления формы элемента лучше выражение без знака корня. Если ввести обозначения  $r_0^2 = (l - z_0)^2(n - 1)$   $f_0 = l - \frac{n(l - z_0)}{n + 1}$ , то получаем уравнение

$$(f - f_0)^2 - \frac{r^2}{n^2 - 1} = \frac{r_0^2}{(n^2 - 1)(n + 1)}. \quad (1.50)$$

Это уравнение гиперболы, то есть оптический элемент есть сегмент левой половины двуполостного гиперboloида вращения. Из (1.50) или (1.49а) видно, что при увеличении радиуса такой элемент приближается к аксикону с параметрами, лежащими на границе пропускания и отражения. Такой аксикон является вырожденным случаем постоянного фокусного расстояния – фокус находится в вершине аксикона.

## **1.6 Рассмотрение конфигураций хода лучей и расчёт комплексной функции пропускания рефракционных аксиконов**

Хотя хронологически работы [107\*, 108\*] предшествовали [104\*], считаю логичным данный параграф поместить после §1.1. В нём более подробно будет рассмотрен аксикон, что имеет следующие причины: этот элемент достаточно широко используется; кроме того, благодаря своей форме он имеет одинаковый угол падения лучей по всему входному зрачку, что существенно упрощает вычисления. На основе геометро-оптического анализа рассмотрен ход лучей через рефракционный аксикон в двух конфигурациях: при падении лазерного излучения на плоскую часть аксикона и на остриё. Выполненные расчёты позволяют получить комплексную функцию пропускания аксикона, которую далее можно использовать в векторном интеграле Рэлея - Зоммерфельда при моделировании распространения в ближней зоне дифракции.

### ***1.6.1 Расчёт хода лучей при падении излучения на плоскую сторону рефракционного аксикона***

Будем рассчитывать комплексную функцию пропускания аксикона в следующем виде:

$$\tau(r) = \exp(-ikpr), \quad (1.51)$$

где параметр  $p = \sin \beta$  связан с углом, под которым лучи выходят из аксикона, и соответствует числовой апертуре оптического элемента (рисунок 1.11).

Рассмотрим рефракционный аксикон, имеющий относительный показатель преломления  $n$  (полагаем  $n > 1$ ), и угол при вершине  $2\alpha_0$ . На плоской стороне преломления не происходит, а на наклонной в соответствии с законом преломления имеем:  $\sin \alpha_t = n \sin \alpha_i$ , причём  $\alpha_i = 90^\circ - \alpha_0$ . Таким образом, угол преломления вычисляется по формуле:

$$\alpha_t = \arcsin(n \cos \alpha_0). \quad (1.52)$$

Отсутствию внутреннего отражения соответствует условие, что синус угла преломления не превосходит единицы, то есть неравенство

$$\alpha_0 \geq \alpha_{tir} = \arccos(1/n). \quad (1.53)$$

В частности, если  $n = 1,5$ , то  $\alpha_{tir} \approx 48,19^\circ$ .

Пример полного хода лучей при выполнении условия (1.53) изображён на рисунке 1.11 для  $n=1,5$  и  $\alpha_0 \geq 60^\circ$ .

Угол между выходящим лучом и горизонталью равен

$$\beta = \alpha_t - (90^\circ - \alpha_0) = \arcsin(n \cos \alpha_0) + \alpha_0 - 90^\circ. \quad (1.54)$$

Его величина используется в функции пропускания аксикона (1.51).

Очевидно, выходящий из такого аксикона луч не может идти под более крутым углом к оптической оси, чем  $\alpha_{tir}$ , соответствующий наступлению полного внутреннего отражения (1.53). В частности, для  $n=1,5$  предельное значение  $\beta = 48,19^\circ$ , следовательно, числовая апертура такого аксикона не превысит  $p=0,75$ . Увеличить предельное значение числовой апертуры можно за счёт увеличения показателя преломления материала, из которого изготавливается аксикон. Если условие (1.53) не выполняется, то происходит полное внутреннее отражение и в рамках геометро-оптической теории лучи из аксикона справа не выходят. Однако формально можно записать выражение для параметра аксикона в виде комплексного числа:

$$p = \cos \alpha_0 \left( n \sin \alpha_0 - i \sqrt{n^2 \cos^2 \alpha_0 - 1} \right). \quad (1.55)$$

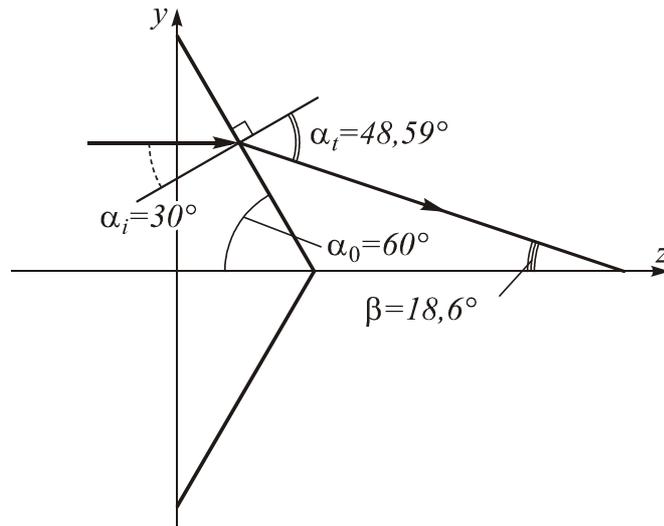


Рисунок 1.11 – Ход лучей при отсутствии внутреннего отражения

В области полного отражения эта формула сохраняет справедливость для углов  $\alpha_0 > \alpha_{ver}$  (см. ниже). Наличие в выражении (1.55) мнимой части соответствует появлению экспоненциально затухающей амплитудной составляющей в (1.51).

Геометрический ход лучей внутри аксикона при внутреннем отражении также является интересным. Если имеет место внутреннее отражение от поверхности аксикона один раз (рассмотрим отражение от верхней наклонной стороны), то угол падения на противоположную сторону поверхности равен (рисунки 1.12 – 1.16)  $\alpha_i = 3\alpha_0 - 90^\circ$ . Отрицательный угол означает, что луч падает слева от нормали, а положительный – справа. Предположим, что  $n > 2/\sqrt{3} \approx 1,155$ , за счёт чего условие полного отражения может выполняться для углов  $\alpha_0 > 30^\circ$ . В этом случае значения угла падения возможны как отрицательные, так и положительные.

При отрицательном угле падения  $\alpha_i$  горизонтальная проекция падающего луча направлена вправо и после преломления увеличивается, что показано на рисунке 1.12 ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = 20^\circ$ ).

При нулевом угле падения  $\alpha_i$  преломления не происходит; горизонтальная проекция падающего луча направлена вправо и не изменяется, что показано на рисунке 1.13 ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = 30^\circ$ ).

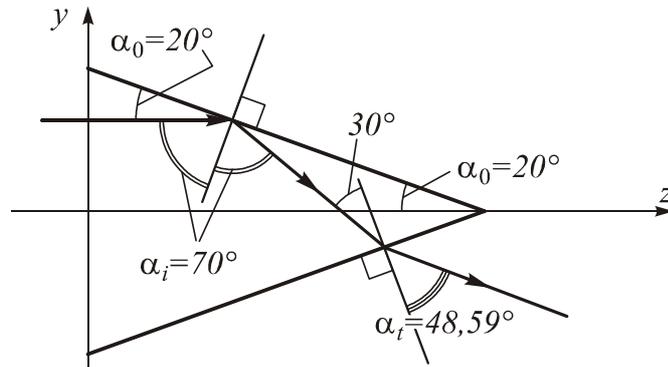


Рисунок 1.12 – Ход лучей при наличии внутреннего отражения,  $n = 1,5$ ;

$$\alpha_0 < 30^\circ$$

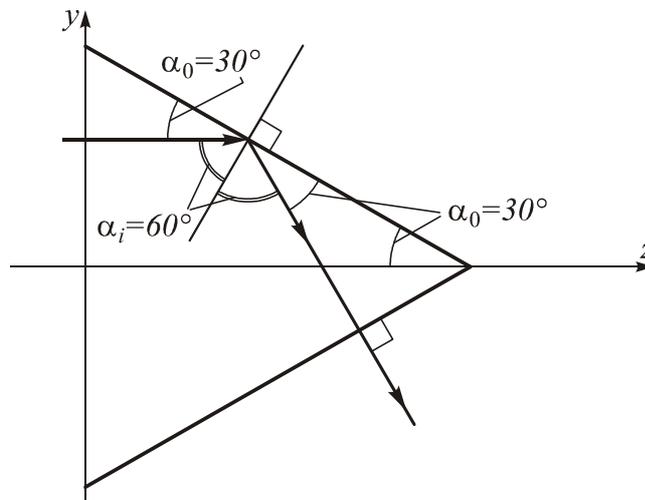


Рисунок 1.13 – Ход лучей при наличии внутреннего отражения,

$$n = 1,5; \alpha_0 = 30^\circ$$

При положительном угле падения  $\alpha_i$  горизонтальная проекция падающего луча направлена вправо (если  $\alpha_0 < 45^\circ$ ) и после преломления уменьшается, но при  $\alpha_0 < \alpha_{ver}$  остаётся направленной вправо, что показано на рисунке 1.14 ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = 35^\circ$ ).

Существует угол  $\alpha_0 = \alpha_{ver}$ , при котором преломлённый луч идёт вертикально ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = \alpha_{ver}$ , рисунок 1.15). В результате получаем поворот лучей на 90 градусов, что хорошо видно, если посмотреть со стороны острия.

При  $\alpha_0 > \alpha_{ver}$  горизонтальная проекция преломлённого луча уже направлена влево ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 > \alpha_{ver}$ , рисунок 1.16).

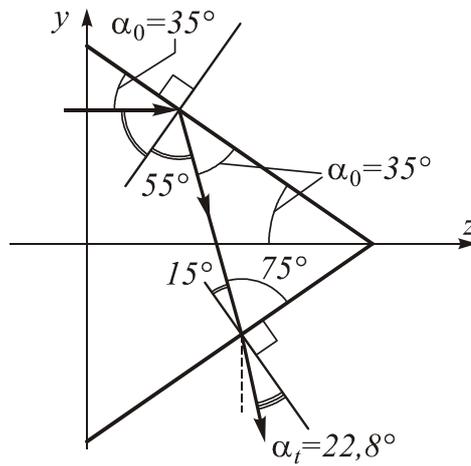


Рисунок 1.14 – Ход лучей при наличии внутреннего отражения,

$$n = 1,5 ; \alpha_{ver} > \alpha_0 > 30^\circ$$

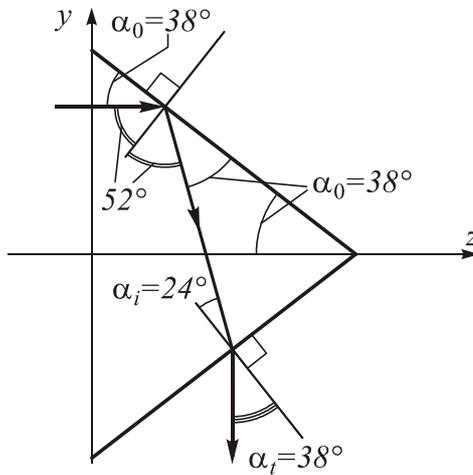


Рисунок 1.15 – Ход лучей при наличии внутреннего отражения,

$$n = 1,5 ; \alpha_0 = \alpha_{ver}$$

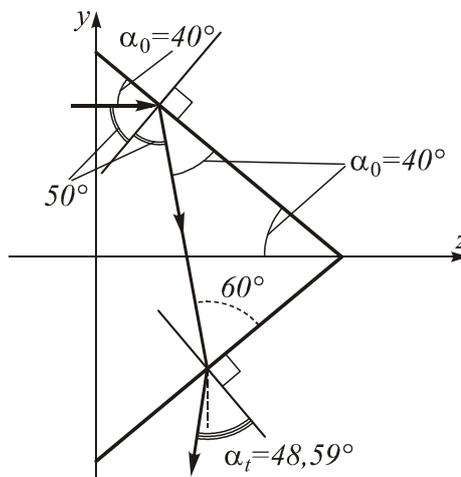


Рисунок 1.16 – Ход лучей при наличии внутреннего отражения,

$$n = 1,5 ; \alpha_0 > \alpha_{ver}$$

Определить угол  $\alpha_{ver}$  можно на основе того, что (рисунок 1.15) преломлённый луч идёт вертикально, если  $\alpha_t = \alpha_0$ . Имеем уравнение  $\sin \alpha_{ver} = n \sin(3\alpha_{ver} - 90^\circ)$ . Используя формулу косинуса кратных дуг, преобразуем его к виду:

$$\sin \alpha_{ver} + n(4 \cos^3 \alpha_{ver} - 3 \cos \alpha_{ver}) = 0. \quad (1.56)$$

После преобразований и обозначения  $x = \operatorname{tg} \alpha_{ver}$ , получим алгебраическое уравнение  $x^3 - 3nx^2 + x + n = 0$ . Требуется найти его корень, удовлетворяющий неравенству  $30^\circ < \alpha_{ver} < \arccos(1/n)$  или  $1/\sqrt{3} < x < \sqrt{n^2 - 1}$ , при этом параметр  $n > 2/\sqrt{3}$ . На данном отрезке есть единственный корень при выполнении неравенства  $n \geq (\sqrt{23 + \sqrt{17}})/4 \approx 1,302$ . Если оно не выполнено, то вертикальное прохождение луча невозможно и ход лучей будет как на рисунке 1.14. При  $n = 1,5$   $\alpha_{ver} \approx 38^\circ$ .

Рассмотрим также возможность повторного полного внутреннего отражения от противоположной (нижней) стороны. Это может произойти, если синус угла преломления на нижней стороне будет больше единицы, что после преобразований соответствует выражению:

$$\alpha_0 > 30^\circ + \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{n}. \quad (1.57)$$

При  $n = 1,5$  получим  $\alpha_0 > 43,94^\circ$ . Это значение меньше  $48,19^\circ$  (граница отражения от верхней стороны), поэтому повторное отражение от противоположной стороны возможно. На рисунке 1.17 показаны различные варианты хода лучей при  $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = 44^\circ, 45^\circ, 47^\circ$ .

Факт, что при угле  $45^\circ$  луч идёт строго назад, как в зеркале, очевиден из симметрии, но это можно доказать и геометрически – угол  $\gamma$  в треугольнике на рисунке 1.17б равен  $4\alpha_0 - 90^\circ$ . Горизонтальному распространению соответствует  $\gamma = 90^\circ$ , то есть  $\alpha_0 = 45^\circ$ .

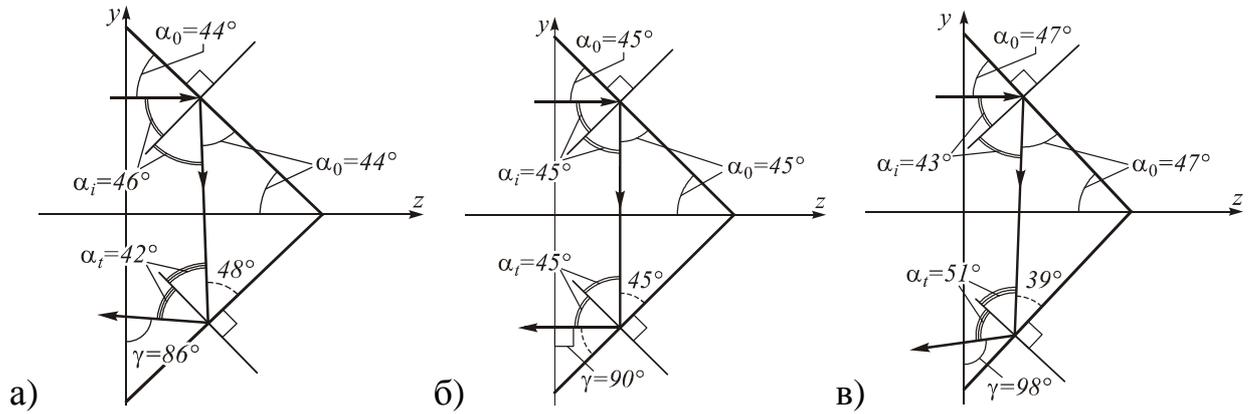


Рисунок 1.17 – Ход лучей при наличии внутреннего отражения от обеих сторон,  $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 < 45^\circ$  (а),  $\alpha_0 = 45^\circ$  (б),  $\alpha_0 > 45^\circ$  (в)

Сравнивая неравенства (1.57) и (1.53), можно сделать вывод, что угол, при котором происходит отражение от обеих сторон, можно подобрать, если выполняется неравенство  $30^\circ + \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{n} < \arccos \frac{1}{n}$ , которое после преобразований примет вид  $n > \sqrt{2}$ .

В конфигурациях аксиконов, представленных на рисунках 1.12 – 1.17, предполагается, что  $\alpha_0 < 60^\circ$ . Это, учитывая неравенство (1.53), означает, что только при  $n < 2$  рассмотренные конфигурации исчерпывают все возможности внутреннего отражения. Если же  $n > 2$ , то внутреннее отражение возможно и при угле больше 60 градусов. При таком большом угле, возможно, будут другие конфигурации.

Выясним также, возможно ли отражение от третьей (левой) стороны, для чего рассмотрим рисунок 1.17а.

Угол  $\alpha_0$  – больше 30 (см. (1.57)), но меньше 45 градусов, а угол падения на левую сторону равен  $90^\circ - \gamma$ , соответственно синус угла преломления равен  $n \sin(90^\circ - \gamma) = n \cos \gamma = n \cos(4\alpha_0 - 90^\circ)$ . Таким образом, надо решить неравенство:  $n \cos(4\alpha_0 - 90^\circ) > 1$ , которое эквивалентно

$$\alpha_0 < 22,5^\circ + \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{n}. \quad (1.58)$$

В то же время должно происходить отражение от нижней стороны, поэтому отражение от левой стороны может быть, если удовлетворяется двойное неравенство:

$$30^\circ + \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{n} < \alpha_0 < 22,5^\circ + \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{n}. \quad (1.59)$$

Оно будет истинным, если  $\arcsin \frac{1}{n} < \frac{180^\circ}{7}$  или  $n > 2,305$ . Примером может служить конфигурация, аналогичная рисунку 1.17а, с параметрами аксикона  $n = 3$  (при этом  $36,49^\circ < \alpha_0 < 40,13^\circ$ ) и  $\alpha_0 = 37^\circ$ .

Рассмотрим также случай, аналогичный рисунку 1.17в.

Угол  $\alpha_0$  – больше 45 градусов, но меньше 60 градусов (см. рассуждения о рассмотренных конфигурациях для  $n < 2$ ), а угол падения на левую сторону равен  $\gamma - 90^\circ$ , соответственно синус угла преломления равен  $n \sin(\gamma - 90^\circ) = n \sin(4\alpha_0 - 180^\circ)$ . Таким образом, надо решить неравенство  $n \sin(4\alpha_0 - 180^\circ) > 1$ , которое эквивалентно:

$$\alpha_0 > 45^\circ + \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{n}. \quad (1.60)$$

В то же время должно происходить отражение от нижней стороны, поэтому отражение от левой стороны может быть, если удовлетворяется двойное неравенство:

$$45^\circ + \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{n} < \alpha_0 < \arccos \frac{1}{n}. \quad (1.61)$$

Оно будет истинным, если  $\arcsin(1/n) < 36^\circ$  или  $n > 1,701$ . Примером может служить конфигурация, аналогичная рисунку 1.17в, с параметрами аксикона  $n=1,8$ , (при этом  $53,44^\circ < \alpha_0 < 56,25^\circ$ ) и  $\alpha_0 = 55^\circ$ .

Если  $n < 2/\sqrt{3}$ , то условие (1.53) не выполняется только для углов  $\alpha_0 < 30^\circ$ . В этом случае величина  $3\alpha_0 - 90^\circ$  может быть только отрицательной. Соответственно ход лучей возможен только как на рисунке 1.12.

### 1.6.2 Расчёт хода лучей при падении излучения на остриё рефракционного аксикона

Как было показано в предыдущем пункте, при расположении аксикона остриём вправо можно не достичь предельной для свободного пространства числовой апертуры, поэтому рассмотрим другое расположение аксикона по отношению к освещающему пучку, а именно: остриём влево (рисунок 1.18).

Пусть  $n$  – относительный показатель преломления вещества аксикона и  $\alpha_0$  – половина угла при вершине аксикона. На левой стороне в соответствии с законом преломления имеем:  $\sin \alpha_t^{(1)} = \sin \alpha_i^{(1)} / n$ , причём  $\alpha_i^{(1)} = 90^\circ - \alpha_0$ . Таким образом, угол преломления на левой стороне вычисляется по формуле:

$$\alpha_t^{(1)} = \arcsin\left(\frac{\cos \alpha_0}{n}\right). \quad (1.62)$$

На правой стороне имеем:  $\sin \alpha_t^{(2)} = n \sin \alpha_i^{(2)}$ , причём  $\alpha_i^{(2)} = (90^\circ - \alpha_0) - \alpha_t^{(1)} = 90^\circ - (\alpha_0 + \alpha_t^{(1)})$ . Таким образом, угол преломления на правой стороне вычисляется по формуле:

$$\alpha_t^{(2)} = \arcsin\left(n \sin \alpha_i^{(2)}\right) = \arcsin\left\{n \cos\left[\alpha_0 + \arcsin\left(\frac{\cos \alpha_0}{n}\right)\right]\right\}. \quad (1.63)$$

Пример хода лучей изображён на рисунке 1.18 ( $n = 1,5$ ;  $\alpha_0 = 60^\circ$ ).

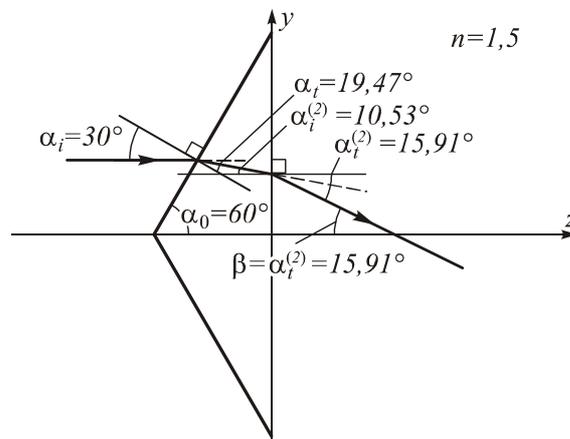


Рисунок 1.18 – Ход лучей при отсутствии внутреннего отражения

Угол между выходящим лучом и горизонталью равен  $\beta = \alpha_i^{(2)}$ . При определённых условиях величина  $\sin \alpha_i^{(2)}$  может быть больше единицы (будет рассмотрено ниже). В этом случае, так же как и для аксикона первого типа, можно формально использовать выражение (1.63) для расчёта комплексной функции пропускания на выходе аксикона. В отличие от аксикона первого типа синус будет действительным числом больше единицы, поэтому произойдёт только изменение фазы падающего пучка.

Выясним, когда величина  $n \sin \alpha_i^{(2)}$  из формулы (1.63) будет больше единицы. Решим уравнение

$$n \cos \left( \alpha_0 + \arcsin \left( \frac{\cos \alpha_0}{n} \right) \right) = 1. \quad (1.64)$$

Левая часть монотонно убывает при увеличении  $\alpha_0$  от 0 до 90 градусов, причём при  $\alpha_0 = 90^\circ$  она равна нулю. Поэтому корень уравнения, если он есть, может быть только один. Уравнение (1.64) приводится к форме:

$$n^2 \cos^2 \alpha_0 - \cos^4 \alpha_0 = 1 + \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 + 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \quad (1.65)$$

После преобразований и замены  $\operatorname{tg} \alpha_0 = x$  получим алгебраическое уравнение

$$x^2 + 2x + (2 + n^2) = 0, \quad (1.66)$$

которое имеет корни  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{n^2 - 1}$ . Оба корня действительные, но положительным один из них будет только при условии  $n^2 > 2$ . Получаем, что внутреннее отражение отсутствует в следующем случае:

$$\begin{aligned} n^2 < 2, \quad \alpha_0 - \text{любое}, \\ n^2 > 2, \quad \alpha_0 > \operatorname{arctg} \left( \sqrt{n^2 - 1} - 1 \right). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Ход лучей для случая наличия внутреннего отражения изображён на рисунке 1.19:  $n = 2$ ;  $\alpha_0 = 30^\circ (< 36,21^\circ)$  (а) и  $n = 1,9$ ;  $\alpha_0 = 25^\circ (< 31,61^\circ)$  (б). Видно, что луч идёт строго назад.

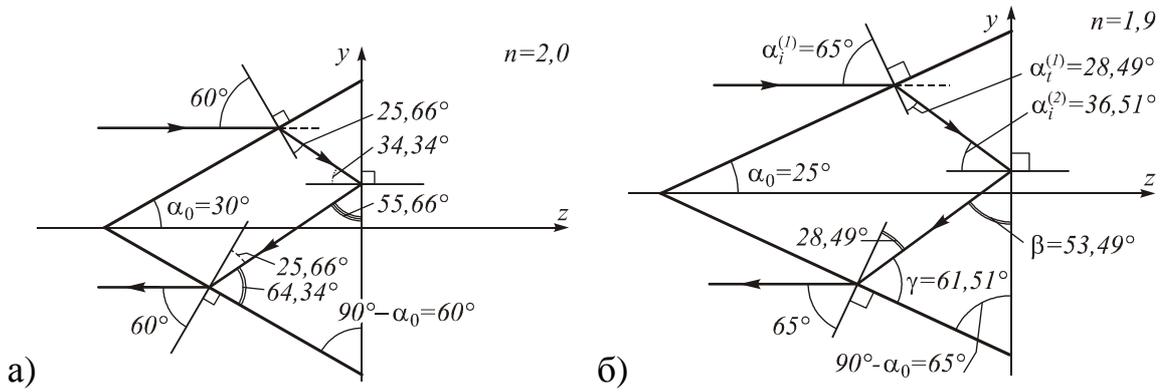


Рисунок 1.19 – Ход лучей при наличии внутреннего отражения

### 1.6.3 Примеры вычисления комплексной функции пропускания аксикона

В данном пункте приводятся несколько примеров расчёта функции пропускания аксикона, которая используется для вычисления амплитуды поля в интеграле Рэлея – Зоммерфельда.

В предыдущих пунктах было получено, что при относительном показателе преломления материала аксикона  $n = 1,5$  полное внутреннее отражение возникает при  $\alpha < 48,19^\circ$ . Рассмотрим микроаксикон радиусом  $R$  и высотой  $h$ , освещаемый с плоской стороны ограниченной плоской волной с длиной  $\lambda$ .

При  $R=10\lambda$  и  $h=5\lambda$   $\alpha_0 = 63,43^\circ$  и по формуле (1.54) на выходе из аксикона лучи будут идти под углом  $\beta \approx 15,56^\circ$  к оптической оси, что соответствует  $p \approx 0,268$  в формуле (1.51). В данном случае параметр  $p$  определяет числовую апертуру аксикона.

Увеличение высоты аксикона  $h$  при неизменном радиусе  $R$  ведёт к увеличению числовой апертуры вплоть до момента внутреннего отражения лучей от поверхности аксикона, которое при  $n = 1,5$  наступит для  $h \approx 0,894R$ .

Наибольшая достижимая числовая апертура при использовании рефракционного аксикона в такой конфигурации:

$$p(\alpha_0 = \alpha_{tir}) = \sin \alpha_{tir} = \sin \left[ \arccos(1/n) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (1.68)$$

Далее, например, при  $h = R$  и  $\alpha_0 = 45^\circ$  в рамках геометрической оптики свет не будет проходить через аксикон, отражаясь от границы двух сред. Однако волновая теория предсказывает проникновение части излучения в виде затухающих волн за границу оптического элемента. В этом случае комплексное распределение сразу за аксиконом можно определить по формуле (1.55). В частности, для  $h = R$   $p \approx 0,75 - 0,25i$  и  $\tau(r) = \exp(-0,25kr)\exp(-i0,75kr)$ , т.е. на выходе аксикона появляются не только фазовые изменения, но и наложение экспоненциально затухающей амплитуды.

При дальнейшем уменьшении угла при вершине экспоненциальный коэффициент в амплитудной составляющей будет расти до конечной величины  $\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} [\text{Im}(p)] = -\sqrt{n^2 - 1}$ . Фазовый набег при этом должен нивелироваться. Таким образом, для  $n=1,5$  предельная амплитудная функция будет  $\exp(-1,12kr)$ . Диаметр по полуспаду интенсивности для такой функции  $\text{FWHM} \approx 0,1\lambda$ .

При расположении аксикона вершиной к освещающему пучку полное внутренне отражение наступает при более острых углах, чем для первой конфигурации. Например, при  $n=1,5$  для второй конфигурации  $\alpha_{\text{irr}} = 6,75^\circ$  вместо  $\alpha_{\text{irr}} = 48,19^\circ$ , соответствующего первой конфигурации.

После наступления внутреннего отражения комплексное распределение на выходе из аксикона не будет приобретать амплитудную составляющую, зато параметр аксикона  $p(\alpha_0) = n \cos \left[ \alpha_0 + \arcsin \left( \frac{\cos \alpha_0}{n} \right) \right]$  станет больше единицы, что соответствует возникновению затухающих волн при дальнейшем распространении в свободном пространстве.

При дальнейшем уменьшении угла при вершине числовая апертура аксикона будет расти до конечной величины  $\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} p = n \cos \left[ \arcsin (1/n) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} n$ . В частности, для  $n = 1,5$   $p(0) \approx 1,118$ .

Результаты моделирования будут приведены в главе 3.

Отметим, что при построении в пунктах 1.6.1, 1.6.2 хода лучей не использовалась коническая форма аксикона, поэтому все результаты сохраняют силу и в одномерном (цилиндрическом) случае; при этом в выражении функции пропускания вместо  $\exp(-ikpr)$  будет  $\exp(-ikp|x|)$ . Цилиндрический аксикон в рамках волновой теории рассматривался в [109]; в числе полученных результатов получено, что при анализе прохождения поля через микроаксикон решение строгой электромагнитной теории вполне согласуется с геометрико-оптическим рассмотрением; в том числе и при наступлении полного внутреннего отражения.

## 1.7 Выводы к главе 1

**1.** На основе геометрико-оптического анализа асферической осесимметричной рефракционной линзы (форма образующей которой описывается в виде степенной функции от радиуса) получены выражения:

- предельных значений радиусов, соответствующих полному внутреннему отражению;
- расстояний от вершины линзы до точки пересечения оптической оси лучами, падающими на область оптического элемента заданного радиуса;
- распределения интенсивности на оптической оси при падении плоского пучка.

**2.** Анализ полученных выражений позволяет сделать следующие выводы о действии элемента в соответствии с показателем степени  $\gamma$ :

- при  $\gamma \geq 2$  (обобщённая линза) лучи, проходящие через центральную часть линзы, фокусируются на более далёком расстоянии от элемента, чем периферийные; а вблизи элемента будет область тени. С ростом  $\gamma$  периферийные лучи пересекают оптическую ось ближе к плоскости оптического элемента, а центральные лучи распространяются практически параллельно

оптической оси. С ростом  $\gamma$  центральная часть становится всё более плоской, и всё бóльшая доля лучей пересекает ось вдали от элемента.

– при  $1 < \gamma < 2$  (фраксикон, промежуточный элемент между аксиконом и параболической линзой) лучи, проходящие через центральную часть линзы, фокусируются непосредственно в вершине линзы. Периферийные лучи фокусируются ближе к поверхности элемента, чем «средние» лучи. Заметим также, что средняя часть такой линзы работает без aberrаций и принимает участие в формировании наиболее интенсивной точки, интенсивность в которой теоретически не ограничена.

– при  $0 < \gamma < 1$  (дробный аксикон, элемент имеет вогнутый профиль) центральная часть оптического элемента не пропускает лучи из-за полного внутреннего отражения, зато нет ограничений на размер элемента, кроме размера входного зрачка. При уменьшении показателя периферийные лучи будут пересекать оптическую ось на всё большем удалении от оптического элемента.

**3.** Также проведено сравнение выражений, упомянутых в выводе №1, с аналогичными для рефракционной сферической линзы и линзы, профиль которой описывается уравнением эллипса.

Сравнение со сферической линзой позволяет сделать вывод, что фокус параболической линзы при любом показателе преломления отклоняется от своего параксиального значения меньше, чем фокус сферической линзы. Эллиптическая линза, хотя и близка к асферической с показателем  $\gamma > 1$ , но имеет принципиальное отличие: в центральной части её радиус кривизны есть конечное число, не равное нулю.

**4.** Отдельно обсуждён вопрос о достижимости бесконечной интенсивности в точке фокуса, естественно, без учёта дифракционных эффектов.

**5.** Проведено описание конфигураций хода лучей при освещении рефракционного аксикона с плоской стороны и со стороны его вершины. Получена комплексная функция пропускания для обоих вариантов, причём полу-

ченные выражения справедливы и при углах, соответствующих полному внутреннему отражению.

Анализ хода лучей для аксикона, освещённого с плоской стороны, показал, что выходящий из такого аксикона луч не может идти под углом к оптической оси, бóльшим, чем  $\alpha_{tir} = \arccos(1/n)$ , соответствующим наступлению полного внутреннего отражения. Увеличить предельное значение числовой апертуры можно за счёт увеличения показателя преломления материала аксикона. При полном внутреннем отражении в рамках геометро-оптической теории лучи из аксикона не выходят. Однако волновая теория предсказывает наличие затухающих волн вблизи оптического элемента, поэтому предложено описывать комплексную функцию пропускания такого аксикона в виде амплитудной и фазовой составляющей (1.55).

При расположении аксикона вершиной к освещающему пучку полное внутреннее отражение наступает при более острых углах, чем для первой конфигурации, а при небольшом показателе преломления его совсем не будет. Кроме того, при внутреннем отражении комплексное распределение на выходе из аксикона не приобретает амплитудную составляющую, но параметр аксикона превысит единицу, что соответствует возникновению затухающих волн при дальнейшем распространении в свободном пространстве. Повысить числовую апертуру даже во второй конфигурации можно только за счёт увеличения показателя преломления материала аксикона и его удлинения, поэтому удобнее использовать дифракционный аналог рефракционного аксикона.

## 2 ДЕЙСТВИЕ АСФЕРИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ В ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ В РАМКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФРЕНЕЛЯ

В главе 1 асферическая линза была рассмотрена в рамках геометрической оптики. Однако, если мы выйдем за рамки применимости такого рассмотрения, то получим в лучшем случае лишь качественное предсказание свойств оптического элемента. Такая ситуация имеет место, например, при достаточно малых размерах элемента. Кроме того, дифракционные оптические элементы (ДОЭ) сами по себе имеют ряд достоинств. В силу всего перечисленного требуется сделать расчёт действия линзы по волновой теории электромагнитного поля. Вместо поверхности, описываемой степенной функцией, рассматривается степенная фазовая функция.

### 2.1 Общие соотношения

Исходя из интегральной теоремы Рэлея-Зоммерфельда, можно получить, что в условиях применимости параксиального приближения и наличии радиальной симметрии падающего поля, комплексная амплитуда вычисляется по формуле:

$$U(\rho, z) = \frac{k}{iz} \exp\left[ ikz + \frac{ik\rho^2}{2z} \right] \times \int_0^R U_0(r) \exp\left[ \frac{ikr^2}{2z} \right] J_0\left( \frac{k\rho r}{z} \right) r dr. \quad (*)$$

На оптической оси формула (\*) примет вид:

$$U(\rho = 0, z) = \frac{k}{iz} \exp(ikz) \times \int_0^R U_0(r) \exp\left[ \frac{ikr^2}{2z} \right] r dr. \quad (**)$$

Далее в ограничиваемся случаем, когда применение формулы (\*) законно.

## 2.2 Постановка задачи

Бурный интерес во второй половине прошлого века к бездифракционным пучкам [3,110] сделал аксикон – как рефракционный [1], так и дифракционный [69] – классическим элементом современной оптики. Сочетание аксикона с линзой позволяет управлять как продольным, так и поперечным распределением лазерных пучков [18-20\*, 22, 53]. Имеются различные способы менять параметры пучка без замены в формирующем устройстве самого оптического элемента, один из них описан в [111]. В работе [112] показано, что бездифракционные пучки формируются любыми оптическими элементами, фазовая функция пропускания которых содержит линейные по радиальной координате слагаемые. Однако в требуемый пучок при этом попадает меньшая доля энергии падающего пучка, чем в случае аксикона.

В работе [53] было показано, что при использовании средств дифракционной оптики тандем «линза+аксикон» можно заменить одним дифракционным элементом (названным фраксиконом), фаза которого имеет дробную степень зависимости от радиальной координаты. Рефракционные аналоги таких элементов исследовались в работе [104\*] и описаны в предыдущей главе в рамках геометро-оптической модели.

В разделах 2.3 и 2.4 рассматриваются параболическая линза и аксикон, как частные случаи. Они рассмотрены отдельно по двум причинам: они наиболее часто применяются в рефракционном виде. Кроме того, для них можно получить точные аналитические выражения для распределения комплексной амплитуды вдоль оптической оси в рамках скалярной параксиальной волновой модели. Проведено сравнение этих выражений с результатами геометро-оптического приближения. Более подробно об этом написано в [113\*]. Далее используется название «лепесток» для участка распределения интенсивности между двумя соседними минимумами.

Дифракционная асферическая линза имеет комплексную функцию пропускания [53]:

$$\tau(r) = \exp\left[-i(k\alpha_0 r)^\gamma\right], r \leq R \quad (2.1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\gamma$  – показатель степени,  $R$  – радиус оптического элемента,  $\alpha_0$  – безразмерный коэффициент, связанный с числовой апертурой ДОЭ NA:

$$\alpha_0 = \left[ (NA) / \left( \gamma (kR)^{\gamma-1} \right) \right]^{1/\gamma}. \quad (2.2)$$

При целом  $\gamma$  фаза, аналогичная записанной в (2.1), может рассматриваться как волновая aberrация. Если она достаточно мала, экспоненту в (2.1) можно приблизить многочленом; такой расчёт производился в [114\*]. В данной главе предположение малости фазы не требуется, так как будет использовано другое приближение.

При падении на оптический элемент (2.1) плоской волны будет формироваться поле, комплексная амплитуда которого вдоль оптической оси в условиях применимости приближения Френеля (параксиальное приближение) вычисляется по формуле (\*\*), множитель  $-i \exp(ikz)$  опущен.

$$U(z) = \frac{k}{z} \int_0^R \exp\left[-i(k\alpha_0 r)^\gamma\right] \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) r dr. \quad (2.3)$$

Для упрощения записи формул произведём преобразование показателя:

$$\psi(r) = -(k\alpha_0 r)^\gamma + \frac{ikr^2}{2z} = -\alpha(r^\gamma - ar^2); \alpha = (k\alpha_0)^\gamma, a = \frac{k^{1-\gamma}}{2z\alpha_0^\gamma}, \alpha a = \frac{k}{2z} \quad (2.4)$$

Таким образом, подлежащий вычислению интеграл записывается в виде

$$U(z) = 2\alpha a \int_0^R \exp\left[-i\alpha(r^\gamma - ar^2)\right] r dr. \quad (2.5)$$

Первоначально рассмотрим значения  $\gamma = 2$  и  $\gamma = 1$ , соответствующие параболической линзе и аксикону. Для этих частных случаев интеграл (2.5) вычисляется точно.

### 2.3 Параболическая линза ( $\gamma = 2$ )

В данном случае интеграл в (2.5) можно вычислить точно, в результате получаем аналитическое выражение:

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \frac{k}{z} \int_0^R \exp[-i\alpha(1-a)r^2] r dr = \frac{k}{z} \frac{i}{2\alpha(1-a)} \left\{ \exp[-i\alpha(1-a)R^2] - 1 \right\} = \\
 &= \frac{i}{2kz\alpha_0^2 - 1} \left\{ \exp\left[-i(kR)^2 \left(\alpha_0^2 - \frac{1}{2kz}\right)\right] - 1 \right\}
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Распределение интенсивности вдоль оси описывается формулой:

$$I(z) = |U(z)|^2 = \frac{4}{(2\alpha_0^2 kz - 1)^2} \sin^2 \left[ \frac{(kR)^2}{2} \left( \alpha_0^2 - \frac{1}{2kz} \right) \right] \quad (2.7)$$

Как видно из (2.6), при  $a \rightarrow 1$  возникает неопределённость, которая после её раскрытия или подстановки  $a = 1$  в интеграл приводит к выражению

$$U(z) \xrightarrow{a \rightarrow 1} \frac{kR^2}{2z}. \quad (2.8)$$

При этом  $z \rightarrow (2k\alpha_0^2)^{-1}$ , что соответствует достижению максимального значения интенсивности (2.7). Таким образом, это значение естественно назвать фокусным расстоянием:

$$f = \frac{1}{2k\alpha_0^2}, \quad U(f) = (\alpha_0 kR)^2, \quad I(f) = (\alpha_0 kR)^4. \quad (2.9)$$

На рисунке 2.1 приведены результаты расчёта по (2.7) при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 1$  мкм, радиус ДОЭ  $R = 100\lambda$ , числовая апертура  $NA = 0,1$ ,  $\alpha_0 = 0,0089$ . На рисунке 2.1б приведено распределение интенсивности вдоль оптической оси. Отличие результатов, полученных на основе численного интегрирования (2.3) и расчёта с использованием выражения (2.7), составляет менее 3% (линии практически сливаются) и связано с погрешностью численного интегрирования. По формуле (2.9)  $f \approx 1004\lambda$ , что на 1%

больше, чем численный результат. Аналитическое выражение (2.7) позволяет получить некоторые оценки.

В частности, протяжённость (или длину) главного максимума можно найти из следующих рассуждений. Первый нуль после фокуса будет, если аргумент синуса равен  $\pi$ , то есть при  $z_1 = \left[ 2k\alpha_0^2 - 4\pi / kR^2 \right]^{-1}$ , а первый нуль до фокуса – если аргумент синуса равен  $-\pi$ , то есть при  $z_1 = \left[ 2k\alpha_0^2 + 4\pi / kR^2 \right]^{-1}$ .

Тогда длина главного максимума равна:

$$L = z_1 - z_{-1} \approx \frac{2\pi}{k^3 R^2 \alpha_0^4} \text{ и } L/f \approx \frac{4\pi}{k^2 R^2 \alpha_0^2}. \quad (2.10)$$

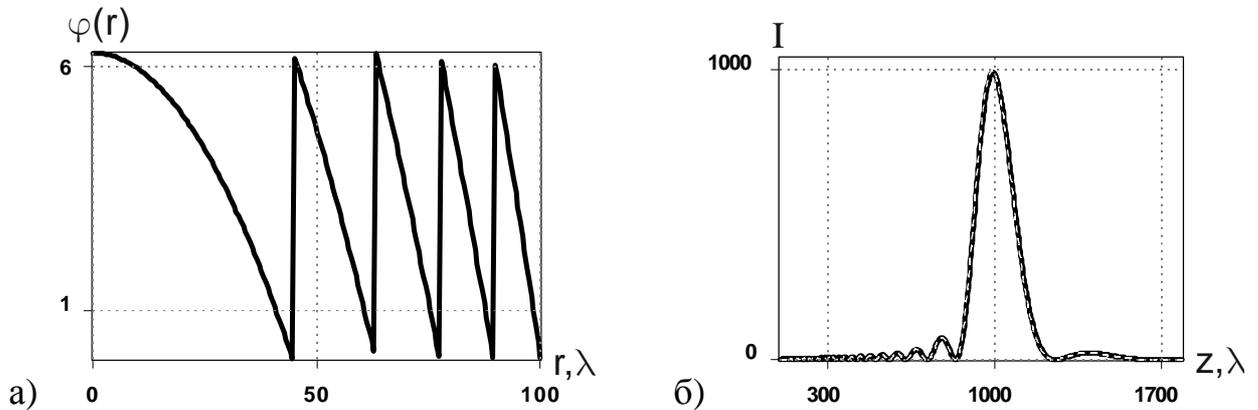


Рисунок 2.1 – Параболическая линза: фаза (а), распределение интенсивности вдоль оптической оси: пунктирная линия – численное интегрирование выражения (2.3), сплошная линия – расчёт по формуле (2.7) (б)

Для приведённых выше параметров по (2.10) получаем  $L \approx 404\lambda$ , что примерно на 4% меньше, чем численный результат.

В параксиальном случае несимметричность главного максимума достаточно мала. При отдалении от фокуса несимметричность распределения существенно возрастает. За фокусом лепестки становятся всё шире, убывая по высоте почти до нуля, причём их число ограничено. Можно доказать, что их количество равно целой части от выражения

$$N_r = \left[ \frac{k^2 R^2 \alpha_0^2}{2\pi} \right] = [2f/L], \quad (2.11)$$

в котором второе равенство записано с использованием (2.9) и (2.10).

Перед фокусом лепестки становятся всё уже, при этом их высота не стремится к нулю. Формально число лепестков не ограничено, но при малых значениях  $z$  перестаёт выполняться условие параксиальности, при котором получена формула (2.7).

Определим теперь максимальную достижимую интенсивность в фокусе. Из выражения (2.9) кажется, что для увеличения интенсивности в фокусе (при фиксированной длине волны) следует увеличивать  $\alpha_0$  и  $R$ . Однако увеличение радиуса  $R$  может привести к нарушению условия параксиальности, а с ростом  $\alpha_0$  убывает максимально допустимый радиус оптического элемента  $R_{\max}$  - аналог границы полного отражения в геометрической оптике.

Количественно имеем следующее условие – радиус элемента лимитируется требованием, чтобы мгновенный полупериод фазовой функции был не меньше половины длины волны. Для упрощения рассуждений вместо функции (2.1) возьмём имеющую тот же мгновенный период функцию  $\sin\left[(k\alpha_0 r)^2\right]$ . Полупериодом в данном случае является расстояние между соседними нулями. Нули находятся в точках  $r_m = \sqrt{m\pi}/k\alpha_0$ , а расстояние между соседними нулями равно  $r_{m+1} - r_m = \sqrt{\pi}(\sqrt{m+1} - \sqrt{m})/k\alpha_0$  и убывает с ростом номера  $m$ . Из условия, что это расстояние не должно быть меньше половины длины волны, получим неравенство  $\sqrt{m+1} - \sqrt{m} \geq \alpha_0 \sqrt{\pi}$ . В параксиальном случае  $\alpha_0$  мало, поэтому равенство достигается при больших  $m$ . Следовательно, левую часть можно приближённо заменить на  $(2\sqrt{m})^{-1}$ . Получаем, что максимально возможное значение  $m$  равно  $(4\pi\alpha_0^2)^{-1}$ , а соответствующий максимальный радиус

$$R_{\max} = (2k\alpha_0^2)^{-1} = f, \quad (2.12)$$

что равно значению фокуса (2.9). Подставив (2.12) в (2.9), получим максимально возможную интенсивность в точке фокуса при заданной длине волны:

$$I_{\max}(f) = (2\alpha_0)^{-4}. \quad (2.13)$$

Это выражение не зависит от длины волны и из него как будто бы следует, что можно сколь угодно увеличивать интенсивность, уменьшая  $\alpha_0$  (увеличивая фокусное расстояние линзы), при использовании линзы с максимально возможным радиусом (2.12). Однако, на самом деле увеличение радиуса ограничено необходимостью выполнения условия параксиальности. (В непараксиальном случае наилучшую фокусировку обеспечивает другая линза – смотри главу 3). Таким образом, для линзы невозможно неограниченно усиливать интенсивность в фокусе за счёт увеличения радиуса элемента.

Сравним эти результаты с полученными ранее в геометро-оптическом приближении [104\*]. Найдём связь между параметрами, описывающими элемент. В геометрической оптике набег фазы определяется выражением  $\psi_g(r) = k(n-1)\alpha_g r^2$ , где  $n$  – показатель преломления рефракционного элемента. Приравняем его набегу фазы из (2.1) и получим соотношение

$$\alpha_g = k\alpha_0^2 / (n-1). \quad (2.14)$$

Если использовать (2.14), то геометро-оптическое значение фокуса (точнее, его предельное значение, соответствующее центру элемента) [104\*]

$$f_g = \frac{1}{2\alpha_g(n-1)} = \frac{1}{2k\alpha_0^2} = f \quad (2.15)$$

окажется равно параксиальному волновому фокусу (2.9).

Но есть существенное отличие: в геометро-оптическом случае упомянутое значение фокуса находится в крайней точке распределения интенсивности, а не в средней его части.

Сравнение глубины фокуса весьма затруднительно, так как формула (2.10) даёт длину только главного лепестка, а геометро-оптическая глубина

фокуса  $L_g = \frac{2n-1}{4\alpha_g(n^2-1)}$  есть полная длина освещённого участка, в том числе

и за пределами области параксиальности.

Сравнение интенсивности в точке фокуса приводить не будем по причине его не полной корректности. Подробнее об этом сказано в [104\*].

## 2.4 Аксикон ( $\gamma=1$ )

В данном случае интеграл в (2.5) также можно вычислить точно, но в силу громоздкости конечного результата первоначальный анализ произведём приближённо методом стационарной фазы [115]. Этот метод часто используется для вычисления интегралов, упомянутых в разделе 2.1, в статье [116] приведены примеры для линейного и логарифмического аксиконов.

Амплитуда поля вычисляется по формуле, получаемой из (2.4), (2.5):

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \frac{k}{z} \int_0^R \exp[-i\alpha(r-ar^2)] r dr = \frac{k}{z} \int_0^R \exp\left\{-i\alpha\left[\frac{1}{4a} - a\left(r - \frac{1}{(2a)^2}\right)\right]\right\} r dr = \\
 &= \frac{k}{z} \exp\left(-i\frac{kz\alpha_0^2}{2}\right) \int_0^R \exp\left[i\frac{k}{2z}(r-\alpha_0z)^2\right] r dr.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Имеем стационарную точку  $r_0 = \alpha_0z$ .

Применение классического метода стационарной фазы приводит к следующему результату:

$$U(z) \approx \frac{k}{z} \exp\left(-i\frac{kz\alpha_0^2}{2}\right) r_0 \sqrt{\frac{2z}{k}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix^2) dx = \alpha_0 \sqrt{\pi kz} \times \exp\left(-i\frac{kz\alpha_0^2}{2}\right) (1+i). \tag{2.17}$$

В соответствии с условиями применимости метода стационарной фазы здесь предполагается, что  $r_0$  не очень мало ( $r_0 \geq r_d$ ) и находится не слишком близко к краю апертуры ( $r_0 \leq R - r_u$ ). Поскольку имеется зависимость стационарной точки от расстояния  $z$ , то аналогичный диапазон справедливости выражения (2.17) накладывается на  $z$ . Границы  $r_d$  и  $r_u$  можно определить,

если отказаться от замены пределов интегрирования на бесконечные, что будет рассмотрено далее.

При совпадении стационарной точки с границей оптического элемента ( $R = \alpha_0 z$ ) верхний предел интегрирования в (2.17) должен быть не плюс бесконечность, а нуль, что приведёт к уменьшению значения в два раза. При больших значениях  $z$  необходимо положить  $U(z) \approx 0$ . Предполагая, что условия справедливости формулы (2.17) выполнены, найдём интенсивность:

$$I(z) \approx 2\pi k z \alpha_0^2, \quad z \leq R / \alpha_0 \quad (0, z > R / \alpha_0) \quad (2.18)$$

Таким образом, в определённых пределах интенсивность линейно возрастает.

На рисунке 2.2 приведены результаты расчёта по (2.18) при следующих параметрах: длина волны  $\lambda=1$  мкм, радиус ДОЭ  $R=100\lambda$ , числовая апертура  $NA=0,1=\alpha_0$ . На рисунке 2.2б приведено распределение интенсивности вдоль оптической оси. Отличие результатов, полученных на основе численного интегрирования (2.3) и расчёта с использованием (2.18), очень значительно, фактически выражение (2.18) является аналогом геометро-оптического приближения [104\*] и соответствует усреднённой линии.

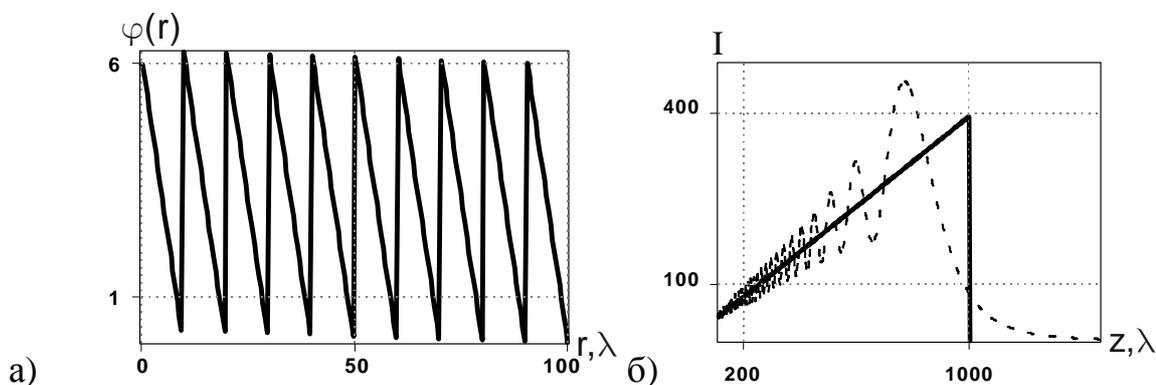


Рисунок 2.2 – Аксикон: фаза (а), распределение интенсивности вдоль оптической оси: пунктирная линия – численное интегрирование выражения (2.3), сплошная линия – расчёт по формуле (2.18) (б)

Максимальную интенсивность можно найти, считая, что стационарная точка совпадает с границей оптического элемента. Получаем верхнюю границу для расстояния  $z_{\max} = R / \alpha_0$ . Это выражение в параксиальном случае

близко к оценке, полученной в работе [3]:  $z_{\max} = R\sqrt{1-\alpha_0^2}/\alpha_0$ . Тогда максимальная интенсивность равна

$$I(z \rightarrow z_{\max}) = 2\pi\alpha_0 kR. \quad (2.19)$$

Значение, вычисленное по (2.19), является несколько завышенным, т.к. максимум достигается на более близком расстоянии, чем  $z_{\max}$  (рис. 2.2б), а в самой точке  $z_{\max}$  интенсивность будет в четыре раза меньше, чем вычисленная по формуле (2.19). Это связано с тем, что стационарная точка находится на краю отрезка интегрирования.

Выражение (2.19) предсказывает увеличение интенсивности при увеличении  $\alpha_0$  и  $R$ . Рассуждая как в предыдущем параграфе, для определения предельного радиуса проанализируем функцию  $\sin(k\alpha_0 r)$ . Нули находятся в точках  $r_m = m\pi/k\alpha_0$ , расстояние между соседними нулями равно  $r_{m+1} - r_m = \pi/k\alpha_0$  и является постоянной величиной. Чтобы она была не меньше половины длины волны, должно выполняться неравенство  $\alpha_0 \leq 1$ , при этом на радиус ограничений нет. Подставив  $\alpha_0 = 1$  в (2.19), получим максимально возможную интенсивность на краю осевого отрезка:

$$I_{\max} = 2\pi kR. \quad (2.20)$$

С ростом  $R$  величина (2.20) будет расти, одновременно точка максимума интенсивности удаляется от оптического элемента. Однако необходимо учитывать, что увеличение радиуса не должно выводить за рамки параксиальности, а, следовательно, и применимости рассматриваемой модели.

Сравним приведённые выше выражения с ранее полученными результатами в геометро-оптическом приближении [104\*]. Для рефракционного аксиона набег фазы определяется выражением  $\psi_g(r) = k(n-1)\alpha_g r$ . Приравнявая его набегу фазы из (2.1), получим соотношение  $\alpha_g = \alpha_0/(n-1)$ .

Теперь сравним распределение интенсивности. При геометро-оптическом подходе распределение описывается формулой [104\*]:

$$I_g(z) = \frac{2\pi z}{\lambda\beta^2} = \frac{kz}{\beta^2}, \quad (2.21)$$

где величина  $\beta$  выражается через  $\alpha_g$  и  $n$ . В этом случае условием прохождения лучей через элемент (до наступления полного внутреннего отражения) является неравенство  $\alpha_0 \leq \sqrt{(n-1)(n+1)}$  - более жёсткое, чем  $\alpha_0 \leq 1$ .

Если сравнить (2.18) и (2.21), то получим, что распределения совпадают, если выполнено условие:  $2\pi\alpha_0^2 = 1/\beta^2$ . Можно доказать, что оно тождественно не выполняется, поэтому в общем случае скорость линейного возрастания интенсивности в волновом и геометро-оптическом подходах отличается. В геометро-оптическом подходе  $z_{\max} = \beta R$  и интенсивность на краю отрезка

$$I_g(z_{\max}) = \frac{kR}{\beta}. \quad (2.22)$$

Сравнение (2.22) с (2.19) приводит к следующим выводам: длина светового отрезка совпадает при  $\alpha_0 = 1/\beta$ , а интенсивность на конце отрезка (тогда длины будут разными) совпадает при  $2\pi\alpha_0 = 1/\beta$ . Таким образом, получаются три различных варианта согласования волновой и геометро-оптической моделей, поэтому выполниться может только один из них.

Максимально возможная интенсивность в геометро-оптическом подходе бесконечно велика  $\left(I_g \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \infty\right)$  и достигается на границе наступления полного внутреннего отражения  $\left(\alpha_0 = \sqrt{(n-1)(n+1)}\right)$ . Геометрически это становится очевидным, если учесть, что в этом случае световой отрезок сжимается в одну точку.

Выражения (2.17), (2.18) являются приближёнными и применимы не на всём диапазоне параметров. Примеры, показывающие точность этого приближения, приведены в [117]. Но можно воспользоваться тем, что для  $\gamma=1$  интеграл (2.3) может быть вычислен точно:

$$\begin{aligned}
U(z) &= \frac{k}{z} \exp\left(-i \frac{kz\alpha_0^2}{2}\right) \times \int_0^R \exp\left[\frac{ik}{2z}(r - \alpha_0 z)^2\right] r dr = \\
&= -i \left\{ \exp\left[-ikR\left(\frac{R}{2z} - \alpha_0\right)\right] - 1 \right\} + \\
&+ \alpha_0 \sqrt{\pi kz} \exp\left(-i \frac{kz\alpha_0^2}{2}\right) \times \left\{ E\left[\frac{k(R - \alpha_0 z)^2}{2z}\right] + E\left(\frac{kz\alpha_0^2}{2}\right) \right\},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

где  $E(x) = C(x) + iS(x)$ ,  $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ ,  $C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$  – функции

Френеля [118].

Если  $\alpha_0 z > R$ , то первое слагаемое в фигурных скобках изменит знак на минус. Основное отличие (2.23) от (2.17) – появление первого слагаемого. Второе слагаемое в бесконечных пределах стремится к выражению (2.17). Это решение ранее было получено в [119], правда, без анализа соотношения между величинами его слагаемых.

Проведём анализ формулы (2.23). Определим границу, за которой функцию Френеля можно заменить её предельным значением  $\frac{1}{2}$ . Для упрощения расчёта граничное значение аргумента функции Френеля обозначим  $\pi b$  (обычно достаточно взять  $b = 3$ ).

Нижняя граница:  $\alpha_0^2 kz/2 > \pi b$ , откуда

$$z_{\min} > b\lambda / \alpha_0^2. \tag{2.24}$$

Верхняя граница:  $k(R - \alpha_0 z)^2/2z > \pi b$ , откуда

$$z_{\max} < \frac{1}{\alpha_0} \left( R + \frac{b\lambda}{2\alpha_0} - \sqrt{\frac{b\lambda R}{\alpha_0}} \sqrt{1 + \frac{b\lambda}{4\alpha_0 R}} \right). \tag{2.25a}$$

Если в знаменателе исходного неравенства можно подставить  $z = R/\alpha_0$ , то получится более простое условие:

$$z_{\max} < \frac{1}{\alpha_0} \left( R - \sqrt{\frac{b\lambda R}{\alpha_0}} \right). \tag{2.25b}$$

Этот же результат получится, если в (2.25a) пренебречь  $b\lambda$  по сравнению с  $\alpha_0 R$ . Из (2.25) следует, что  $z_{\max} \xrightarrow{\alpha_0 \rightarrow 0} \infty$ . Однако на  $\alpha_0$  есть ограничение снизу [120]:  $\alpha_0 > \lambda/R$ , и поэтому предельное значение  $z_{\max} \xrightarrow{\alpha_0 \rightarrow \lambda/R} R^2(1 - \sqrt{b})/\lambda$ .

На рисунке 2.3 приведены результаты расчёта по (2.23) при тех же параметрах, что и для рисунка 2.2. Отличие результатов численного интегрирования (2.3) и расчёта с использованием выражения (2.23), составляет менее 1%. Если учитывать только второе слагаемое в (2.23), то погрешность равна 14%.

Первое слагаемое в (2.23) по модулю не превосходит 2, и поэтому оно вносит заметный вклад в общее распределение только в тех случаях, когда второе слагаемое имеет примерно такую же величину. Такая ситуация имеет место на двух участках оптической оси:

1. На начальном участке фокального отрезка. Правая граница этого участка лежит в пределах от  $\lambda/\pi\alpha_0^2$  до  $4\lambda/\pi\alpha_0^2$ , причём ближе к первому значению. Сравнивая с (2.24), видим, что даже второе значение лежит в области, где приближение (2.17) неприменимо, при этом влияние первого слагаемого существенно. Его график имеет сгущающиеся осцилляции, а график второго слагаемого в данной области осцилляций не имеет.

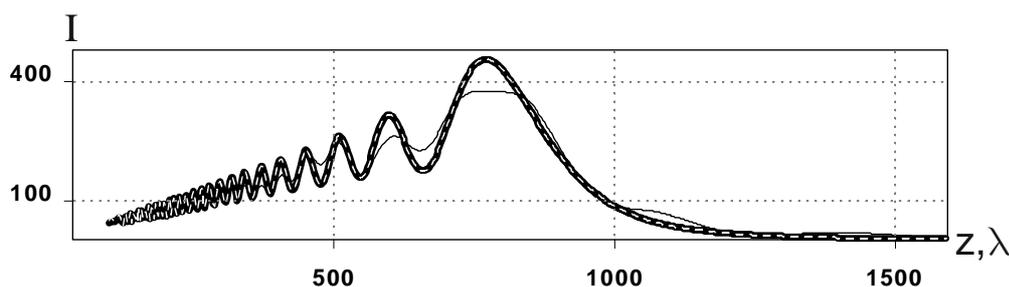


Рисунок 2.3 – Распределение интенсивности вдоль оптической оси, формируемое аксиконом: пунктирная линия – численное интегрирование выражения (2.3), жирная линия – расчёт по формуле (2.23), тонкая линия – расчёт с учётом в (2.23) только второго слагаемого

2. Далее правого края фокального отрезка (см. (2.18)). Можно доказать, что наличие первого слагаемого обеспечивает стремление амплитуды к нулю с ростом расстояния. Первое слагаемое стремится к ненулевому значению  $-i[\exp(-i\alpha_0 kR) - 1]$ . Второе слагаемое с точностью до величин высшего порядка малости стремится к противоположному значению.

Величина максимальной интенсивности вблизи правого края фокального отрезка в действительности больше, чем даёт формула (2.19), так как в этой области функция Френеля имеет значения, которые примерно в полтора раза больше предельного значения 0,5. Оценим эту интенсивность, рассматривая только второе слагаемое в (2.23). При этом в множителе  $\sqrt{kz}$  полагаем  $z = R/\alpha_0$ , а значения функций Френеля с аргументом  $kz\alpha_0^2/2$  заменяем предельным значением 0,5. В таком случае интенсивность выразится формулой

$$I_a(z) = \pi k R \alpha_0 \left\{ \left[ C \left( \frac{k(R - \alpha_0 z)^2}{2z} \right) + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[ S \left( \frac{k(R - \alpha_0 z)^2}{2z} \right) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\}. \quad (2.26)$$

Можно доказать, что выражение в фигурных скобках имеет максимум, равный 2,74 (с точностью, обеспеченной таблицей функций Френеля) при аргументе, равном 2,4. Поэтому максимальная интенсивность (без первого слагаемого) будет равна  $I_a(z = z_0) \approx 2,74 \pi k R \alpha_0$ . Значение  $z_0$  есть корень уравнения  $k(R - \alpha_0 z)^2 / 2z = 2,4$ , который вычисляется по формуле (2.25), где следует положить  $b = 2,4/\pi \approx 0,764$ . С учётом приближений, сделанных в (2.26), отметим, что величина максимума является приближением с избытком, а  $z_0$  - с недостатком.

## 2.5 Аналитические и численные оценки осевого распределения для различных диапазонов показателя $\gamma$

Перейдём теперь к рассмотрению общего случая. Изложение основано на результатах, напечатанных в [86\*]. Для удобства перепишем общую формулу для амплитуды поля на оптической оси

$$U(\rho = 0, z) = \frac{k}{iz} \exp(ikz) \times \int_0^R \exp \left[ -i(k\alpha_0 r)^\gamma + \frac{ikr^2}{2z} \right] r dr. \quad (2.27)$$

Для вычисления интеграла в формуле (2.27) воспользуемся методом стационарной фазы (МСФ) [115]. Этот метод основан на том, что при быстро осциллирующей подынтегральной функции главный вклад дают окрестности точек, в которых частота (производная от фазы) равна нулю. Поэтому выполним разложение фазовой функции в (2.27) в ряд Тейлора и запишем приближённое равенство:  $\exp[if(r)] \approx \exp \left\{ i \left[ f(r_0) + f''(r_0)(r-r_0)^2 / 2 \right] \right\}$ , в котором точка  $r_0$  определяется из условия  $f'(r_0) = 0$ . Если стационарных точек несколько, то производится разбиение отрезка интегрирования.

В классическом МСФ остальные множители в подынтегральной функции заменяются значениями при  $r = r_0$ , а пределы интегрирования расширяются до бесконечных. Естественно, предполагается, что стационарная точка лежит внутри отрезка интегрирования и не очень близко к его концу. Если она совпадает с концом отрезка, то соответствующий ей предел интегрирования заменяется нулём (а не бесконечностью). В работах [16, 121] использовалось уточнение МСФ, состоящее в сохранении конечных пределов, однако подстановка  $r=r_0$  выполнялась в соответствии с классическим МСФ.

В данной главе мы и сохраняем конечные пределы интегрирования, и не делаем подстановки  $r = r_0$  во всех оставшихся множителях: часть множителей, выбранных так, что интегрирование можно выполнить аналитически, остаётся в исходном виде под знаком интеграла. (Аналогичный подход был

использован в [122\*], где МСФ вообще неприменим по причине другого вида подынтегральной функции.) Будем называть это модифицированным МСФ.

Имеется два подхода к использованию МСФ; при точном вычислении они дали бы одинаковый результат. В первом подходе произведём следующее преобразование показателя в (2.27):  $f(r) = -(k\alpha_0 r)^\gamma + \frac{kr^2}{2z} = -\beta(r^\gamma - ar^2)$ ,

$$\beta = (k\alpha_0)^\gamma, \quad a = \frac{k}{2z\alpha_0^\gamma}.$$

Таким образом, подлежащий вычислению интеграл записывается в виде:

$$U^I(z) = -\frac{ik}{z} \exp(ikz) \times \int_0^R \exp[-i\beta(r^\gamma - ar^2)] r dr. \quad (2.28)$$

Так как при  $\gamma=1$  и  $\gamma=2$  функция фазы в (2.28) уже является квадратичной, то в результате применения модифицированного МСФ получим точные решения, рассмотренные в [113\*, 123\*]. Поэтому далее рассматриваем эти значения как границы исследуемых диапазонов значений:  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $1 \leq \gamma < 2$ ,  $\gamma > 2$ . Заметим, что решение для  $\gamma=2$  нельзя получить непрерывным переходом из решений для соседних диапазонов.

В первом подходе надо проанализировать функцию  $f(r)$ . В этом случае имеем одну (при  $0 < \gamma < 1$ ) или две стационарные точки:

$$r_1 = 0; \quad r_2 = (2a/\gamma)^{\frac{1}{\gamma-2}}. \quad (2.29)$$

При наличии двух стационарных точек (при  $\gamma > 1$ ) точка перегиба:

$$r_p = (2a/[\gamma(\gamma-1)])^{\frac{1}{\gamma-2}}. \quad (2.30)$$

Значения в стационарных точках:

$$f(r_1) = 0, \quad f(r_2) = a \left( \frac{2}{\gamma} - 1 \right) \left( \frac{2a}{\gamma} \right)^{\frac{2}{\gamma-2}}, \quad (2.31)$$

$$f''(r_1) = \begin{cases} -2a, & \gamma > 2, \\ +\infty, & 1 < \gamma < 2, \end{cases} \quad f''(r_2) = 2a(\gamma-2).$$

Рассмотрим ещё один подход к вычислению интеграла в формуле (2.27). Сделаем замену переменной  $x = (k\alpha_0 r)^2$  и после преобразований получим:

$$U^{II}(z) = -ib \exp(ikz) \times \int_0^{(k\alpha_0 R)^2} \exp\left[-i\left(x^{\gamma/2} - bx\right)\right] dx, \quad b = 1/(2kz\alpha_0^2). \quad (2.32)$$

В этом случае под интегралом имеется только экспонента, и модификация МСФ будет состоять только в конечности пределов интегрирования. Ниже будет показано, что в зависимости от значения  $\gamma$  преимущества имеет либо первый подход (2.28), либо второй (2.32).

Показатель в (2.32) имеет одинаковые свойства при всех значениях  $\gamma$ , кроме  $\gamma = 2$ . Имеется одна стационарная точка:  $x_0 = (2b/\gamma)^{2/(\gamma-2)}$ . Точка перегиба отсутствует. Значения в стационарной точке:

$$f(x_0) = -\frac{bx_0(\gamma-2)}{\gamma}, \quad f''(x_0) = \frac{b(\gamma-2)}{2x_0}. \quad (2.33)$$

Сравнивая (2.28) и (2.32), можно доказать, что при использовании классического МСФ получится одинаковый результат в обоих подходах. Заметим, что (2.32) позволяет получить точное решение при  $\gamma = 4$  [124\*]:

$$U^{II}(z) = -\frac{i \exp(ikz)}{2\alpha_0^2 kz} \times \exp\left(i \frac{kr_0^2}{4z}\right) \int_{T_1}^{T_2} \exp(-it^2) dt, \quad T_1 = -\sqrt{\frac{k}{4z}} \cdot r_0, \quad T_2 = \sqrt{\frac{k}{4z}} \cdot \frac{R^2 - r_0^2}{r_0}. \quad (2.34)$$

Интеграл в (2.34) выражается через функции Френеля. Далее в тексте мы будем приводить выражения в форме, аналогичной (2.34), сохраняя знак интеграла, так как явное выражение через функции Френеля зависит от знаков нижнего и верхнего пределов.

Хотя бы одна стационарная точка всегда имеется, но она может оказаться за пределами отрезка интегрирования. В этом случае при использовании классического МСФ амплитуда принимается равной нулю, а в формулах, аналогичных (2.34), оба предела интегрирования будут одного знака, что влечёт достаточно малые значения амплитуды. О такой ситуации далее будет говориться, как об области тени.

Далее рассмотрим разные диапазоны показателя  $\gamma$ .

### 2.5.1 Диапазон $0 < \gamma < 1$

В этом диапазоне сравнение вычислений с помощью первого и второго подходов наиболее просто и наглядно, так как в обоих вариантах имеется только одна стационарная точка.

При использовании выражения (2.28) получаем:

$$U^I(z) \approx \exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \times \left\{ \frac{1}{\gamma-2} \exp\left[-i \frac{k(\gamma-2)}{2z} (R-r_0)^2\right] - \frac{1}{\gamma-2} \exp\left[-i \frac{k(\gamma-2)}{2z} r_0^2\right] - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2-\gamma)}} \gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(it^2) dt \right\}, \quad (2.35)$$

$$T_1 = -r_0 \sqrt{\frac{k(2-\gamma)}{2z}}, \quad T_2 = (R-r_0) \sqrt{\frac{k(2-\gamma)}{2z}}.$$

При  $\gamma = 1$  выражение (2.35) позволяет получить точное решение.

Использование второго подхода (2.32) приводит к выражению:

$$U^{II}(z) \approx -\exp[ikz - i\beta f(r_0)] \times \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2-\gamma)}} \gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(it^2) dt, \quad (2.36)$$

$$T_1 = -r_0 \sqrt{\frac{k(2-\gamma)}{8z}}, \quad T_2 = \frac{R^2 - r_0^2}{r_0} \sqrt{\frac{k(2-\gamma)}{8z}}.$$

Из сравнения формул (2.35) и (2.36) видно, что множитель перед интегралом в обеих формулах одинаковый, откуда становится очевидным совпадение «линии узлов» на графиках интенсивности (рисунок 2.4), хотя сам характер осцилляций заметно отличается.

Для получения численных оценок был выполнен расчёт по формуле (2.27) численным интегрированием. Параметры расчёта:  $\lambda = 1$  мкм,  $R = 1$  мм,  $\gamma = 0,5$ .  $\alpha_0$  определялось из условия, что числовая апертура на краю элемента равна заданному значению  $\eta$ :  $NA(R) = \alpha_0^\gamma \gamma (kR)^{\gamma-1} = \eta$ . Положив ( $\eta = 0,1$ ), мы обеспечиваем условие параксиального распространения для периферийных лучей. При заданных выше параметрах получается  $\alpha_0 = 251,3$ .

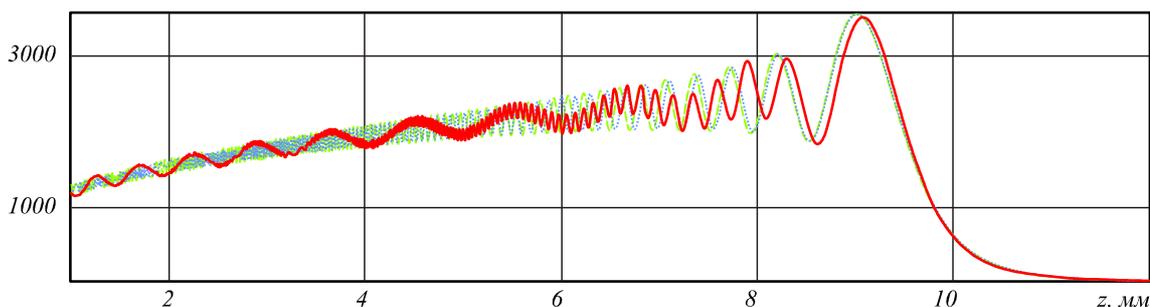


Рисунок 2.4 – График интенсивности вдоль оптической оси при  $\gamma = 0,5$ : по формуле (2.35) (синяя линия), по формуле (2.36) (красная линия), численным интегрированием (2.27) (зелёная линия)

Сравнение с результатом численного интегрирования выражения (2.27) показывает (рисунок 2.4), что в данном диапазоне формула (2.35) является более точной (погрешность менее 7%), чем (2.36) (погрешность 11%).

Как видно из рисунка 2.4, распределение интенсивности вдоль оптической оси имеет довольно равномерный характер. Таким образом, асферическая линза при  $\gamma < 1$ , соответствующая в этом случае дробному аксикону, позволяет формировать распределение, аналогичное логарифмическому аксикону [13]. При этом дробный аксикон не имеет особенности в центральной части и не требует экранирования.

Зависимость средней линии интенсивности от расстояния при  $0 < \gamma < 1$  можно приблизительно описать функцией (до области тени):

$$I(z) \sim (kz)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}. \quad (2.37)$$

Это выражение легко получается при использовании классического МСФ. Из (2.37) очевидно, что при  $\gamma \rightarrow 1$  получается линейный рост интенсивности, а при  $\gamma \rightarrow 0$  средняя линия интенсивности будет постоянна. Однако последний случай означает отсутствие элемента и соответствует дифракции на круглом отверстии, которая характеризуется высоким контрастом осцилляций интенсивности. Поэтому наиболее интересными являются «средние» значения  $\gamma$ . В частности, для  $\gamma = 0,5$  средняя линия интенсивности довольно медленно меняется  $I(z) \sim (kz)^{1/3}$  при небольших осцилляциях интенсивности (см. рисунок 2.4).

### 2.5.2 Диапазон $1 \leq \gamma < 2$

Первый способ вычислений в данном диапазоне был подробно рассмотрен в [123\*], поэтому приведём финальный ответ для случая  $R \geq r_p$  (который не имеет места лишь на участке дальше максимума интенсивности, где она уже мала):

$$\begin{aligned}
 U^I(z) \approx & \frac{\exp(ikz)}{\mu} \left[ \exp\left(-i \frac{\mu k}{2z} r_p^2\right) - 1 \right] + \frac{\exp[ikz - i\alpha f(r_0)]}{\gamma - 2} \times \\
 & \times \left\{ \exp\left[-i \frac{k(\gamma - 2)}{2z} (R - r_0)^2\right] - \exp\left[-i \frac{k(\gamma - 2)}{2z} (r_0 - r_p)^2\right] \right\} - \\
 & - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2 - \gamma)}} \exp(ikz) \exp[-i\alpha f(r_0)] \times \gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(it^2) dt, \\
 & \mu = \frac{10}{(\gamma + 3)\gamma(\gamma - 1)} - 1, \quad T_1 = -(r_0 - r_p) \sqrt{\frac{k}{2z}(2 - \gamma)}, \quad T_2 = (R - r_0) \sqrt{\frac{k}{2z}(2 - \gamma)}.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

При  $R < r_p$  остаётся только первое немного изменённое слагаемое:

$$U^I(z) = \frac{k^{1-\gamma} \exp(ikz)}{2z \alpha_0^\gamma \mu' R^{\gamma-2} - k^{1-\gamma}} \times \left[ \exp(-i\mu'(k\alpha_0 R)^\gamma) \exp\left(i \frac{k}{2z} R^2\right) - 1 \right], \mu' = \frac{5}{\gamma + 3}. \tag{2.38a}$$

При  $\gamma = 1$  формула (2.38) становится точной, т.к.  $r_p \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} 0$ , из-за чего первое слагаемое в (2.38) стремится к нулю, а остальные слагаемые дают формулу (2.35), которая, как уже упоминалось, при  $\gamma = 1$  является точной.

При вычислениях вторым способом сохраняет силу формула (2.36). Результаты вычислений по формулам (2.36) и (2.38) показаны на рисунке 2.5. Параметры расчёта такие же, как в предыдущем разделе, за исключением двух параметров:  $\gamma = 1,5$ ,  $\alpha_0 = 0,0089$ .

Так же, как и в предыдущем диапазоне, сравнение с численным интегрированием показывает, что формула (2.38) является более точной (погрешность менее 10%), чем (2.36) (погрешность 16%).

Как следует из рисунка 2.5, в диапазоне  $1 < \gamma < 2$  характер зависимости интенсивности от расстояния совсем иной, чем при  $0 < \gamma < 1$ , но аппроксимируется той же функцией (2.37). В частности, при  $\gamma = 1,5$  средняя линия интенсивности имеет зависимость  $I(z) \sim (kz)^3$  (рисунок 2.5).

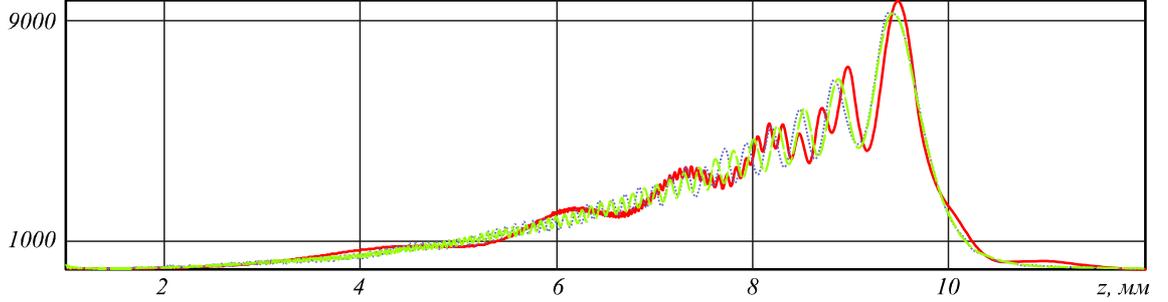


Рисунок 2.5 – График интенсивности вдоль оптической оси при  $\gamma = 1,5$ : по формуле (2.38) (синяя линия), по формуле (2.36) (красная линия), численным интегрированием (2.27) (зелёная линия)

Заметим, что при  $\gamma < 2$  область тени начинается за условной границей  $z_s = R / NA$ , которая при рассматриваемых параметрах равна  $z_s = 10$  мм. В случае  $\gamma = 2$  граница тени соответствует геометрическому фокусу.

### 2.5.3 Диапазон $\gamma > 2$

В этом диапазоне ситуация существенно иная. Вычисление первым способом, как будет показано ниже, оказалось довольно сложной задачей. Рассуждая аналогично другим диапазонам, при  $R \geq r_p$  получаем выражение:

$$\begin{aligned}
 U^I(z) \approx & -\exp(ikz) \left[ \exp\left(-i \frac{k}{2z} r_p^2\right) - 1 \right] + \frac{\exp(ikz)}{\gamma - 2} \exp[-i\beta f(r_0)] \times \\
 & \times \left\{ \exp\left[-i \frac{k(\gamma - 2)}{2z} (R - r_0)^2\right] - \exp\left[-i \frac{k(\gamma - 2)}{2z} (r_0 - r_p)^2\right] \right\} - \\
 & - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2 - \gamma)}} \exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \times \gamma^{2-\gamma} \alpha_0^{2-\gamma} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(-it^2) dt, \\
 & T_1 = -(r_0 - r_p) \sqrt{\frac{k(\gamma - 2)}{2z}}, T_2 = (R - r_0) \sqrt{\frac{k(\gamma - 2)}{2z}}.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

В случае  $R < r_p$  остаётся только первое слагаемое  $-\exp(ikz) \left[ \exp\left(-i \frac{k}{2z} R^2\right) - 1 \right]$ .

Заметим, что ответ в данном приближении не зависит от  $\gamma$ .

К сожалению, результаты численных расчётов показали, что при малом  $z$  (в области тени) формула (2.39) даёт очень завышенные значения интенсивности. Причина в неполной корректности применения модифицированного МСФ. Сохранение конечных пределов вполне возможно, но без замены  $r$  на  $r_0$  в (2.39) появляется второе слагаемое, которое не имеет предела при увеличении  $R$  и намного больше остальных. Это слагаемое является ложным, так как получено при квадратичной аппроксимации вблизи  $r = r_0$ .

В силу вышесказанного возможны два варианта коррекции:

– ограничиться только сохранением конечных пределов, тогда второе слагаемое не появляется;

– это слагаемое оставить, но верхний предел  $R$  заменить на такое значение  $r_u$ , где квадратичная аппроксимация ещё правомерна. Если же взять  $r_u = 2r_0 - r_p$ , что соответствует симметричному отрезку интегрирования с центром в  $r_0$ , то второе слагаемое обратится в нуль.

Действуя по второму варианту, интеграл по отрезку  $[r_u, R]$  положим равным нулю (это оправдано как идеей классического МСФ, так и численными исследованиями). Первое слагаемое в (2.39) также следует несколько скорректировать в соответствии с рассуждениями, описанными в работе [123\*]. Таким образом, после поправок при  $R \leq r_u$  (2.39) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U^I(z) = & -\frac{\exp(ikz)}{\mu} \left[ \exp\left(-i \frac{k\mu}{2z} r_p^2\right) - 1 \right] + \frac{\exp(ikz)}{\gamma - 2} \exp[-i\beta f(r_0)] \times \\
 & \times \left\{ \exp\left[-i \frac{k(\gamma - 2)}{2z} (R - r_0)^2\right] - \exp\left[-i \frac{k(\gamma - 2)}{2z} (r_0 - r_p)^2\right] \right\} - \\
 & - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2 - \gamma)}} \exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \times \gamma^{2-\gamma} \alpha_0^{2-\gamma} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(-it^2) dt,
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

где  $\mu = 1 - \frac{10}{(\gamma+3)\gamma(\gamma-1)}$ ,  $T_1 = -(r_0 - r_p)\sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{2z}}$ ,  $T_2 = (R - r_0)\sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{2z}}$ . Очевидно, что здесь различие с (2.39) только в некотором изменении первого слагаемого. Существенные изменения будут при  $R > r_u$ : вместо (2.39) имеем:

$$U^I(z) = -\frac{\exp(ikz)}{\mu} \left[ \exp\left(-i\frac{k\mu}{2z}r_p^2\right) - 1 \right] - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2-\gamma)}} \exp[ikz - i\beta f(r_0)] \times$$

$$\times 2\gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_0^T \exp(-it^2) dt, \quad T = (r_0 - r_p)\sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{2z}}. \quad (2.41)$$

При  $R < r_p$ , то делается аналогичная коррекция.

$$U^I(z) = -\frac{a \exp(ikz)}{\mu' R^{\gamma-2} - a} \times \left[ \exp(-i\beta \mu' R^\gamma) \exp\left(i\frac{k}{2z}R^2\right) - 1 \right], \quad (2.41б)$$

$$\mu' = 5/(\gamma+3), \quad a = \frac{1}{2\alpha_0^\gamma z k^{\gamma-1}}.$$

Эта формула совпадает с аналогичной в диапазоне  $1 \leq \gamma < 2$ .

При вычислениях вторым способом получаем следующий результат:

$$U^{II}(z) \approx -\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma-2}} \exp[ikz - i\beta f(r_0)] \times \gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(-it^2) dt, \quad (2.42)$$

$$T_1 = -r_0\sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{8z}}, \quad T_2 = \frac{R^2 - r_0^2}{r_0} \sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{8z}}.$$

При  $\gamma = 4$  формула (2.42) становится точной.

$$U^{II}(z) = -\frac{i}{2kz\alpha_0^2} \exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \int_{T_1}^{T_2} \exp(-it^2) dt, \quad (2.42а)$$

$$T_1 = -r_0\sqrt{\frac{k}{4z}}, \quad T_2 = \frac{R^2 - r_0^2}{r_0} \sqrt{\frac{k}{4z}}$$

Результаты вычислений по формулам (2.40)–(2.42) показаны на рис. 2.6. Чтобы имело смысл сравнение с квадратурной формулой, выбрано  $\gamma = 3$ , когда (2.42) не является точной, параметр  $\alpha_0 = 9,46 \cdot 10^{-4}$ .

Сравнение с результатом численного интегрирования показывает, что формула (2.42) является более точной (погрешность менее 13%), чем (2.40),

(2.41) (погрешность 15%), что отличает данный диапазон от предшествующих. Также видно, что область тени теперь располагается до границы  $z_s = R / NA$ . Зависимость интенсивности от расстояния по-прежнему выражается формулой (2.37). В частности, при  $\gamma = 3$  средняя линия интенсивности имеет зависимость  $I(z) \sim (kz)^{-3}$  (рисунок 2.6).

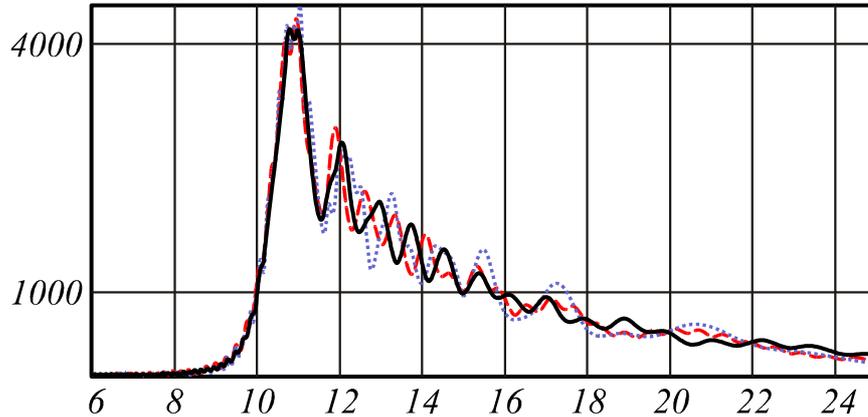


Рисунок 2.6 – График интенсивности вдоль оптической оси при  $\gamma = 3$ : по формулам (2.40), (2.41) (синяя линия), по формуле (2.42) (красная линия), численным интегрированием (2.27) (чёрная линия)

## 2.6 Анализ поперечного распределения в точке фокуса

Общее выражение для комплексной амплитуды из пункта 2.1 можно приблизительно оценить, используя классический МСФ:

$$U(\rho, z) \approx -i \exp[ikz - i\beta f(r_0)] \times \sqrt{\frac{2\pi}{|\gamma-2|}} (\gamma\alpha_0^\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} J_0\left(\frac{kr_0\rho}{z}\right). \quad (2.43)$$

Интенсивность в этом случае имеет следующий вид:

$$I(\rho, z) \approx \frac{2\pi}{|\gamma-2|} (\gamma\alpha_0^\gamma)^{\frac{2}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} J_0^2\left(\frac{kr_0\rho}{z}\right). \quad \text{Как следует из рассуждений предыдущих параграфов, максимальное значение на оптической оси (фокальная область) находится вблизи границы тени. Используя выражение для числовой апертуры NA из пункта 2.5.1, можно записать общее выражение максимального (фокального) значения для всех диапазонов } \gamma:$$

Как следует из рассуждений предыдущих параграфов, максимальное значение на оптической оси (фокальная область) находится вблизи границы тени. Используя выражение для числовой апертуры NA из пункта 2.5.1, можно записать общее выражение максимального (фокального) значения для всех диапазонов  $\gamma$ :

$I(0, z_s) \approx \frac{2\pi}{|\gamma-2|} kR \cdot NA$ . Из полученной оценки следует, что максимальное

значение в фокусе получается при  $\gamma=2$ , т.е., как и следовало ожидать, параболическая линза обеспечивает наилучшую концентрацию энергии в фокальной области. Однако поперечный размер фокального пятна при этом не является минимально возможным. Считается, что аксикон, формирующий Бесселевский пучок [3], обеспечивает наиболее протяжённое и компактное фокальное распределение.

Рассмотрим поперечное распределение, которое формирует асферическая линза (2.1). Используя выражение (2.43), поперечный размер можно оценить по первому нулю функции Бесселя:  $\rho_0(z) = 2,4z / (kr_0)$ , где

$$r_0 = \left( \frac{k^{1-\gamma}}{z\alpha_0^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-2}} = \left( \frac{\gamma R^{\gamma-1}}{z \cdot NA} \right)^{\frac{1}{\gamma-2}}. \text{ Для удобства анализа перепишем конечное выражение в следующем виде:}$$

ражение в следующем виде:

$$\rho_0(z) = \frac{2,4}{k} \left( \frac{NA}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-2}} \left( \frac{z}{R} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma-2}}. \quad (2.44)$$

При  $\gamma=1$  размер светового пятна имеет постоянную величину, не зависящую от радиуса оптического элемента и расстояния:  $\rho_{0,\gamma=1} = 2,4 / (k \cdot NA)$ . Анализ выражения (2.44) предсказывает уменьшение размера светового пятна при  $z \rightarrow 0$  для  $\gamma < 1$  и  $\gamma > 2$ , а для  $1 < \gamma < 2$  – при  $z \rightarrow \infty$ .

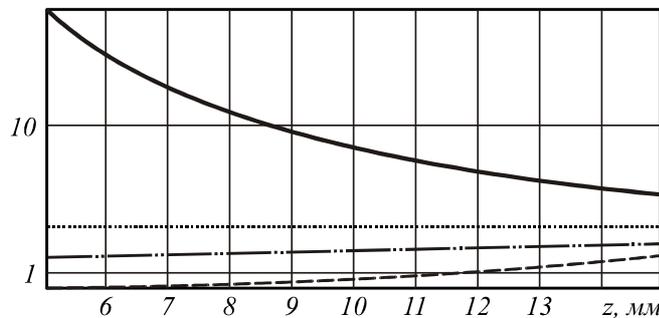


Рисунок 2.7 – Зависимость радиуса светового пятна (2.44) от расстояния при  $\gamma=0,5$  (штрихпунктирная линия),  $\gamma=1$  (точечная),  $\gamma=1,5$  (сплошная),  $\gamma=2,5$  (пунктирная)

На рисунке 2.7 показаны зависимости радиуса светового пятна (2.44) от расстояния  $z$  при нескольких значениях параметра  $\gamma$ . Из рисунка следует, что при  $\gamma < 1$  и  $\gamma > 2$  асферическая линза обеспечивает формирование светового пятна меньшего размера, чем аксикон. Причём уменьшение размера наиболее значительно при  $z \rightarrow 0$  для  $\gamma > 2$ , но оно соответствует области тени и является мало интересным с практической точки зрения результатом.

Поэтому рассмотрим размер светового пятна в максимуме интенсивности, который достигается вблизи границы  $z_s = R / NA$  области тени:

$$\rho_0(z_s) = \frac{2,4}{k \cdot NA \cdot \gamma^{1/(\gamma-2)}}. \quad (2.45)$$

Из выражения (2.45) следует, что при  $\gamma^{1/(\gamma-2)} > 1$  даже в области максимальной интенсивности размер светового пятна может быть меньше, чем формирует аксикон. Из свойств выражения  $\gamma^{1/(\gamma-2)}$  видно, что при  $\gamma < 1$  и  $\gamma > 2$  размер светового пятна (2.45) будет меньше  $2,4 / (k \cdot NA)$ .

К сожалению, классический МСФ позволяет получать довольно приближённые оценки. На рисунке 2.8 показаны зависимости размера светового пятна по полуспаду интенсивности (FWHM) от расстояния, рассчитанные методом численного интегрирования выражения (2.2).

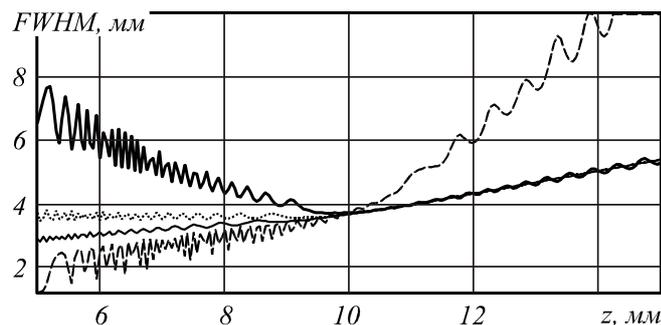


Рисунок 2.8 – Зависимость размера светового пятна (FWHM) от расстояния при  $\gamma = 0,5$  (тонкая сплошная линия),  $\gamma = 1$  (точечная линия),  $\gamma = 1,5$  (сплошная линия),  $\gamma = 2,5$  (пунктирная линия)

Как видно из рисунка 2.8, действительно, при  $\gamma < 1$  и  $\gamma > 2$  в области  $z < z_s$  асферическая линза (2.1) позволяет формировать световое пятно меньшего

размера, чем при использовании аксикона. Однако при  $\gamma > 2$  это область тени, поэтому более перспективным является использование параметра  $\gamma < 1$ . Заметим, что в плоскости  $z = z_s$  численное моделирование показывает одинаковый размер светового пятна для рассмотренных значений  $\gamma$ .

На рисунке 2.9 показаны графики поперечного сечения интенсивности в плоскости  $z = z_s / 2$  для  $\gamma = 0,5$  и  $\gamma = 1$ .

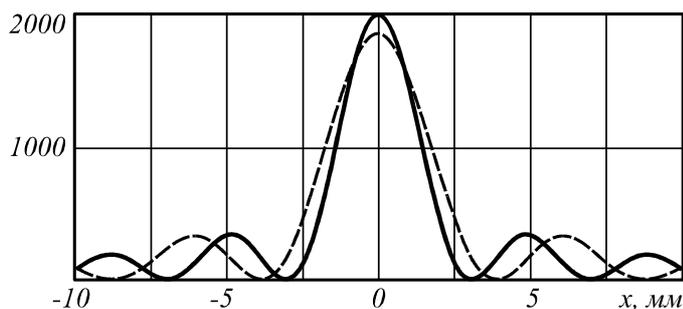


Рисунок 2.9 – Графики поперечного сечения интенсивности в плоскости  $z = z_s / 2$  при  $\gamma = 0,5$  (сплошная линия),  $\gamma = 1$  (пунктирная линия)

Как видно из рисунка 2.9, дробный аксикон ( $\gamma = 0,5$ ) в этом случае обеспечивает как меньший размер светового пятна, так и большее значение интенсивности, чем аксикон ( $\gamma = 1$ ).

Объяснить этот эффект можно структурой асферической линзы при  $\gamma < 1$ . В отличие от параболической линзы, у которой значение числовой апертуры максимально в периферийной области, у дробного аксикона числовая апертура увеличивается с уменьшением радиуса оптического элемента. На рисунке 2.10 показаны фазы дифракционных оптических элементов, соответствующих (2.1) при  $NA = 0,1$  и  $R = 1$  мм для различных значений параметра  $\gamma$ . Таким образом, если мы согласовываем значения числовой апертуры на краю элементов в периферийной части  $NA(R)$ , то при  $\gamma < 1$  в центральной части элемента будет достигаться более высокое значение числовой апертуры, которое и обеспечивает меньшее значение светового пятна.

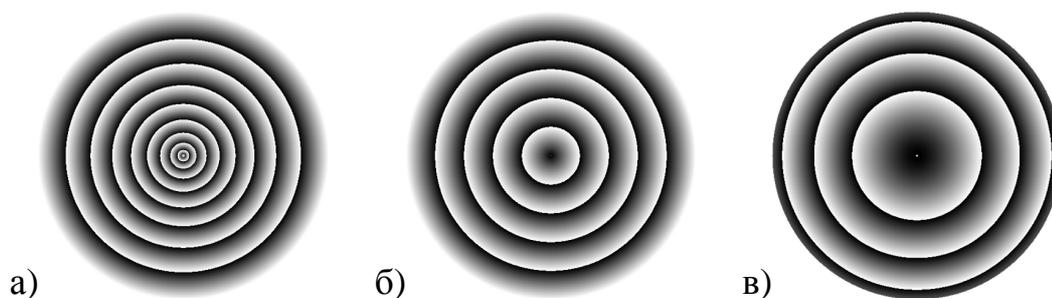


Рисунок 2.10 – Вид фазы обобщённой линзы (2.1) при  $NA = 0,1$  и  $R = 1$  мм для  $\gamma = 0,5$  (а);  $\gamma = 1$  (б) и  $\gamma = 1,5$  (в)

## 2.7 Дифракция Гауссова пучка на асферической линзе

Ранее в этой главе описывался случай падения на асферическую линзу (дифракционную) плоского пучка. В данном параграфе аналитически и численно исследуется дифракция Гауссова пучка на асферической линзе и обсуждаются основные отличия от дифракции на этом элементе ограниченной плоской волны. Более подробно об этом написано в [125\*].

### 2.7.1 Анализ осевого распределения

Рассмотрим дифракционную асферическую линзу, фаза которого имеет произвольную степень зависимости от радиальной координаты (смотри (2.1)):  $\tau(r) = \exp[-i(k\alpha_0 r)^\gamma]$ ,  $r \leq R$ , коэффициент  $\alpha_0$  определяет максимальный угол наклона лучей к оптической оси.

Дифракция произвольного осесимметричного пучка с медленно меняющейся амплитудой  $A(r)$  и постоянной фазой  $\varphi_0$  на данном оптическом элементе в парааксиальном приближении вычисляется по формуле:

$$U(\rho, z) = \frac{k}{iz} \exp\left[ikz + \frac{ik\rho^2}{2z} + i\varphi_0\right] \times \int_0^R A(r) \tau(r) \exp\left[\frac{ikr^2}{2z}\right] J_0\left(\frac{kr\rho}{z}\right) r dr. \quad (2.46)$$

На оптической оси формула (2.46) при подстановке в неё  $\tau(r)$  примет вид:

$$U(\rho=0, z) = \frac{k}{iz} \exp(ikz + i\varphi_0) \times \int_0^R A(r) \exp\left[-i(k\alpha_0 r)^\gamma + \frac{ikr^2}{2z}\right] r dr. \quad (2.46б)$$

Интеграл вида (2.46б) удобно вычислять методом стационарной фазы [115]. Основная стационарная точка  $r_0$  фазы  $\psi(r) = -(k\alpha_0 r)^\gamma + \frac{kr^2}{2z}$  равна

$$r_0 = \left(\frac{\gamma z \alpha_0^\gamma}{k^{1-\gamma}}\right)^{\frac{1}{2-\gamma}}. \text{ Вторая стационарная точка } r_1 = 0 \text{ имеет место не при всех}$$

значениях  $\gamma$ , и её вклад обычно мал [86\*]. Значения фазы и её второй производной в основной стационарной точке равны:

$$\psi(r_0) = \left(\frac{k^{1-\gamma}}{2z\alpha_0^\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}} \left(\frac{2}{\gamma} - 1\right) \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{2}{\gamma-2}}, \quad \psi''(r_0) = 2(\gamma-2) \left(\frac{k^{1-\gamma}}{2z\alpha_0^\gamma}\right). \quad (2.47)$$

Суть метода стационарной фазы состоит в следующей аппроксимации фазы:  $\psi(r) \approx \psi(r_0) + \frac{\psi''(r_0)}{2}(r-r_0)^2$ . Учитывая (2.47), это выражение можно переписать, выделив в явном виде зависимость от радиуса:

$$\psi(r) \approx (2-\gamma) \frac{kr^2}{2z} - \frac{k(2-\gamma)r_0}{z} r + \psi_1(r_0). \quad (2.48)$$

Выражение (2.48) можно рассматривать как локальную аппроксимацию асферической линзы тандемом из аксикона и параболической линзы:

$$\begin{aligned} -(k\alpha_0 r)^\gamma + \frac{kr^2}{2z} &\approx \\ &\approx -k\alpha_0(z)r + \frac{kr^2}{2z} + (1-\gamma) \frac{kr^2}{2z} + \psi_1(r_0), \quad \alpha_0(z) = (2-\gamma)r_0/z. \end{aligned} \quad (2.49)$$

То есть при использовании метода стационарной фазы интенсивность на оптической оси от асферической линзы рассматривается как вклад от аксикона с меняющимся в зависимости от расстояния  $z$  параметром  $\alpha_0(z)$  (рисунок 2.11), а также с дополнительной степенью расфокусировки  $(1-\gamma)$ . Разумеется, локальная аппроксимация аксиконами применима к любой фазовой

функции, к которой применим метод стационарной фазы. В частности, аналогичный подход был применён к анализу логарифмического аксикона [75].

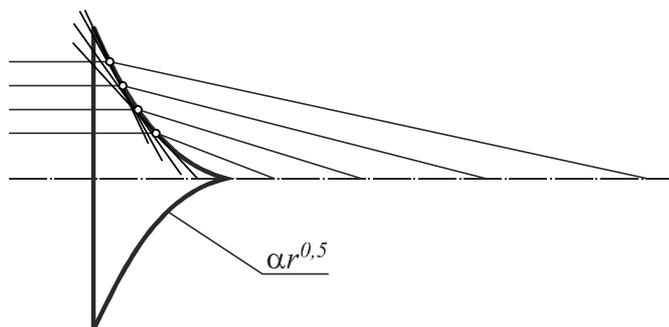


Рисунок 2.11 – Иллюстрация к методу стационарной фазы как дифракции на локальном аксиконе

В условиях медленной зависимости амплитуды падающего пучка  $A(r)$  интеграл (2.46б) можно вычислить как произведение амплитуды пучка в стационарной точке  $A(r_0)$  на комплексную амплитуду, полученную при освещении асферической линзы плоской волной:  $U(z) = A(r_0)U_{pl}(z)$ . Выражения для  $U_{pl}(z)$  при различных значениях степени фраксикона  $\gamma$  детально обсуждались в работе [86\*].

В частном случае, когда падающий пучок является Гауссовым:

$A(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$ , можно получить более точное решение. В этом случае,

выделяя полный квадрат, получим следующее выражение:

$$U_{gs}(z) = \frac{k}{iz} \exp(ikz + i\varphi_0) \exp(i\mu r_0^2) \times \exp\left[-i(k\alpha_0)^\gamma \psi(r_0)\right] \times \exp\left(-\frac{\mu^2 r_0^2}{\mu_1}\right) \times \int_0^R \exp\left[-\mu_1(r-r_1)^2\right] r dr, \quad \mu = (2-\gamma)\frac{k}{2z}, \mu_1 = \frac{1}{2\sigma^2} - i\mu, r_1 = \frac{\mu r_0}{i\mu_1}. \quad (2.50)$$

Интеграл в (2.50) можно вычислить с использованием различных модификаций метода стационарной фазы [86\*] с вариациями в сложности и соответствующей точности аналитических оценок.

Наиболее простое выражение получится при вынесении  $r = r_0$  за интеграл и расширении пределов до бесконечных. Тогда имеем следующую оценку интеграла (2.46б):

$$U_{gs}(z) = \frac{kr_0}{iz} \sqrt{\frac{\pi}{\mu_1}} \exp(ikz + i\varphi_0 + i\mu r_0^2) \cdot \exp[-i(k\alpha_0)^\gamma \psi(r_0)] \exp\left(-\frac{\mu^2 r_0^2}{\mu_1}\right), \quad (2.51)$$

Интенсивность, соответствующая выражению (2.51), имеет следующий вид:

$$I_{gs}(z) = \left(\frac{k}{z} r_0\right)^2 \frac{2\pi\sigma^2}{\sqrt{1+4\mu^2\sigma^4}} \times \exp\left(-\frac{4\mu^2 r_0^2 \sigma^2}{1+4\mu^2\sigma^4}\right). \quad (2.52)$$

Чтобы выделить в явном виде зависимость от расстояния  $z$ , перепишем выражение (2.52) в следующем виде:

$$I_{gs}(z) = z^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} \frac{2\pi\sigma^2 p}{\sqrt{z^2 + (2-\gamma)^2 \sigma^4 k^2}} \times \exp\left(-\frac{z^{\frac{2}{2-\gamma}} (2-\gamma)^2 \sigma^2 p}{z^2 + (2-\gamma)^2 \sigma^4 k^2}\right), \quad p = (k\gamma\alpha_0^\gamma)^{\frac{2}{2-\gamma}}. \quad (2.53)$$

В дальней зоне оценка (2.53) упрощается:

$$I_{gs}(z \rightarrow \infty) = z^{\frac{2\gamma-2}{2-\gamma}} 2\pi\sigma^2 p \times \exp\left(-z^{\frac{2\gamma-2}{2-\gamma}} (2-\gamma)^2 \sigma^2 p\right). \quad \text{Эта оценка только качест-}$$

венно описывает факт стремления интенсивности к нулю в дальней зоне, так как на самом деле из формулы (2.46б) следует, что интенсивность должна быть пропорциональна  $z^{-2}$ .

В ближней зоне оценка (2.53) сводится к выражению:

$$I_{gs}(z \rightarrow 0) = z^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} \frac{2\pi p}{k|2-\gamma|} \times \exp\left(-z^{\frac{2}{2-\gamma}} (k\sigma)^{-2} p\right). \quad (2.54)$$

Очевидно, характер зависимости (2.54) главным образом определяется значением параметра  $\gamma$ , т.е. типом асферической линзы. В таблице 2.1 приведены оценки (2.54) для значений  $\gamma$  из характерных диапазонов.

Таблица 2.1 – Характер зависимости осевой интенсивности от расстояния  $z$  при  $z \rightarrow 0$

$\gamma \rightarrow 0$	$I_{gs} \sim 1$
$0 < \gamma < 1,$ $\gamma = 0,5$	$I_{gs} \sim z^{\frac{1}{3}}$
$\gamma = 1$	$I_{gs} \sim z$
$1 < \gamma < 2,$ $\gamma = 1,5$	$I_{gs} \sim z^3$
$\gamma \rightarrow 2 + \varepsilon$	$I_{gs} \sim z^{-\infty} \exp(-\beta z^{-\infty})$
$\gamma > 2, \gamma = 3$	$I_{gs} \sim z^{-3} \exp(-\beta z^{-2})$
$\gamma \rightarrow \infty$	$I_{gs} \sim (\gamma z)^{-1}$

В случае  $0 < \gamma < 2$  увеличение  $\gamma$  приводит к более резкому уменьшению интенсивности, но оно всё равно остаётся степенным. Если  $\gamma > 2$ , то уменьшение интенсивности принимает экспоненциальный характер, увеличение  $\gamma$  его ослабляет. Таким образом, наиболее резкое уменьшение происходит при использовании параболической линзы ( $\gamma = 2$ ).

Определим расстояние, при котором достигается максимальное значение интенсивности (2.53) на оптической оси. Для упрощения анализа пренебрежём слагаемым  $z^2$  в показателе экспоненты и под корнем:

$$I_{gs}(z) \approx \frac{2\pi p}{(2-\gamma)k} z^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} \exp\left(-\frac{\frac{2}{z^{2-\gamma}} p}{\sigma^2 k^2}\right). \text{ В таком приближении максимальное значение на оси будет на расстоянии:}$$

$$z_{\max}^{gs} = \frac{1}{\gamma k \alpha_0^\gamma (k\sigma)^{\gamma-2}} \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma-2}{2}}. \quad (2.55)$$

Для сравнения, в работе [86\*] была получена оценка для расстояния, на котором формируется максимальное значение интенсивности при освещении асферической линзы плоской волной, ограниченной радиусом  $R$ :

$$z_{\max}^{pl} = \frac{R}{\gamma \alpha_0^\gamma (kR)^{\gamma-1}}. \quad (2.56)$$

В таблице 2.2 приведены оценки (2.55) и (2.56) для конкретных значений  $\gamma$  из характерных диапазонов.

Таблица 2.2 – Положение максимума интенсивности на оптической оси

	Гауссов пучок	Ограниченный плоский пучок
$\gamma = 0,5$	$z_{\max}^{gs} = \sigma \sqrt{\frac{k\sigma}{2\alpha_0}}$	$z_{\max}^{pl} = 2R \sqrt{\frac{kR}{\alpha_0}}$
$\gamma = 1$	$z_{\max}^{gs} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha_0}}$	$z_{\max}^{pl} = \frac{R}{\alpha_0}$
$\gamma = 1,5$	$z_{\max}^{gs} = \frac{0,62}{\alpha_0} \sqrt{\frac{\sigma}{k\alpha_0}}$	$z_{\max}^{pl} = \frac{0,67}{\alpha_0} \sqrt{\frac{R}{k\alpha_0}}$
$\gamma = 2$	$z_{\max}^{gs} = \frac{1}{2k\alpha_0^2}$	$z_{\max}^{pl} = \frac{1}{2k\alpha_0^2}$
$\gamma = 3$	$z_{\max}^{gs} = \frac{0,27}{\sigma k^2 \alpha_0^3}$	$z_{\max}^{pl} = \frac{0,33}{Rk^2 \alpha_0^3}$

Как следует из сравнительного анализа (учитывая, что  $\sigma < R$ ), при  $\gamma < 2$  освещение Гауссовым пучком приводит к формированию фокуса ближе к оптическому элементу, чем освещение плоским пучком. Тип освещающего пучка не влияет на положение фокуса при использовании параболической линзы ( $\gamma = 2$ ). При  $\gamma > 2$  фокус может оказаться ближе при освещении обобщённой линзы плоским ограниченным пучком.

Такое сравнение также легко получить из анализа отношения:

$$\eta = \frac{z_{\max}^{pl}}{z_{\max}^{gs}} = \left( \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{R} \right)^{\gamma-2}. \text{ Очевидно, что } \eta = 1 \text{ при } \gamma = 2 \text{ и } \eta > 1 \text{ при } \gamma < 2. \text{ При}$$

$\gamma > 2$  будет сначала  $\eta < 1$ , но с ростом  $\gamma$  снова превысит единицу.

Более точное выражение, чем (2.51), можно получить, если не расширять пределы интеграла в (2.48) до бесконечных. При этом результат выразится через интеграл ошибок комплексного аргумента. Чтобы выразить интеграл через другие функции, выделим в показателе мнимую единицу в явном виде:

$$T = \int_0^R \exp\left[-\mu_1 (r - r_1)^2\right] r dr = \int_0^R \exp\left[i\mu_2 (r - r_2)^2\right] r dr, \mu_2 = i\mu_1, r_2 = \frac{\mu r_0}{\mu_2}. \quad (2.57)$$

Если в (2.57) подынтегральный множитель  $r = r_0$  вынести за интеграл, то

$$T_1 = \frac{r_0}{2\sqrt{\mu_2}} \left[ C_s(\sqrt{R - r_2}) + iS_s(\sqrt{R - r_2}) \right] - \frac{r_0}{2\sqrt{\mu_2}} \left[ C_s(\sqrt{-r_2}) + iS_s(\sqrt{-r_2}) \right], \quad \text{где}$$

$$C_s(w) = \int_0^w \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \cos I\left(w, \frac{1}{2}\right), \quad S_s(w) = \int_0^w \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sin I\left(w, \frac{1}{2}\right). \quad \text{Введённые}$$

функции  $\cos I(w, \nu) = \int_0^w \frac{\cos t}{t^\nu} dt$  и  $\sin I(w, \nu) = \int_0^w \frac{\sin t}{t^\nu} dt$  – это спиральные функ-

ции параметра  $\nu$  от комплексного аргумента  $w$ , для которых имеется программа вычисления [126\*]. Формально спиральные функции параметра  $1/2$  с точностью до коэффициента равны функциям Френеля, но для комплексного аргумента не имеется стандартных таблиц.

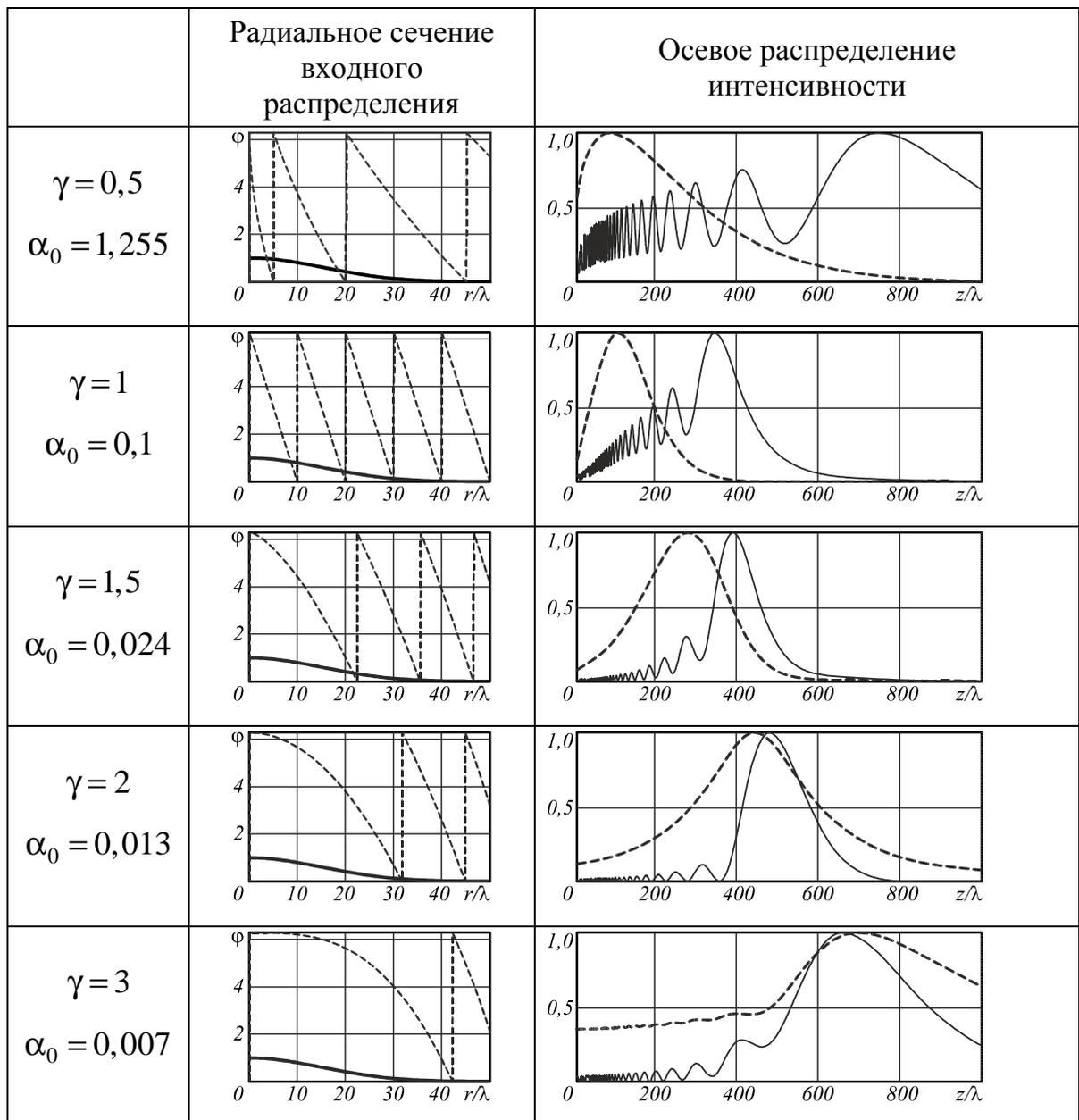
Если не выносить множитель  $r$ , то интеграл в (2.57) равен

$$T_2 = \frac{r_2}{2\sqrt{\mu_2}} \left[ C_s(\sqrt{R - r_2}) + iS_s(\sqrt{R - r_2}) \right] - \frac{r_2}{2\sqrt{\mu_2}} \left[ C_s(\sqrt{-r_2}) + iS_s(\sqrt{-r_2}) \right] + \frac{1}{2i\mu_2} \left\{ \exp\left[i\mu_2 (R - r_2)^2\right] - \exp\left(i\mu_2 r_2^2\right) \right\}. \quad (2.58)$$

Отметим, что при освещении плоским пучком последнее слагаемое оказывает заметное влияние только в теневой области [86\*].

В таблице 2.3 приведены результаты численного расчёта распределения на оси при использовании различных типов освещающего пучка  $A(r)$ : плоским ограниченным пучком (сплошная линия) радиусом  $R = 50\lambda$  и Гауссовым пучком (пунктирная линия) радиусом  $\sigma = 15\lambda$ .

Таблица 2.3 – Сравнение осевой интенсивности при освещении асферической линзы с параметрами, соответствующими максимальной  $NA = 0,1$ , плоским ограниченным пучком (сплошная линия) и Гауссовым пучком (пунктирная линия)



Размер Гауссова пучка был выбран в соответствии с правилом «трёх сигм», чтобы на радиусе  $R$  была сосредоточена практически вся энергия. При больших значениях  $\sigma$  часть Гауссова пучка отсекается, и на оси наблюдаются биения, аналогичные освещению ограниченным плоским пучком.

Для оптического элемента рассмотрены значения  $\gamma$ , соответствующие характерным диапазонам. Значения параметра  $\alpha_0$  выбирались в соответствии с заданной максимальной числовой апертурой оптического элемента NA:

$$\alpha_0 = \left[ \frac{NA}{\gamma(kr_a)^{\gamma-1}} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \text{ где } r_a - \text{ радиус, соответствующий зоне максимальной чис-}$$

словой апертуры:  $r_a = R$ ,  $\gamma \geq 1$ ;  $r_a = 5\lambda$ ,  $\gamma < 1$ . Данное выражение учитывает тот факт [86\*], что для дробного аксикона максимальное значение числовой апертуры достигается в центральной части оптического элемента.

Результаты, приведённые в таблице 2.3, качественно подтверждают аналитические оценки, полученные выше. Хотя при  $\gamma = 2$  оказалось лишь примерное совпадение положений фокусов.

Заметим, что использование Гауссовой аподизации апертуры приводит не просто к сглаживанию осевых осцилляций интенсивности, но и к потере характерной протяжённости пучка вдоль оптической оси.

Далее сравним поперечное распределение в фокальных плоскостях для двух типов освещающих пучков.

### 2.7.2 Анализ поперечного распределения в фокусе

Рассмотрим интеграл (2.46а) в плоскости максимальной интенсивности при освещении Гауссовым пучком:

$$I_{\max}(\rho) = \frac{k^2}{z_{\max}^2} \times \left| \int_0^R \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \times \exp\left[\frac{ikr^2}{2z_{\max}} - i(k\alpha_0 r)^\gamma\right] J_0\left(\frac{k\rho r}{z_{\max}}\right) r dr \right|^2. \quad (2.59)$$

Учитывая, что  $\sigma < R/3$ , предел в (2.59) можно увеличить до бесконечности. Применяя метод стационарной фазы и используя (2.50), вместо (2.59) можно записать:

$$I_{\max}(\rho) = \frac{k^2}{z_{\max}^2} \left| \exp\left(-\frac{2\mu^2 r_0^2}{\mu_1}\right) \right| \left| \exp(-2\mu_1 r_1^2) \right| \times \left| \int_0^{\infty} \exp(-\mu_1 r^2) \exp(2\mu_1 r_1 r) J_0\left(\frac{kr\rho}{z_{\max}}\right) r dr \right|^2. \quad (2.60)$$

Считая, что максимум находится на оси ( $\rho = 0$ ), представим функцию Бесселя в виде:  $J_0(y) \approx 1 - \left(\frac{y}{2,4}\right)^2$ . Тогда интеграл в (2.60) можно представить как:

$$\int_0^{\infty} \exp(-\mu_1 r^2) \exp(2\mu_1 r_1 r) J_0\left(\frac{kr\rho}{z_{\max}}\right) r dr \approx B_1 - \left(\frac{k\rho}{2,4z_{\max}}\right)^2 B_3, \quad (2.61)$$

$$B_n = \int_0^{\infty} r^n \exp(-\mu_1 r^2) \exp(2\mu_1 r_1 r) dr. \quad (2.62)$$

Выражение (2.61) равно нулю при  $\rho = \rho_0$ :

$$\rho_0 = \frac{2,4z_{\max}}{k} \sqrt{\frac{B_1}{B_3}}. \quad (2.63)$$

Воспользуемся табличным выражением для (2.62) из [106]:

$$\int_0^{\infty} x^n \exp(-px^2 - qx) dx = \frac{(-1)^n}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \frac{\partial^n}{\partial q^n} \left[ \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{q}{2\sqrt{p}}\right) \right], \quad (2.64)$$

где  $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt$ . Если выполнить дифференцирование в (2.64) и приближённо заменить функцию  $\operatorname{erfc}(x)$  начальной частью её асимптотического разложения:  $\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} \right)$ , то получим приближённое значение

для радиуса нулевого значения (2.63) в виде  $\rho_0 = \frac{2,4z_{\max}}{k} \sqrt{\frac{2p}{3}}$ . После подстановки значения  $p$  из (2.61) получим значение радиуса центрального пика в явном виде:

$$\rho_0 = \frac{2,4z_{\max}}{\sqrt{3k\sigma}} \cdot \sqrt[4]{1 + \left(\frac{(2-\gamma)k}{2z_{\max}}\right)^2} \sigma^4. \quad (2.65)$$

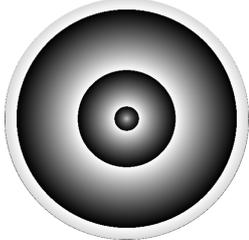
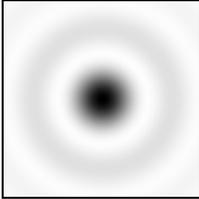
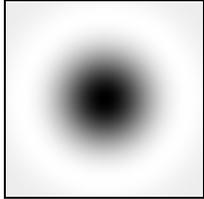
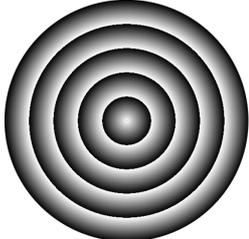
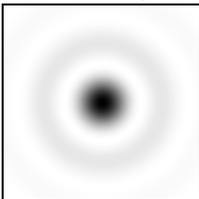
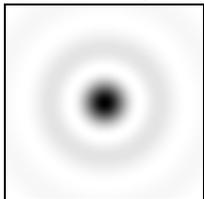
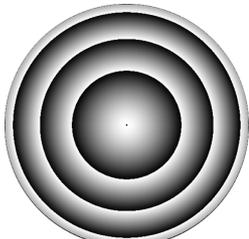
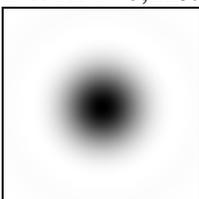
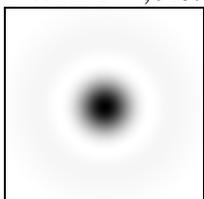
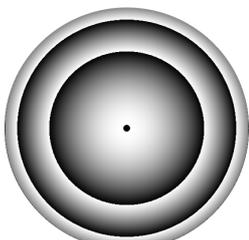
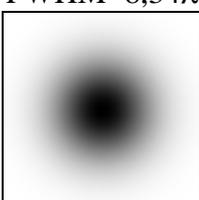
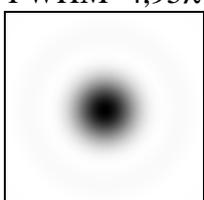
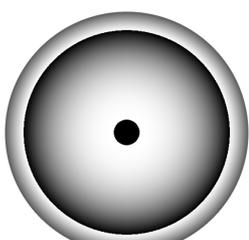
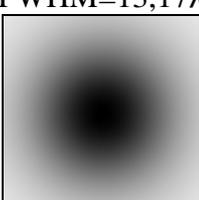
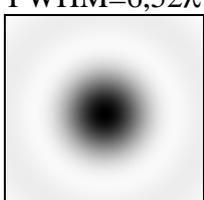
Это значение удовлетворительно согласуется с результатами численного моделирования (таблица 2.4). В таблице 2.4 показаны сравнительные результаты для Гауссова и плоского ограниченного пучка в плоскостях максимальной осевой интенсивности. Поперечный размер светового пятна приведён по полуспаду интенсивности (FWHM).

Как видно из результатов моделирования, приведённых в таблице 2.4, наименьший размер фокального пятна в условиях одинаковой максимальной числовой апертуры достигается при использовании аксикона. Причём результат практически не зависит от типа освещающего пучка, так как аксикон по всей области оптического элемента имеет одинаковую числовую апертуру. Использование Гауссова пучка вместо плоского приведёт к сглаживанию осевых осцилляций и сокращению протяжённости фокальной линии.

Во всех остальных случаях наличие на оптическом элементе областей с меньшими значениями числовой апертуры приводит к уширению фокального пятна. Однако при этом могут обеспечиваться другие оптимальные свойства. В частности, параболическая линза обеспечивает наилучшую концентрацию энергии в фокальной плоскости, а дробный аксикон позволяет получить равномерное распределение интенсивности на протяжённом участке оптической оси [86\*]. На рисунке 2.12 показаны зависимости размера светового пятна по полуспаду интенсивности для значений  $\gamma$  из характерных диапазонов.

Хорошо видно, что аксикон обеспечивает минимальный размер центрального светового пятна до момента, когда пучок резко расходится. Дробный аксикон формирует пучок с несколько большим размером светового пятна, который, однако, сохраняется значительно дольше, причём уширение пучка происходит очень медленно. Заметим также, что вблизи оптического элемента размер пятна может быть даже меньше, чем для аксикона. Однако этот момент требует исследования в рамках более точной модели.

Таблица 2.4 – Сравнение поперечной интенсивности в фокусе (размер картины  $20\lambda \times 20\lambda$ ) при освещении асферической линзы с параметрами, соответствующими максимальной  $NA=0,1$ , Гауссовым пучком ( $\sigma=15\lambda$ ) и плоским ограниченным пучком ( $R=50\lambda$ )

	Фаза асферической линзы	Гауссов пучок (негативное изображение)	Плоский ограниченный пучок (негативное изображение)
$\gamma=0,5$ $\alpha_0=1,255$		$z_{\max}^{gs} = 92\lambda$ , FWHM=4,33λ 	$z_{\max}^{pl} = 750\lambda$ , FWHM=7,48λ 
$\gamma=1$ $\alpha_0=0,1$		$z_{\max}^{gs} = 115\lambda$ , FWHM=3,62λ 	$z_{\max}^{pl} = 348\lambda$ , FWHM=3,25λ 
$\gamma=1,5$ $\alpha_0=0,024$		$z_{\max}^{gs} = 280\lambda$ , FWHM=6,22λ 	$z_{\max}^{pl} = 391\lambda$ , FWHM=4,01λ 
$\gamma=2$ $\alpha_0=0,013$		$z_{\max}^{gs} = 445\lambda$ , FWHM=8,34λ 	$z_{\max}^{pl} = 481\lambda$ , FWHM=4,95λ 
$\gamma=3$ $\alpha_0=0,007$		$z_{\max}^{gs} = 700\lambda$ , FWHM=13,17λ 	$z_{\max}^{pl} = 663\lambda$ , FWHM=6,52λ 

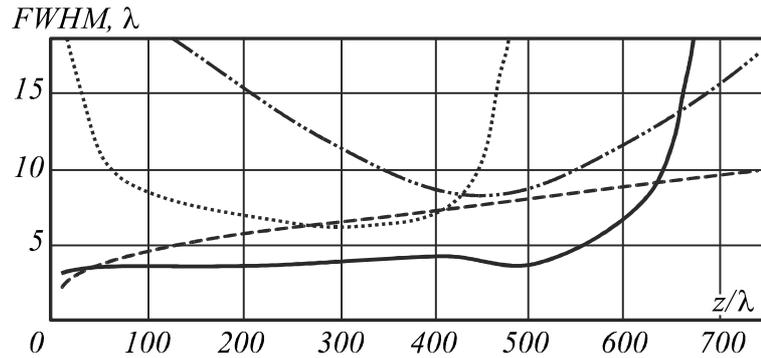


Рисунок 2.12 – Зависимость размера светового пятна от расстояния при  $\gamma = 0,5$  (пунктирная линия),  $\gamma = 1$  (сплошная линия),  $\gamma = 1,5$  (точечная линия),  $\gamma = 2$  (штрихпунктирная линия)

## 2.8 Выводы к главе 2

1. Предложена модификация метода стационарной фазы, на основе которой получены два типа аналитических выражений для осевого распределения комплексной амплитуды, формируемой асферической линзой в парааксиальном приближении. Каждое из полученных выражений обеспечивает более высокую точность расчёта в различных диапазонах значений показателя степени  $\gamma$  - первый тип при  $\gamma < 2$ , а второй при  $\gamma > 2$ . Средняя линия интенсивности вне области тени имеет зависимость  $I(z) \sim (kz)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}$ .

2. При частных значениях показателя ( $\gamma = 1$ ,  $\gamma = 2$  и  $\gamma = 4$ ), получены точные аналитические выражения для распределения комплексной амплитуды и интенсивности вдоль оптической оси – формулы (2.23), (2.6) и (2.42a) соответственно. При этом точные формулы (2.23) и (2.42a) получаются из приближённых при подстановке соответствующего значения  $\gamma$ .

Аналитические выражения позволяют получить такие оценки, как протяжённость (глубина) фокуса, частота осцилляций, значение интенсивности в фокусе, и определить параметры, максимизирующие интенсивность. Показа-

но, что для параболической линзы невозможно усилить интенсивность в фокусе за счёт увеличения радиуса элемента, а для аксикона это возможно.

Сравнение точного и приближённого решений для аксикона позволило определить границы применимости классического и частично модифицированного метода стационарной фазы.

**3.** Границей области тени, которая располагается справа от освещённого отрезка при  $\gamma < 2$  и слева от него при  $\gamma > 2$ , является геометрический фокус параболической линзы ( $\gamma = 2$ ). Максимальное значение интенсивности для любых значений  $\gamma$  достигается вблизи границы области тени.

При  $0 < \gamma < 1$  асферическая линза соответствует дробному аксикону и позволяет формировать практически равномерное распределение интенсивности. Такое действие аналогично логарифмическому аксикону, но при этом нет особенности в центральной части и не требуется экранирования.

При  $1 < \gamma < 2$  фраксикон обеспечивает рост интенсивности вдоль оптической оси быстрее линейного (до области тени).

При  $\gamma > 2$  обобщённая линза формирует интенсивность, которая имеет максимальное значение вблизи области тени, и при дальнейшем увеличении расстояния убывает.

Рассматривая поперечное распределение в фокусе, можно утверждать, что в диапазоне  $\gamma < 1$  асферическая линза позволяет сформировать более узкий световой пучок, чем обеспечивает аксикон с той же числовой апертурой на краю элемента. Это связано с тем, что в этом случае числовая апертура увеличивается от периферии к центру элемента.

**4.** Анализ дифракции различных пучков на асферической линзе с произвольным показателем с использованием метода стационарной фазы показал, что в этом случае выполняется локальная аппроксимация фазовой функции оптического элемента фазой аксикона с меняющимся углом наклона.

Сравнение дифракции на асферической линзе Гауссова пучка и ограниченного плоского пучка показало, что подавление осевых осцилляций интенсивности при Гауссовой аподизации приводит в общем случае к сокращению

продольной протяжённости фокальной области и уширению размера центрального светового пятна.

Наименьший размер фокального пятна в условиях одинаковой максимальной числовой апертуры достигается при использовании линейного аксикона. В остальных случаях наличие областей с меньшими значениями числовой апертуры приводит к уширению фокального пятна.

Преимущество остальных элементов над аксиконом может быть либо в лучшей концентрации энергии в фокальной плоскости, как это обеспечивает параболическая линза, либо в равномерности распределения интенсивности на протяжённом участке оптической оси, что достигается использованием дробного аксикона.

### 3 ДЕЙСТВИЕ АСФЕРИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ В ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ В НЕПАРАКСИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В предыдущей главе 2 было рассмотрено действие асферической линзы как дифракционного оптического элемента (ДОЭ) при расчёте по волновой теории электромагнитного поля. Но при вычислениях использовалось параксиальное приближение Френеля, условия применимости которого не всегда выполняются. В данной главе рассмотрен общий случай.

#### 3.1 Общие соотношения в непараксиальном скалярном случае

Непараксиальная скалярная модель, основанная на теории Рэлея-Зоммерфельда [101], позволяет получать корректные результаты на очень близких расстояниях (всего несколько длин волн) от апертуры [84, 85]. Также в работах [79, 81\*] было показано качественное согласование результатов, полученных с помощью интегральных методов и конечно-разностных методов, с точностью до учёта конкретной конфигурации оптического элемента.

Интегральное преобразование Рэлея-Зоммерфельда первого типа в декартовых координатах имеет следующий вид [101]:

$$E(u, v, z) = -\frac{z}{2\pi} \times \iint_{\Sigma_0} E_0(x, y) \frac{\exp(ik\ell)}{\ell^2} \left( ik - \frac{1}{\ell} \right) dx dy, \quad (3.1)$$

где  $E_0(x, y)$  – входное поле,  $\ell = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + z^2}$ ,  $\Sigma_0$  – область, в которой задано входное поле,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны. При рассмотрении поля на оптической оси ( $u = v = 0$ ) выражение (3.1) значительно упрощается, и в условиях радиальной симметрии будет:

$$E(0, 0, z) = -z \int_0^{\infty} E_0(r) \times \frac{\exp\left(ik\sqrt{r^2 + z^2}\right)}{\left(r^2 + z^2\right)} \left( ik - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) r dr. \quad (3.2)$$

Далее в этом разделе будем, в основном, следовать изложению из [127\*].

Рассмотрим дифракцию плоской волны на дифракционной асферической линзе с функцией пропускания  $\tau(r) = \exp[-i(k\alpha_0 r)^\gamma]$ , где  $\alpha_0$  – безразмерный коэффициент, связанный с числовой апертурой оптического элемента и определяющий степень фокусировки. Значение параметра  $\alpha_0$  можно определить в соответствии с заданной максимальной числовой апертурой элемента  $NA_{\max}$  по формулам:

$$\alpha_0 = \sqrt[\gamma]{\frac{NA_{\max}}{\gamma(kR)^{\gamma-1}}}, \gamma \geq 1; \quad \left[ NA_{\max} (kr_a)^{1-\gamma} / \gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \gamma < 1 \quad (3.3)$$

где  $r_a$  – радиус центральной зоны дробного аксикона,  $R$  – радиус входного зрачка. Далее везде подразумевается, что при  $r > R$   $\tau(r) = 0$ .

Выражение (3.3) учитывает тот факт [86\*], что для дробного аксикона максимальное значение числовой апертуры достигается в центральной части оптического элемента. Если положить  $NA_{\min} = 1$  (предельное значение в воздухе), то элемент будет пропускать в основном затухающие волны, которые не распространяются вдоль оптической оси более чем на длину волны. В этом случае нужно детально рассматривать именно ближнюю зону дифракции, что для  $\gamma < 1$  будет сделано в параграфе 3.4.

При падении на асферическую линзу плоской волны единичной амплитуды, ограниченной радиусом  $R$ , распределение на оси можно описать в приближении тонкого оптического элемента по формуле (3.2) при  $E_0(r) = \exp(-i(k\alpha_0 r)^\gamma)$ . Однако применение метода стационарной фазы (и многих других приближённых методов) напрямую к интегралу (3.2) не гарантирует получения решения, удовлетворяющего граничному условию  $\lim_{z \rightarrow 0} E(0,0,z) = E_0(0)$  в силу приближённости. Такого неприятного эффекта можно избежать, если произвести в (3.2) интегрирование по частям:

$$E(0,0,z) = E_0(0) \exp(ikz) - E_0(R) \frac{z \cdot \exp\left(ik\sqrt{R^2 + z^2}\right)}{\sqrt{R^2 + z^2}} +$$

$$+ z \cdot \int_0^R \frac{dE_0(r)}{dr} \frac{\exp\left(ik\sqrt{r^2 + z^2}\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr. \quad (3.4)$$

Для выражения (3.4) граничное условие выполняется независимо от погрешности вычисления интеграла. Заметим, что выражение (3.4) похоже на интеграл Рэлея-Зоммерфельда второго типа, но отличается от него наличием внеинтегральных слагаемых. При  $E_0(r) = c = \text{const}$  из (3.4) легко получается известное точное решение [147]:

$$E_c(0,0,z) = c \exp(ikz) - c \frac{z \cdot \exp\left(ik\sqrt{R^2 + z^2}\right)}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (3.5)$$

Для случая  $E_0(r) = \exp(-i(k\alpha_0 r)^\gamma)$  получим:

$$E(0,0,z) = \exp(ikz) - \exp\left(-i(k\alpha_0 R)^\gamma\right) \frac{z \cdot \exp\left(ik\sqrt{R^2 + z^2}\right)}{\sqrt{R^2 + z^2}} -$$

$$- i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \cdot \int_0^R \frac{\exp\left(ik\sqrt{r^2 + z^2} - i(k\alpha_0 r)^\gamma\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}} r^{\gamma-1} dr. \quad (3.6)$$

Перепишем выражение (3.6) в следующем виде:

$$E(0,0,z) = E_1(z) - i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \cdot \int_0^R A(r) \exp(i\psi(r)) dr. \quad (3.7)$$

Если использовать для вычисления интеграла в (3.7) метод стационарной фазы в классическом виде, то мы получим лишь приближение поведения амплитуды поля, похожее на геометро-оптическое [104\*,113\*]. В этом случае отсутствуют осцилляции амплитуды, а граница тени является резкой. Более точный результат дает модифицированный метод стационарной фазы [86\*]:

$$E(0,0,z) \approx E_1(z) - iz\gamma(k\alpha_0)^\gamma \times A(r_0) \exp[i\psi(r_0)] \sqrt{\frac{2}{|\psi''(r_0)|}} \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt, \quad (3.8)$$

где

$$E_1(z) = \exp(ikz) - \exp\left(-i(k\alpha_0 R)^\gamma\right) \frac{z \cdot \exp\left(ik\sqrt{R^2 + z^2}\right)}{\sqrt{R^2 + z^2}}, \quad (3.9)$$

$$A(r_0) = \frac{r_0^{\gamma-1}}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} = \frac{kr_0}{\gamma(k\alpha_0)^\gamma (r_0^2 + z^2)}, \quad (3.10)$$

$$\Psi(r_0) = k\sqrt{r_0^2 + z^2} - (k\alpha_0 r_0)^\gamma, \quad (3.11)$$

$$\Psi''(r_0) = -\frac{k}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} \left( (1-\gamma) + \frac{z^2}{r_0^2 + z^2} \right), \quad (3.12)$$

$$t_1 = -r_0 \sqrt{|\Psi''(r_0)|/2}, \quad t_2 = (R - r_0) \sqrt{|\Psi''(r_0)|/2}, \quad r_0 - \text{стационарная точка, ко-}$$

торая определяется из уравнения:

$$(k\alpha_0)^\gamma \gamma r_0^{\gamma-1} = \frac{kr_0}{\sqrt{r_0^2 + z^2}}. \quad (3.13)$$

Второе равенство в (3.10) и равенство (3.12) получены с учётом выполнения (3.13): они верны только в стационарной точке.

Хотя интеграл в (3.8) явно выражается через функции Френеля, но общий вид будет достаточно громоздким и зависит от знака величины  $t_2$ . Полученное решение (3.8) достаточно удобно для численного расчёта, но мало пригодно (по крайней мере, без дополнительных упрощений) для анализа зависимости комплексной амплитуды (или интенсивности) от расстояния и параметров асферической линзы, так как в общем случае уравнение (3.13) не решается аналитически.

Ради однозначности толкования, введём следующее определение. Строго говоря, в рамках волновой теории амплитуда нигде не обращается в нуль, поэтому тени в геометро-оптическом смысле нет. Условно будем называть теневой такую область, в которой классический метод стационарной фазы даёт нулевую амплитуду. Это возможно в двух случаях: стационарная точка лежит за пределами отрезка интегрирования, то есть за пределами входного зрачка; уравнение, определяющее стационарную точку, не имеет корней. В первом случае тень, в принципе, является устранимой. Второй случай анало-

гичен явлению полного внутреннего отражения в геометрической оптике, такую тень назовём естественной. Данное разделение удобно, так как способ расчёта в этих двух случаях различается. Отметим также, что исходное поле падает на оптический элемент слева (такое уточнение необходимо, чтобы был однозначный смысл таких слов, как «левый», «правый» и им подобных).

Далее проведём анализ решения (3.8) для конкретных значений  $\gamma$ .

### 3.2 Дробный аксикон ( $0 < \gamma < 1$ )

Можно доказать, что при  $0 < \gamma < 1$  всегда имеется одна стационарная точка и нет точек перегиба (рисунок 3.1).

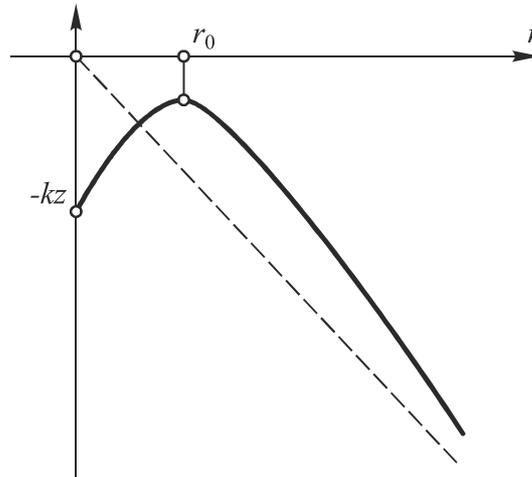


Рисунок 3.1 – График общего вида функции фазы  $\psi(r) = (k\alpha_0 r)^\gamma - k\sqrt{r^2 + z^2}$

Для рассматриваемого диапазона значений  $\gamma$  единственный случай, когда уравнение (3.13) приводится к алгебраическому уравнению степени ниже пятой – это  $\gamma = 0,5$ . В этом случае после преобразований уравнение для стационарной точки принимает вид:

$$\frac{4k}{\alpha_0} r_0^3 = r_0^2 + z^2. \quad (3.14)$$

Это уравнение решается аналитически, но формула Кардано достаточно громоздка. Однако некоторые выводы можно сделать, не решая уравнение (3.14), благодаря тому, что довольно простой вид имеет обратная функция

$z(r_0) = r_0 \sqrt{\frac{4kr_0}{\alpha_0} - 1}$ . При  $r_0 > \alpha_0 / (4k)$  величина под корнем положительна, а функция  $z(r_0)$  является возрастающей, поэтому искомая функция  $r_0(z)$  также возрастает и становится равной  $R$  при

$$z_{\max} = R \sqrt{\frac{4kR}{\alpha_0} - 1}. \quad (3.15)$$

Очевидно, что радиус зрачка должен быть больше  $\alpha_0 / (4k)$ . При использовании классического метода стационарной фазы данное расстояние соответствует границе тени, так как стационарная точка выходит за отрезок интегрирования. Максимальная амплитуда достигается немного левее границы тени (ближе к оптическому элементу), поэтому для приближённого её вычисления вблизи максимума разложим функцию  $z^2(r_0)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $r_0 = R$ , ограничившись двумя слагаемыми:

$$z^2(r_0 \rightarrow R) \approx R^2 \left( \frac{4kR}{\alpha_0} - 1 \right) + 2R \left( \frac{6kR}{\alpha_0} - 1 \right) (r_0 - R). \quad (3.16)$$

Отсюда находим значение стационарной точки:

$$r_{0\max} = R + \left[ z^2 - R^2 \left( \frac{4kR}{\alpha_0} - 1 \right) \right] / \left[ 2R \left( \frac{6kR}{\alpha_0} - 1 \right) \right]. \quad (3.17)$$

Полученное значение  $r_0$  для  $\gamma = 0,5$  можно использовать для вычислений по формуле (3.8).

Аналогично можно получить зависимость для ближней зоны  $z \rightarrow 0$ . Для этого функцию  $z^2(r_0)$  разложим в окрестности точки  $r_c = \alpha_0 / (4k)$ :

$$z^2(r_0 \rightarrow r_c) \approx 0 + \frac{\alpha_0}{4k} \left( r_0 - \frac{\alpha_0}{4k} \right) \Rightarrow r_{0c} = \frac{\alpha_0}{4k} + \frac{4k}{\alpha_0} z^2. \quad (3.18)$$

Можно доказать, что второе слагаемое в (3.8) при  $z \rightarrow 0$  стремится к некоторой ненулевой величине.

Рассмотренный алгоритм можно применить в общем случае. Используя поведение обратной функции  $z^2(r_0)$  (рисунок 3.2), можно получить аналогичные результаты для произвольного  $\gamma$  из рассматриваемого диапазона:

$$z^2(r_0) = \frac{k^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} r_0^{4-2\gamma} - r_0^2. \quad (3.19)$$

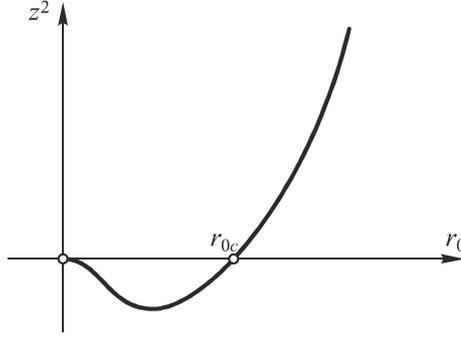


Рисунок 3.2 – График функции  $z^2(r_0) = ar_0^{4-2\gamma} - r_0^2$

Таким образом, для любого заданного значения  $z$  можно численно решить уравнение (3.19), имеющее один корень в области действительных  $z$ .

Для значений  $\gamma \geq 1$  этот подход невозможен, так как для сохранения общего вида зависимости  $z^2(r)$  должно выполняться условие, что степень первого слагаемого в (3.19) больше степени второго ( $4-2\gamma > 2 \Rightarrow \gamma < 1$ ).

Граница тени (левая граница), соответствующая  $r_0(z) = R$ , равна

$$z_{\max} = R \sqrt{\frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} - 1}. \quad (3.20)$$

Чтобы вся ось не была в области тени радиус зрачка должен быть больше чем  $(\gamma \alpha_0^\gamma)^{1/(1-\gamma)} / k$ . В окрестности точки максимума, соответствующей  $r_0 = R$ , имеется приближение:

$$z^2(r_0 \rightarrow R) \approx R^2 \left( \frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} - 1 \right) + 2R \left( \frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} (2-\gamma) - 1 \right) (r_0 - R). \quad (3.21)$$

Отсюда имеем приближение для стационарной точки:

$$r_{0\max} \approx R + \left[ z^2 - R^2 \left( \frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} - 1 \right) \right] / \left[ 2R \left( \frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} (2-\gamma) - 1 \right) \right]. \quad (3.22)$$

Зависимость в ближней зоне при  $z \rightarrow 0$  можно получить, рассмотрев окрестность точки  $r_c = k^{-1} (\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma})^{1/(2-2\gamma)}$ :

$$z^2 (r_0 \rightarrow r_c) \approx 0 + 2r_c(1-\gamma)(r_0 - r_c) \Rightarrow r_{0c} = r_c + \frac{z^2}{2(1-\gamma)r_c}. \quad (3.23)$$

Промежуточную область между ближней зоной и окрестностью максимума, так же как и область тени, к сожалению, рассмотреть затруднительно. В этом отличие от параксиального случая, когда уравнение для стационарной точки разрешимо при любом  $\gamma$ .

### 3.3 Аксикон( $\gamma=1$ )

Рассмотрим решение, даваемое формулой (3.9) при  $\gamma=1$ . В этом случае соотношения заметно упрощаются; уравнение стационарной точки (3.13) принимает вид:  $\alpha_0 = r_0 / \sqrt{r_0^2 + z^2}$  и имеет решение  $r_0 = \alpha_0 z / \sqrt{1 - \alpha_0^2}$ . Очевидно, что стационарная точка существует только при  $\alpha_0 < 1$ , что в геометрической оптике соответствует пропускающему аксикону. Если данное условие выполнено, то используем формулу (3.8) с учётом равенств:

$$\psi(r_0) = -kz\sqrt{1 - \alpha_0^2}, \quad \psi''(r_0) = -\frac{k}{z}(1 - \alpha_0^2)^{3/2}. \quad (3.24)$$

К сожалению, при малом  $z$  решение, получаемое по формуле (3.8), приводит к большой погрешности. Это связано с использованием квадратичной аппроксимации фазы на слишком большом интервале.

Для более точного решения поступим следующим образом: квадратичную аппроксимацию применим только на том участке, где график фазовой функции  $\psi(r) = k\alpha_0 r - k\sqrt{r^2 + z^2}$  похож на параболу, а за его пределами применим линейную аппроксимацию. За границу параболы  $r_0 + \Delta$  примем такое значение  $r$ , при котором значение аппроксимирующей функции равно значению исходной фазовой функции в нуле  $-kz = \psi(r_0) + 0,5\psi''(r_0)\Delta^2$ . Из этого равенства получаем:

$$\Delta^2 = 2z^2 \left(1 - \sqrt{1 - \alpha_0^2}\right) / \left(1 - \alpha_0^2\right)^{3/2}. \quad (3.25)$$

После соответствующего разбиения отрезка интегрирования вместо (3.8) получим следующее выражение для комплексной амплитуды:

$$E(0, 0, z) = \exp(ikz) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \times \exp\left(ik\sqrt{R^2 + z^2} - ik\alpha_0 R\right) - i\sqrt{2kz}\alpha_0 \times \left(1 - \alpha_0^2\right)^{-1/4} \exp\left(ikz\sqrt{1 - \alpha_0^2}\right) \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt - ik\alpha_0 z \int_{r_0 + \Delta}^R \frac{e^{ik\sqrt{r^2 + z^2} - ik\alpha_0 r}}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr, \quad (3.26)$$

где  $t_1 = -\sqrt{kz/2}\alpha_0 \left(1 - \alpha_0^2\right)^{1/4}$ ,  $t_2 = \Delta\sqrt{k/(2z)} \left(1 - \alpha_0^2\right)^{3/4}$ .

Последнее слагаемое в (3.26) соизмеримо с остальными только при довольно малых  $z$ , поэтому в данном параграфе его анализировать не будем. Если  $r_0 + \Delta \geq R$ , то последнего слагаемого в (3.26) вовсе не будет, а верхний предел в интегральной экспоненте будет равен  $t_2 = (R - r_0)\sqrt{k/(2z)} \left(1 - \alpha_0^2\right)^{3/4}$ . Мы видим, что решение сводится к общему виду (3.8) – (3.12).

Если  $\alpha_0 \rightarrow 1$ , то можно показать, что в этой окрестности последнего слагаемого в (3.26) не будет, а третье слагаемое примерно равно величине  $-ikR\sqrt{1 - \alpha_0^2}$  (стремится к нулю), однако первые два слагаемые не стремятся к нулю. Поэтому, в отличие от геометро-оптического подхода и классического метода стационарной фазы, при  $\alpha_0 > 1$  амплитуда не будет равна нулю.

Очевидно, что вычисления при  $\alpha_0 \geq 1$  очень существенно отличаются от описанных выше и будут рассмотрены отдельно.

### 3.3.1 Результаты численного моделирования для $\gamma \leq 1$

Численное моделирование выполнялось по формуле (3.2) численным интегрированием при следующих расчётных параметрах:  $\lambda = 1$  мкм, максимальное значение числовой апертуры  $NA_{\max} = 0,8$ . Если считать, что центральная зона ограничивается радиусом  $r_a = \lambda$ , то по формуле (3.3) параметр

дробного аксикона оценивается следующим образом:

$$\alpha_0 = 0,8(2\pi)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \gamma^{-\frac{1}{\gamma}}, \gamma < 1.$$

Однако в этом случае с уменьшением значения  $\gamma$  рассматриваемые оптические элементы будут становиться существенно параксиальными, так как числовая апертура при удалении из центральной зоны оптического элемента будет быстро уменьшаться. Поэтому ограничим центральную зону радиусом  $r_a = 10\lambda$ , тогда значение  $\alpha_0$  увеличится в  $10^{(1/\gamma)-1}$  раз:

$$\alpha_0 = 0,8 \cdot (20\pi)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} (1/\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}, \gamma < 1.$$

На рисунке 3.3 приведены результаты дифракции плоского пучка на центральной зоне ( $R = r_a = 10\lambda$ ) дробного аксикона при различных  $\gamma$ .

Как видно из рисунка 3.3, частота кольцевых линий для дробного аксикона сгущается к центру, что свидетельствует об увеличении числовой апертуры в центральной части. Причём если превышает критическое значение  $NA$  для данной оптической среды  $NA_{\text{lim}} = n$ , где  $n$  – показатель преломления среды, то энергия от этой части элемента идёт в затухающие волны, т.е. элемент в этой зоне является «не пропускающим».

Данная ситуация поясняется на рисунке 3.3г, показывающем спектральное распределение. При  $\gamma = 1$  дробный аксикон соответствует обычному аксикону, числовая апертура которого по всему элементу имеет одинаковое значение (в рассматриваемом случае  $NA_{\text{max}} = 0,8$ ), что соответствует концентрации пространственного спектрального распределения около линии частот 0,8. Для  $\gamma = 0,8$  часть пространственного спектра уходит за пределы единицы, являющейся границей распространяющихся волн, для  $\gamma = 0,5$  эта часть ещё больше. Уменьшение количества пропускаемой дробным аксиконом энергии можно наблюдать также по уменьшению интенсивности (рисунки 3.3д, е).

Заметим, однако, что при  $\gamma < 1$  формируется более равномерное распределение интенсивности вдоль оптической оси, чем для аксикона, для которого характерен линейный рост интенсивности. В рассматриваемом случае (ри-

сунок 3.3д) глубина фокуса по уровню полуспада от максимума интенсивности (full length at half maximum):  $FLHM = 3,5\lambda$  для  $\gamma = 1$ ;  $FLHM = 4,16\lambda$  для  $\gamma = 0,8$ ;  $FLHM = 4,7\lambda$  для  $\gamma = 0,5$ .

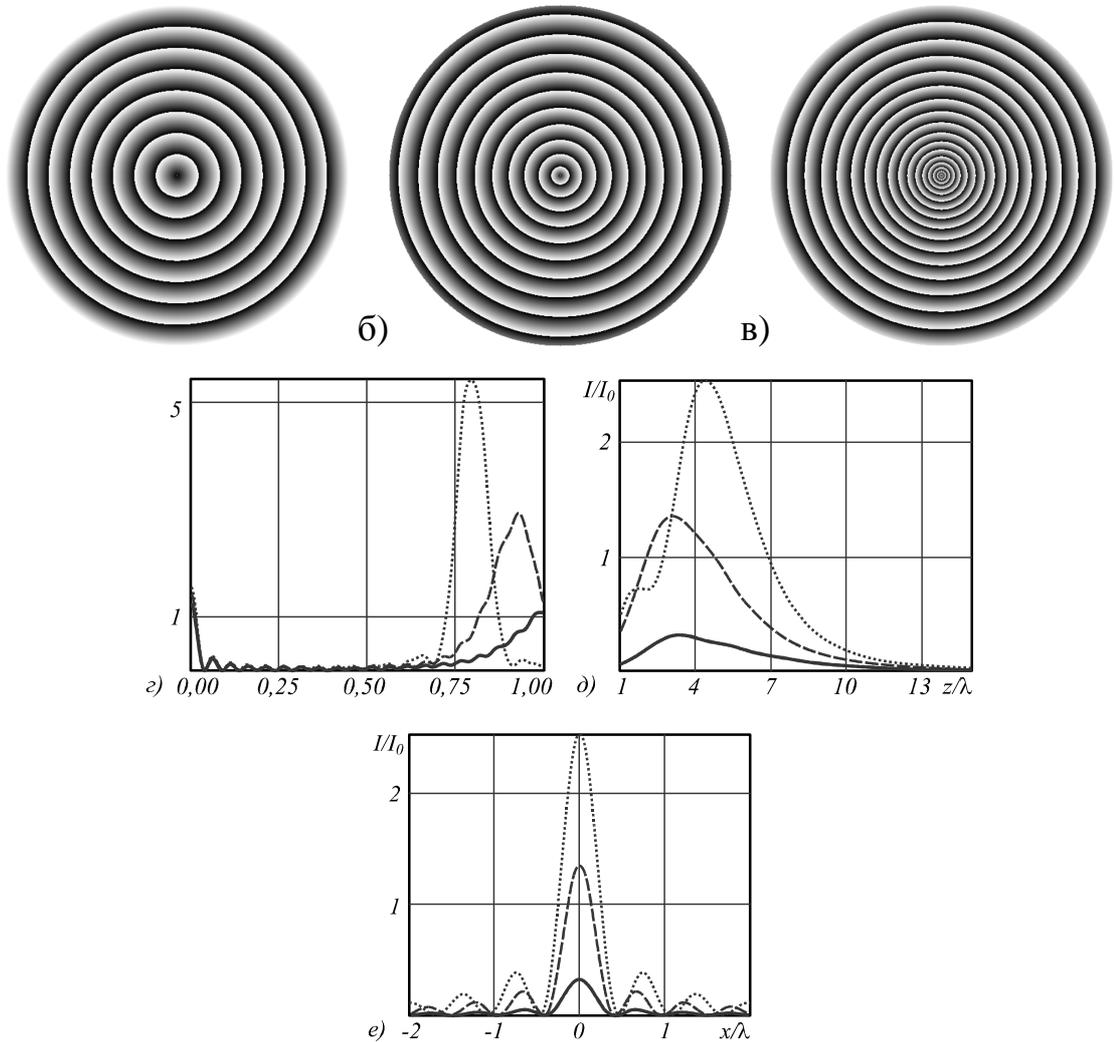
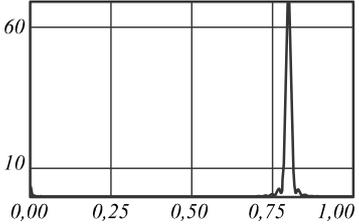
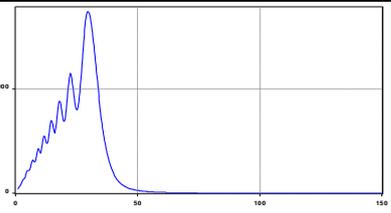
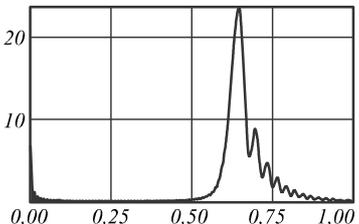
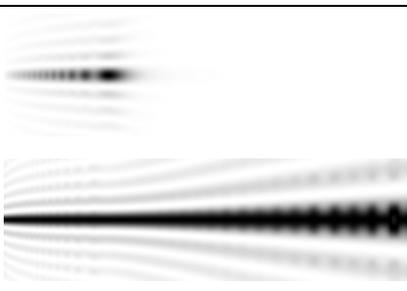
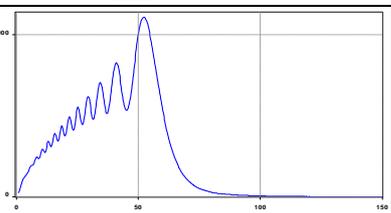
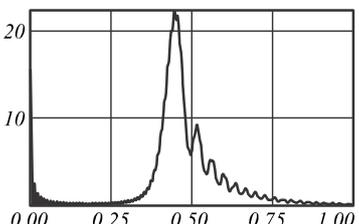
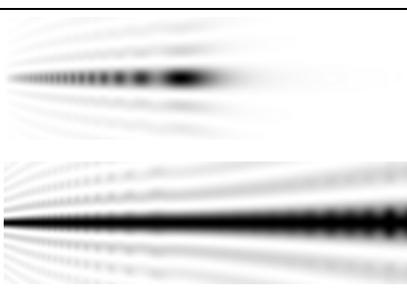
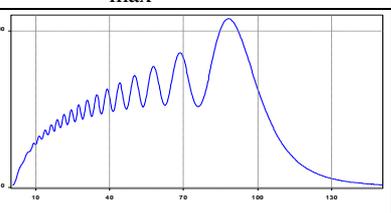
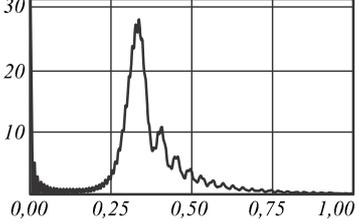
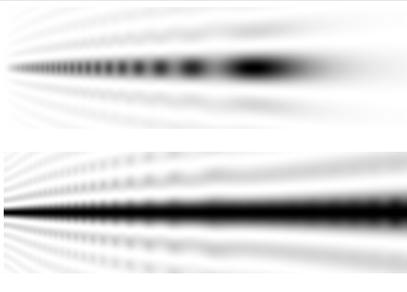
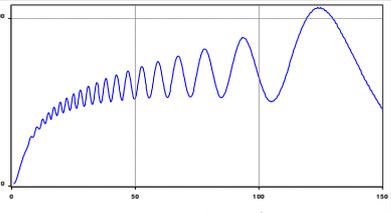


Рисунок 3.3 – Фаза дробного аксикона при  $\gamma = 1$  (а),  $\gamma = 0,8$  (б),  $\gamma = 0,5$  (в) (негативные изображения) и соответствующие пространственные спектральные распределения (г), а также распределения интенсивности вдоль оптической оси (д) и в плоскости максимального значения (е) ( $\gamma = 1$  – точечная линия,  $\gamma = 0,8$  – пунктирная линия,  $\gamma = 0,5$  – сплошная линия)

При этом дробный аксикон обеспечивает и меньший размер фокального пятна в плоскости максимальной интенсивности (full width at half maximum):  $FWHM = 0,437\lambda$  для  $\gamma = 1$ ;  $FWHM = 0,392\lambda$  для  $\gamma = 0,8$ ;  $FWHM = 0,384\lambda$  для  $\gamma = 0,5$ .

Таблица 3.1. Результаты моделирования для дробных аксиконов с различными  $\gamma$  для  $R = 50\lambda$  и  $NA_{\max} = 0,8$  при  $r_a = 10\lambda$

Пространственный спектр	Картина интенсивности и "топология"* в продольной плоскости ( $6\lambda \times 200\lambda$ )	Распределение интенсивности на оптической оси
$\gamma=1, \alpha_0 = 0,8$ 		 $FLHM=8,55\lambda;$ $FWHM_x=0,44\lambda;$ $z_{\max} = 37,5\lambda$
$\gamma=0,8, \alpha_0 = 2,977$ 		 $FLHM=13,8\lambda;$ $FWHM_x=0,56\lambda;$ $z_{\max} = 65,7\lambda$
$\gamma=0,5, \alpha_0 = 201$ 		 $FLHM=24,8\lambda; FWHM_x=0,8\lambda;$ $z_{\max} = 114,6\lambda$
$\gamma=0,25, \alpha_0 = 50800683$ 		 $FLHM=39,5\lambda;$ $FWHM_x=1,08\lambda;$ $z_{\max} = 169,5\lambda$

\*"топология" - распределение интенсивности без нормировки на глобальный максимум, позволяет визуально оценить поперечный размер светового пятна на произвольном расстоянии.

Чтобы более наглядно показать большую равномерность осевого распределения для дробного аксикона по сравнению с линейным аксиконом, увеличим радиус каждого оптического элемента до  $R = 50\lambda$ , сохранив все ос-

тальные параметры. Результаты моделирования приведены в таблице 3.1. Также приведены оценки границы тени  $z_{\max}$ , полученные по формуле (3.20). На графиках третьего столбца по горизонтали  $z/\lambda$ .

Как наглядно видно из таблицы 3.1, чем меньше значение параметра  $\gamma$ , тем более равномерным по интенсивности становится световой отрезок, формируемый вдоль оптической оси, и увеличивается его протяжённость (FLHM). Однако максимальный диаметр (FWHM<sub>x</sub>) светового отрезка также увеличивается, так как вне центральной зоны  $R > r > r_a$  величина числовой апертуры уменьшается.

Заметим, что относительное увеличение максимального диаметра светового отрезка происходит медленнее, чем его продольное увеличение. Таким образом, в приложениях, где размер светового пятна порядка одной длины волны является удовлетворительным, использование дробного аксикона с  $\gamma \ll 1$ , позволяет получить значительно более длинный и равномерный световой отрезок, чем линейный аксикон того же радиуса.

### 3.4 Поправки к результатам пункта 3.2 в ближней зоне

В разделе 3.1 уже получено общее выражение для амплитуды поля при помощи метода стационарной фазы. Но следует учесть факт, что при  $0 < \gamma < 1$  интеграл (3.7) является несобственным, поэтому вклад окрестности начала координат может быть сопоставим с вкладом стационарной точки. Поэтому полученное общее решение (3.8) требует соответствующих поправок. (При других  $\gamma$  поправки незначительны по величине.) Подробнее материал этого раздела изложен в [128\*].

Вклад окрестности нуля с учётом осцилляций не превосходит площади нескольких первых лепестков. Оценим эту площадь. В центре (при  $r \approx 0$ ) фазовая функция (3.11)  $\psi(r) \approx -kz + \beta(k\alpha_0 r)^\gamma$ . Четверть периода равна  $r_q$ :

$$r_q = \frac{1}{k\alpha_0} \left( \frac{\pi}{2\beta} \right)^{1/\gamma}. \quad (3.27)$$

Величина  $\beta$  мало отличается от единицы, поэтому далее её будем опускать. Таким образом, поправка равна величине

$$\begin{aligned} E_{cor}(z) &= -i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \exp(ikz) \cdot \int_0^{br_q} \frac{\exp(-i(k\alpha_0 r)^\gamma)}{\sqrt{r^2 + z^2}} r^{\gamma-1} dr = \\ &= -i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \exp(ikz) \cdot EI_{cor}(z) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Верхний предел в (3.28) равен нескольким  $r_q$ . Из вида подынтегральной функции ясно, что поправка не будет пренебрежимо малой только при малых  $z$ , что и объясняет упоминание о ближней зоне в заголовке параграфа. Способ приближённого вычисления интеграла следующий. Запишем его в тригонометрическом виде:

$$EI_{cor}(z) = \int_0^{br_q} \frac{\cos[(k\alpha_0 r)^\gamma]}{\sqrt{r^2 + z^2}} r^{\gamma-1} dr - i \int_0^{br_q} \frac{\sin[(k\alpha_0 r)^\gamma]}{\sqrt{r^2 + z^2}} r^{\gamma-1} dr. \quad (3.29)$$

С учётом последующего приближения делаем лепестки симметричными и одинаковой ширины, что получается при замене  $r^\gamma = y$ :

$$EI_{cor}(z) = \frac{1}{\gamma} \int_0^\sigma \frac{\cos[(k\alpha_0)^\gamma y]}{\sqrt{y^{2/\gamma} + z^2}} dy - i \frac{1}{\gamma} \int_0^\sigma \frac{\sin[(k\alpha_0)^\gamma y]}{\sqrt{y^{2/\gamma} + z^2}} dy, \quad \sigma = (br_q)^\gamma. \quad (3.30)$$

Теперь интеграл стал собственным. Отрезок интегрирования разбивается по границам лепестков, внутри каждого лепестка арка синусоиды заменяется аркой параболы (для этого и была нужна симметричность) из условия коллокации: совпадают нули и вершина арки. Знаменатель преобразуется следующим образом: он заменяется на  $z$  или на  $y^{1/\gamma}$  в зависимости от того, какая величина больше. Из-за особого вида интеграла  $\int y^p dy$  при  $p = -1$  ответ для  $\gamma = 1/2$  и  $\gamma = 1/3$  приводится отдельно.

Переписав (3.30 в виде  $EI_{cor}(z) = CI_{cor}(z) - iSI_{cor}(z)$ , выпишем окончательный ответ, выраженный в исходной переменной  $r$ . Он, естественно, вы-

ражается разными формулами в зависимости от соотношения между  $z$  и  $r_q$ .

Ограничимся первыми двумя (при синусе) и тремя (при косинусе) лепестками:

$CI_{cor}(z) = S_1^c(z) + S_2^c(z) + S_3^c(z)$  (граничные точки – значения, когда под знаком косинуса стоит 0, 90, 270, 450 градусов);

$SI_{cor}(z) = S_{11}^s(z) + S_{12}^s(z) + S_2^s(z)$  (граничные точки – значения, когда под знаком синуса стоит 0, 90, 180, 360 градусов).

Лепестки с косинусом,  $z < r_q$ :

$$S_1^c(z) = \begin{cases} \frac{z^{\gamma-1}}{\gamma(1-\gamma)} + \frac{z^{3\gamma-1}}{3\gamma(3\gamma-1)r_q^{2\gamma}} + \frac{2\gamma}{(\gamma-1)(3\gamma-1)} r_q^{\gamma-1}, \\ \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{4\sqrt{z}}{3r_q} - \frac{4}{\sqrt{r_q}}, \quad \gamma=1/2, \\ \frac{4,5}{z^{2/3}} - \frac{2,5}{r_q^{2/3}} - \frac{\ln(r_q/z)}{3r_q^{2/3}}, \quad \gamma=1/3, \end{cases} \quad (3.31)$$

$$S_2^c(z) = \begin{cases} -r_q^{\gamma-1} \left\{ 4 \cdot \frac{3^{2-1/\gamma} - 1}{2\gamma-1} - \frac{3^{2-1/\gamma} - 3}{\gamma-1} - \frac{3^{3-1/\gamma} - 1}{3\gamma-1} \right\}, \\ -\frac{8(\ln 3 - 1)}{\sqrt{r_q}} \approx -\frac{0,789}{\sqrt{r_q}}, \quad \gamma=1/2, \\ -\frac{4 - 3\ln 3}{r_q^{2/3}} \approx -\frac{0,704}{r_q^{2/3}}, \quad \gamma=1/3, \end{cases} \quad (3.31б)$$

$$S_3^c(z) = \begin{cases} r_q^{\gamma-1} \left\{ 8 \cdot \frac{5^{2-1/\gamma} - 3^{2-1/\gamma}}{2\gamma-1} - \frac{3 \cdot 5^{2-1/\gamma} - 5 \cdot 3^{2-1/\gamma}}{\gamma-1} - \frac{5^{3-1/\gamma} - 3^{3-1/\gamma}}{3\gamma-1} \right\}, \\ \frac{8(2\ln(5/3) - 1)}{\sqrt{r_q}} \approx -\frac{0,173}{\sqrt{r_q}}, \quad \gamma=1/2, \\ \frac{8/5 - 3\ln(5/3)}{r_q^{2/3}} \approx \frac{0,0675}{r_q^{2/3}}, \quad \gamma=1/3. \end{cases} \quad (3.31в)$$

Лепестки с косинусом,  $r_q < z < 3^{1/\gamma} r_q$ :

$$S_1^c(z) = \begin{cases} \frac{2}{3\gamma z} r_q^\gamma, \\ \frac{4\sqrt{r_q}}{3z}, \quad \gamma=1/2, \\ \frac{2r_q^{1/3}}{z}, \quad \gamma=1/3, \end{cases} \quad (3.32a)$$

$$S_2^c(z) = \begin{cases} \frac{3z^{\gamma-1}}{\gamma(1-\gamma)} + \frac{2z^{2\gamma-1}}{r_q^\gamma} \left( \frac{2}{2\gamma-1} - \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{z^{3\gamma-1}}{r_q^{2\gamma}} \left( \frac{1}{3\gamma} - \frac{1}{3\gamma-1} \right) - \\ - \frac{4r_q^\gamma}{3\gamma z} - r_q^{\gamma-1} \cdot 3^{2-1/\gamma} \left( \frac{4}{2\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-1} - \frac{3}{3\gamma-1} \right), \\ \frac{12}{\sqrt{z}} - \frac{8\sqrt{r_q}}{3z} - \frac{4\sqrt{z}}{3r_q} - \frac{8\ln(3\sqrt{r_q/z})}{\sqrt{r_q}}, \quad \gamma=1/2, \\ \frac{13,5}{z^{2/3}} - \frac{18}{(zr_q)^{1/3}} + \frac{4,5}{r_q^{2/3}} - \frac{4r_q^{1/3}}{z} + \frac{3\ln(3(r_q/z)^{1/3})}{r_q^{2/3}}, \quad \gamma=1/3, \end{cases} \quad (3.32b)$$

$S_3^c(z)$  совпадает с (3.31в).

Лепестки с синусом,  $z < r_q$ :

$$S_{11}^s(z) = \begin{cases} -\frac{z^{2\gamma-1}}{r_q^\gamma \gamma (2\gamma-1)} + \frac{z^{3\gamma-1}}{3\gamma (3\gamma-1) r_q^{2\gamma}} + \frac{4\gamma-1}{(2\gamma-1)(3\gamma-1)} r_q^{\gamma-1}, \\ \frac{4\sqrt{z}}{3r_q} + \frac{2\ln(r_q/z)}{\sqrt{r_q}}, \quad \gamma=1/2, \\ -\frac{7}{r_q^{2/3}} + \frac{9}{(zr_q)^{1/3}} - \frac{2\ln(r_q/z)}{r_q^{2/3}}, \quad \gamma=1/3, \end{cases} \quad (3.33a)$$

$$S_{12}^s(z) = \begin{cases} r_q^{\gamma-1} \left\{ \frac{2^{3-1/\gamma} - 2}{2\gamma-1} - \frac{2^{3-1/\gamma} - 1}{3\gamma-1} \right\}, \\ \frac{4\ln 2 - 2}{\sqrt{r_q}} \approx \frac{0,773}{\sqrt{r_q}}, \quad \gamma = 1/2, \\ \frac{3(1 - \ln 2)}{r_q^{2/3}} \approx \frac{0,921}{r_q^{2/3}}, \quad \gamma = 1/3, \end{cases} \quad (3.336)$$

$$S_2^s(z) = \begin{cases} -r_q^{\gamma-1} \left\{ 24 \cdot \frac{4^{1-1/\gamma} - 2^{-1/\gamma}}{2\gamma-1} - \frac{2 \cdot 4^{2-1/\gamma} - 2^{4-1/\gamma}}{\gamma-1} - \frac{4^{3-1/\gamma} - 2^{3-1/\gamma}}{3\gamma-1} \right\}, \\ -\frac{12\ln 2 - 8}{\sqrt{r_q}} \approx -\frac{0,316}{\sqrt{r_q}}, \quad \gamma = 1/2, \\ -\frac{3(3/4 - \ln 2)}{r_q^{2/3}} \approx \frac{0,171}{r_q^{2/3}}, \quad \gamma = 1/3. \end{cases} \quad (3.33B)$$

Лепестки с синусом,  $r_q < z < 2^{1/\gamma} r_q$ :

$$S_{11}^s(z) = \begin{cases} \frac{2}{3\gamma z} r_q^\gamma, \\ \frac{4\sqrt{r_q}}{3z}, \quad \gamma = 1/2, \\ \frac{2r_q^{1/3}}{z}, \quad \gamma = 1/3, \end{cases} \quad (3.34a)$$

$$S_{12}^s(z) = \begin{cases} \frac{z^{2\gamma-1}}{r_q^\gamma} \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{2}{2\gamma-1} \right) + \frac{z^{3\gamma-1}}{r_q^{2\gamma}} \left( \frac{1}{3\gamma} - \frac{1}{3\gamma-1} \right) - \\ - \frac{2r_q^\gamma}{3\gamma z} + r_q^{\gamma-1} \cdot 2^{3-1/\gamma} \left( \frac{1}{2\gamma-1} - \frac{1}{3\gamma-1} \right), \\ -\frac{2}{\sqrt{r_q}} - \frac{4\sqrt{r_q}}{3z} + \frac{4\sqrt{z}}{3r_q} + \frac{4\ln(2\sqrt{r_q/z})}{\sqrt{r_q}}, \quad \gamma = 1/2, \\ -\frac{4}{r_q^{2/3}} - \frac{2r_q^{1/3}}{z} + \frac{9}{(zr_q)^{1/3}} - \frac{3\ln(2(r_q/z)^{1/3})}{r_q^{2/3}}, \quad \gamma = 1/3, \end{cases} \quad (3.34b)$$

$S_2^s(z)$  совпадает с (3.33B).

### **3.4.1 Результаты численного моделирования и анализ необходимости поправок в ближней зоне**

Рассмотрим расчёт по квадратурным формулам дифракции плоской волны в ближней зоне на дробных аксиконах с высокой числовой апертурой с использованием формулы (3.2).

Примем  $R = 5\lambda$  и в (3.3)  $NA_{\min} = 1$ . Тогда значение  $NA = 1$  будет достигаться на краю оптического элемента, а в центре значение числовой апертуры будет выше и это означает необходимость учитывать затухающие волны.

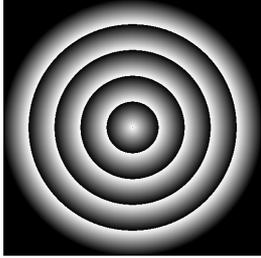
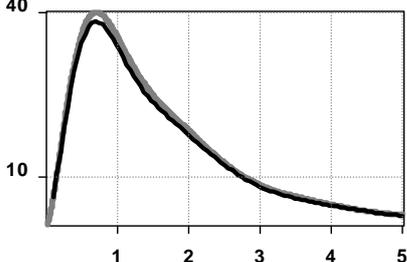
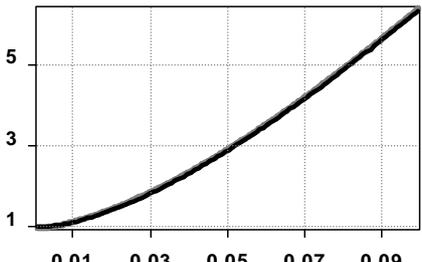
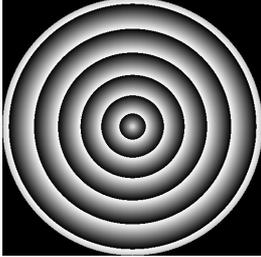
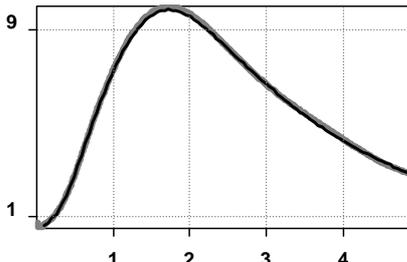
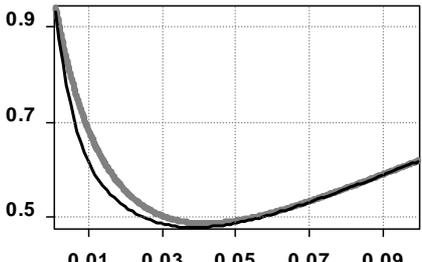
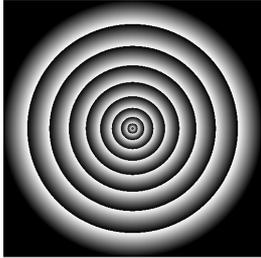
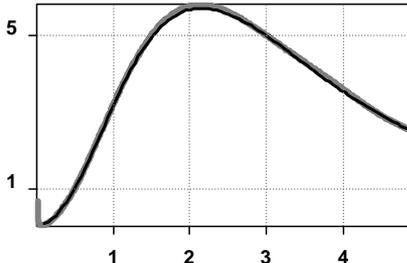
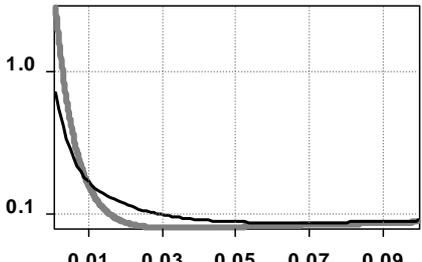
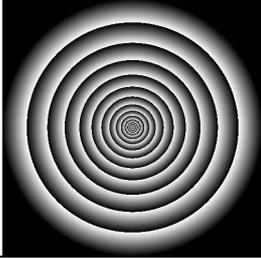
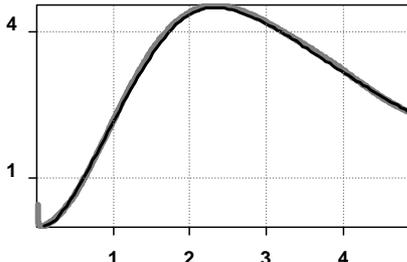
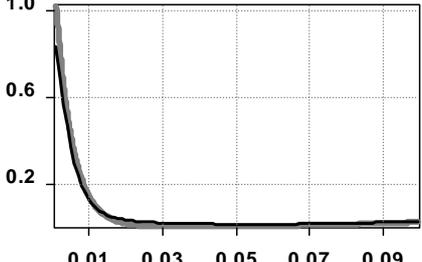
По формуле (3.3) в принятых нами условиях параметр дробного аксикона оценивается следующим образом:  $\alpha_0 = (10\pi) \frac{1-\gamma}{\gamma} (1/\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$ ,  $0 < \gamma < 1$ .

В таблице 3.2 приведены результаты дифракции ограниченного плоского пучка на дробном аксиконе при различных значениях  $\gamma$ . Расчёты были выполнены двумя методами: на основе численного интегрирования выражения (3.2) с применением быстрого алгоритма расчёта, описанного в [83\*] и с использованием метода разложения по плоским волнам, реализованном для радиально-симметричных полей [81\*]. В последнем случае при уменьшении расстояния от оптического элемента необходимо учитывать всё больший диапазон пространственных частот, соответствующих затухающим волнам. При расчёте по формуле (3.2) этого делать не нужно, так как весь диапазон пространственных частот уже учтён в подынтегральном выражении.

Как видно из таблицы 3.2, два метода практически не различаются по результатам расчета на расстояниях более длины волны. Однако на очень близких расстояниях ( $z < 0,1\lambda$ ), где влияние затухающих волн очень велико, результаты несколько различаются. Данный факт отмечался в работе [81\*].

Заметим также, что если рассматривать осевой участок  $z > 0,5\lambda$ , то наблюдается поведение, аналогичное отмеченному ранее для дробных аксиконов большего размера [127\*].

Таблица 3.2 – Результаты расчёта дифракции для дробного аксикона ( $R = 5\lambda$ ) с различными  $\gamma$  для  $NA_{\min} = 1$  на основе численного интегрирования выражения (3.2) (чёрный цвет линий на графиках) и с использованием метода разложения по плоским волнам (серый цвет линий на графиках).

Вид фазы элемента	Распределение интенсивности на оптической оси $z \in [0, 1\lambda, 5\lambda]$ ( $z/\lambda$ )	Распределение интенсивности на оптической оси $z \in [0, 001\lambda, 0, 1\lambda]$ ( $z/\lambda$ )
$\gamma=1, \alpha_0 = 1$ 	 Максимум ( $z=0,7\lambda$ ) = 40	 Минимум ( $z=0,001\lambda$ )=1
$\gamma=0,8, \alpha_0 = 3,125$ 	 Максимум ( $z=1,7\lambda$ ) = 10	 Минимум ( $z=0,04\lambda$ )=0,48
$\gamma=0,5, \alpha_0 = 125,66$ 	 Максимум ( $z=2,15\lambda$ ) = 5,8	 Серый: минимум ( $z=0,034\lambda$ )=0,01 Черный: минимум ( $z=0,065\lambda$ )=0,044
$\gamma=0,25, \alpha_0 = 7937607$ 	 Максимум ( $z=2,4\lambda$ ) = 4,5	 Минимум ( $z=0,055\lambda$ ) = 0,018

А именно, максимумы и условная граница тени отодвигаются от элемента при уменьшении  $\gamma$ . Однако на начальном участке имеется принципиальное отличие дробного аксикона от линейного аксикона: интенсивность не сразу начинает возрастать при увеличении расстояния, а вначале происходит убывание. Причём при  $\gamma$ , не близком к единице, этот минимум достаточно глубокий. Вычисление по модифицированному методу стационарной фазы не предсказывает такого эффекта, но результат может быть скорректирован при добавлении поправки (3.28).

Для проверки этой возможности выпишем в явном виде выражение (3.6) при малом  $z$  и добавим поправку (3.28):

$$E(0,0,z) \approx \exp(ikz) - \frac{z}{R} \exp\left[ikR - i(k\alpha_0 R)^\gamma\right] - \\ - ikz \frac{\sqrt{2} \exp\left[-ikr_0^{1/(\gamma-1)}\right]}{\sqrt{1-\gamma}(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(2-2\gamma)}} \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt - i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \exp(ikz) \cdot EI_{cor}(z). \quad (3.35)$$

Сравним слагаемые между собой. Если  $R > \lambda / (2\pi)$ , то второе слагаемое мало

по сравнению с первым. Коэффициент  $\mu = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{1-\gamma}(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(2(1-\gamma))}}$  также невелик,

так как в знаменателе присутствует величина  $\alpha_0$  в положительной степени

(например, при  $\gamma = 1/2$   $\mu = 4\sqrt{\pi/\alpha_0}$ ), а в данном диапазоне  $\alpha_0$  велико. Кроме

того, величина коэффициента завышена, так как в ней подставлено значение

имеющегося в (3.35) интеграла Френеля при бесконечных пределах. Поэтому

в первом приближении оставим только первое и последнее слагаемое:

$$E(0,0,z) \approx \exp(ikz) \left[1 - i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \cdot EI_{cor}(z)\right]. \quad (3.36a)$$

Так как общий фазовый множитель не влияет на интенсивность, его опустим:

$$E_1(0,0,z) \approx 1 - i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \cdot EI_{cor}(z). \quad (3.36b)$$

В силу громоздкости выражений для поправочного слагаемого, в общем виде анализировать (3.36б) не будем. Ограничимся частным значением  $\gamma = 1/2$ . Результаты численного моделирования (третья строка Таблицы 3.2)

показывают, что области  $z \leq 9r_q$ , для которой имеются формулы, вполне достаточно для выяснения, необходимы ли поправки.

Если воспользоваться формулами поправок, подставить в них значение  $r_q = \pi^2 / (4k\alpha_0)$  и ввести для удобства переменную  $s = 2\sqrt{k\alpha_0 z} / \pi$ , то получим следующее кусочно-непрерывное выражение для амплитуды поля:

$$E_1(0,0,s) \approx \begin{cases} 1 + \pi(s^2 \ln s - 0,114s^2 - s^3 / 3) + \\ + i\pi(-s + 1,154s^2 - s^3 / 3), & 0 \leq s \leq 1 \\ 1 + \pi(0,58s^2 + s^2 \ln(s/2) - s^3 / 3) + \\ + i\pi(1/3 - 3s - 0,043s^2 - 2s^2 \ln(s/3) + s^3 / 3), & 1 < s \leq 2 \end{cases} \quad (3.37)$$

Анализируя это выражение, можно показать, что интенсивность имеет минимум, равный 0,0478 при  $s = 2,117$ , т.е. при  $z = 1,12\pi^2 / (k\alpha_0) \approx 0,015\lambda$ .

Этот результат получается средним между двумя вариантами, полученными численными методами. В случае прямого расчета по формуле (3.2) получается очень близкое значение минимума, а при использовании разложения по плоским волнам оказывается более точное положение минимума.

Оно, с учётом его некоторой грубости, вполне согласуется с результатами численного моделирования, особенно при использовании разложения по плоским волнам. По глубине минимума согласие лучше, чем по его положению. Кроме приближённости аналитических формул здесь сказывается и то обстоятельство, что дно минимума очень пологое (третий столбец таблицы).

Таким образом, доказано, что корректный расчет в зоне затухающих волн возможен только при учете поправочного слагаемого (3.28), так как без него минимум, во всяком случае, такой глубокий, обнаружить невозможно.

Поперечное распределение интенсивности в ближней зоне дифракции, рассчитанное на основе метода разложения по плоским волнам для рассмотренных выше оптических элементов, приведено на рисунке 3.4.

Как видно, в плоскости максимальной интенсивности размер центрального светового пятна примерно одинаковый во всех случаях и равен по полу-

спаду от максимального значения:  $\text{FWHM}=0,385\lambda$  для  $\gamma=0,8$ ,  $\text{FWHM}=0,395\lambda$  для  $\gamma=0,5$  и  $\text{FWHM}=0,4\lambda$  для  $\gamma=0,25$ . Однако с уменьшением параметра  $\gamma$  уменьшается интенсивность светового пятна.

Выигрыш использования дробного аксикона проявляется только на очень близких к оптическому элементу расстояниях. В частности, на расстоянии  $z=0,01\lambda$  размер центрального светового пятна равен  $\text{FWHM}=0,266\lambda$  для  $\gamma=0,8$ ,  $\text{FWHM}=0,123\lambda$  для  $\gamma=0,5$  и  $\text{FWHM}=0,118\lambda$  для  $\gamma=0,25$ . В этом случае световое пятно оказывается в 5 раз меньше дифракционного предела.

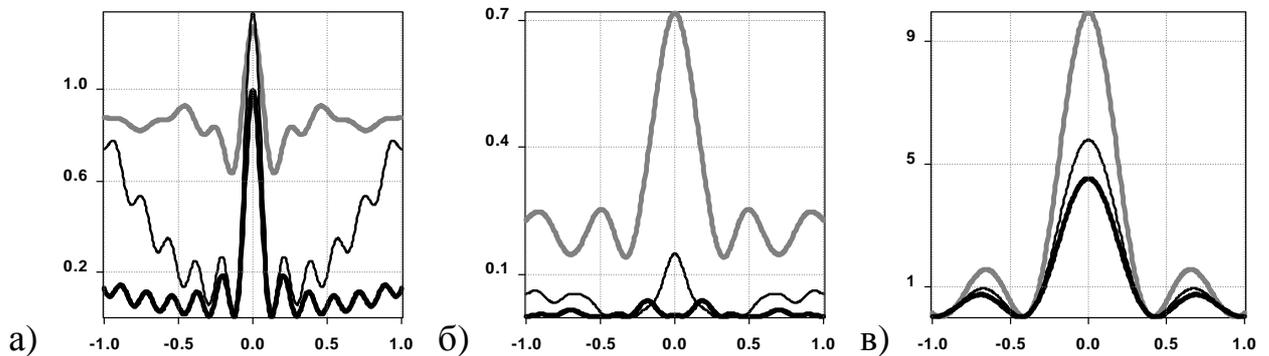


Рисунок 3.4 – Распределение интенсивности на расстоянии (а)  $z=0,01\lambda$ , (б)  $z=0,1\lambda$  и (в) в плоскости максимума интенсивности для  $\gamma=0,8$  (серая линия),  $\gamma=0,5$  (тонкая черная линия),  $\gamma=0,25$  (толстая черная линия)

Таким образом, численно показано, что с помощью дробного аксикона, степень которого значительно меньше единицы, в зоне затухающих волн формируется световое пятно, имеющее как продольный, так и поперечный размер порядка одной десятой длины волны. Однако данный результат получен в скалярной теории дифракции и соответствует лишь одной компоненте электрического поля.

### 3.5 Аксикон с числовой апертурой выше предельной (дополнение к пункту 3.3)

В работе [107\*] на основе геометро-оптического анализа хода лучей для рефракционного аксикона, освещённого с плоской стороны, было показано, что числовая апертура аксикона ограничивается условием наступления полного внутреннего отражения.

Отсутствию внутреннего отражения соответствует условие, что угол при вершине удовлетворяет неравенству  $\alpha_0 \geq \alpha_{tir} = \arccos(1/n)$ , где  $n$  – показатель преломления материала аксикона. Значение числовой апертуры (NA) аксикона определяется углом, под которым лучи, выходящие из аксикона, пересекают оптическую ось:  $NA = p = \sin \beta$ . Очевидно, что выходящий из рассматриваемого аксикона луч не может идти под более крутым углом к оптической оси, чем  $\alpha_{tir}$ . В рамках волновой теории действие аксикона описывается через комплексную функцию пропускания  $\tau(r) = \exp(-ikpr)$ .

Если  $\alpha_0 < \alpha_{tir}$ , то происходит полное внутреннее отражение и в рамках геометро-оптической теории лучи из аксикона выходят сбоку от элемента [107\*] и формируют расходящиеся, не пересекающие оптическую ось лучи. Однако из волновой теории известно, что при полном внутреннем отражении часть излучения проникает за границу оптического элемента и образует так называемые затухающие волны. Поэтому формально запишем выражение для параметра аксикона в виде комплексного числа (при отсутствии полного внутреннего отражения оно становится вещественным и меньшим единицы):

$$p = \cos \alpha_0 \left( n \sin \alpha_0 - i \sqrt{n^2 \cos^2 \alpha_0 - 1} \right). \quad (3.38)$$

Отметим, что при освещении аксикона с острой стороны его параметр всегда будет вещественным, но может превзойти единицу [107\*]:

$$p = n \cos \left( \alpha_0 + \arcsin(\cos \alpha_0 / n) \right). \quad (3.39)$$

Наличие в выражении (3.38) мнимой части соответствует появлению в функции пропускания экспоненциально затухающей амплитудной составляющей. Заметим, что геометро-оптическая модель является очень полезной для понимания хода лучей и направления распространения энергии. Однако проблематично получить общую картину распределения интенсивности и оценки размера формируемых пучков. В этом случае необходимо применять волновую теорию. Дальнейшее изложение основано на статье [129\*].

### 3.5.1 Анализ продольного распределения

При рассмотрении поля на оптической оси в условиях радиальной симметрии имеет место формула (3.4):

$$E(0, 0, z) = E_0(0)e^{ikz} - E_0(R)e^{ik\sqrt{R^2+z^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} + z \int_0^R E_0'(r) \frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} dr.$$

Рассмотрим дифракцию плоской волны, ограниченной круговой апертурой радиуса  $R$ , на аксиконе. Результаты существенно зависят от того, превышает параметр аксикона  $p$  предельную числовую апертуру для данной среды или нет. Для свободного пространства  $NA$ , соответствующая распространяющимся волнам, должна быть меньше единицы. Для  $p \geq 1$  в ближней зоне важную роль играют затухающие волны. Их влияние мы учтём далее.

#### Числовая апертура меньше предельной, $p < 1$

В [127\*] и §3.3 было получено следующее выражение для комплексного распределения на оптической оси при использовании пропускающего линейного аксикона ( $p < 1$ ):

$$\begin{aligned}
E(0,0,z) = & \exp(ikz) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \exp\left(ik\sqrt{R^2 + z^2} - ikpR\right) - \\
& -i\sqrt{2kz}p(1-p^2)^{-1/4} \exp\left(ikz\sqrt{1-p^2}\right) \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt - \\
& -ikpz \int_{r_0+\Delta}^R \frac{\exp\left(ik\sqrt{r^2 + z^2} - ikpr\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

где  $r_0 = pz / \sqrt{1-p^2}$ ,  $t_1 = -\sqrt{kz/2} p(1-p^2)^{1/4}$ ,  $t_2 = \Delta\sqrt{k/(2z)}(1-p^2)^{3/4}$ ,  
 $\Delta^2 = 2z^2(1-\sqrt{1-p^2})(1-p^2)^{-3/2}$ .

Последнее слагаемое в (3.40) соизмеримо с остальными (не считая первого) только при довольно малых  $z$ , поэтому в работе [127\*] и пункте 3.3 его вклад не учитывался. Теперь нам необходимо это сделать.

Если  $z$  мало, то в интеграле последнего слагаемого выражения (3.40) показатель экспоненты приближённо представим в виде линейной функции:

$$\int_{r_0+\Delta}^R \frac{\exp\left(ik\sqrt{r^2 + z^2} - ikpr\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr \approx \exp(ik\beta_0) \int_{r_0+\Delta}^R \frac{\exp(-ik\beta_1 r)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr. \tag{3.41}$$

Если выполнено одно из неравенств  $R > 1,5z$  или  $R > 2\pi/(k\beta_1)$ , то верхний предел в (3.41) можно заменить на бесконечный  $\int_{r_0+\Delta}^R () \approx \int_0^\infty () - \int_0^{r_0+\Delta} ()$ . Интеграл в бесконечных пределах является табличным [130]:

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-ik\beta_1 r)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr = K_0(k\beta_1 z) - i0,5\pi [I_0(k\beta_1 z) - L_0(k\beta_1 z)], \tag{3.42}$$

где  $K_0(x)$  – функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя 3 рода) нулевого порядка;  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя 1 рода нулевого порядка;  $L_0(x)$  – модифицированная функция Струве нулевого порядка. Второй интеграл можно, если ограничиться первым лепестком и заменить косинус и синус линейными приближениями, оценить в виде:

$$\int_0^{r_0+\Delta} \frac{\exp(-ik\beta_1 r)}{\sqrt{r^2+z^2}} dr \approx \int_0^{\pi/(2k\beta_1)} \frac{\exp(-ik\beta_1 r)}{\sqrt{r^2+z^2}} dr \approx$$

$$\approx \frac{2}{3} \ln \left( \frac{\pi}{2kz\beta_1} + \sqrt{\left( \frac{\pi}{2kz\beta_1} \right)^2 + 1} \right) - i \frac{2}{\pi} k\beta_1 \left( \sqrt{\left( \frac{\pi}{2k\beta_1} \right)^2 + z^2} - z \right). \quad (3.43)$$

Таким образом, если  $z$  мало, то с учётом поведения функций  $K_0; I_0; L_0$  при малом значении аргумента, (3.40) можно приближённо записать в виде:

$$E(0,0,z) \approx 1 - \frac{z}{R} \exp[ikR(1-p)] - ikpz \left( \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1-p^2}} - 2 + p} \right) +$$

$$+ ikpz \exp(ik\beta_0) \times \{0,571i + [0,647 + 0,33 \ln(k\beta_1 z)]\}. \quad (3.44)$$

Теоретически при очень малом  $z$  слагаемое, содержащее логарифм, должно давать заметный вклад. Попытаемся найти эту границу. Для этого проведём некоторые упрощения. Если  $R \sim 1/(3\pi p)$ , то в (3.44) можно опустить второе слагаемое; также учтём, что при  $p \rightarrow 1$  третье слагаемое неограниченно растёт, поэтому нас интересует область небольших  $p$ , когда в третьем слагаемом выражение в скобках можно заменить на  $2p$ . В итоге получим:

$$E(0,0,z) \approx 1 - 2ikp^2 z + ikpz \exp(ik\beta_0) \times \{0,571i + [0,647 + 0,33 \ln(k\beta_1 z)]\}. \quad (3.45)$$

Анализируя выражение (3.45), можно сказать с учётом его приближённости, что слагаемое с логарифмом начинает сказываться (но ещё не преобладать) только на довольно малых расстояниях  $z < 0,1\lambda$ . В то же время поправочное слагаемое (3.41) в целом при малом  $z$  имеет величину, близкую к основному слагаемому. Поясним это на примере. Значение  $\beta_1$  близко к единице: при  $z = e\lambda/(2\pi) \approx 0,43\lambda$  оно равно 1,131, а при  $z = \lambda/(2\pi) \approx 0,159\lambda$  – равно 0,863. Получаем, что при  $p < 1/2$  поправочное слагаемое больше основного (если основное взять без единицы).

Числовая апертура больше или равна предельной,  $p \geq 1$

Очевидно, что вычисления при  $p \geq 1$  существенно отличаются от описанных ранее, так как использование метода стационарной фазы невозможно в силу отсутствия стационарной точки. При использовании классического метода стационарной фазы пришлось бы сказать, что здесь на любом расстоянии  $z$  будет тень, хотя и не совсем ноль, т.к. в (3.4) имеются и внеинтегральные слагаемые. В геометро-оптическом подходе такой аксикон считается не пропускающим излучение.

В силу заметного отличия вида фазовой функции при  $p = 1$  и  $p > 1$  рассмотрим эти случаи отдельно. Хотя первый случай имеет меру нуль, он является хорошим приближением для ситуаций, когда  $p$  близко к единице.

#### Числовая апертура равна предельной, $p = 1$

Для  $p = 1$  формула (3.4) принимает следующий вид:

$$E(0,0,z) = \exp(ikz) - \frac{z \cdot \exp\left(ik\sqrt{R^2 + z^2} - ikR\right)}{\sqrt{R^2 + z^2}} - ikz \int_0^R \frac{\exp\left(ik\sqrt{r^2 + z^2} - ikr\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr. \quad (3.46)$$

Чтобы вычислить интеграл в (3.46), удобно разбить отрезок интегрирования на две части и на каждой сделать своё приближение фазовой функции. Деление производится в точке максимальной кривизны фазовой функции. Можно доказать, что поиск точки максимальной кривизны эквивалентен поиску точки графика функции  $r - \sqrt{r^2 + z^2}$ , ближайшей к началу координат. Квадрат расстояния равен  $3r^2 + z^2 - 2r\sqrt{r^2 + z^2}$ . Минимум этого выражения достигается при значении  $r$ , удовлетворяющем уравнению  $5r^4 + 5r^2z^2 - z^4 = 0$ , решение которого имеет следующий вид:

$$r_c^2 = \frac{z^2}{2} \left( \frac{3}{\sqrt{5}} - 1 \right) \Rightarrow r_c \approx 0,413z. \quad (3.47)$$

Если  $r_c \geq R$ , что выполняется при не очень малых  $z$ , то второго отрезка не будет. Для общности обозначим правый край первого отрезка  $r_p = \min(r_c, R)$ .

На первом отрезке функцию  $r - \sqrt{r^2 + z^2}$  приблизим параболой  $b_2 r^2 + b_1 r + b_0$ . Для нахождения коэффициентов используем коллокацию: приравняем значения функций на обоих концах отрезка и значения производных на левом конце. В результате получим:

$$b_0 = -z; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = \left( z - \sqrt{r_p^2 + z^2} \right) / r_p^2. \quad (3.48)$$

Если второй отрезок есть ( $r_p = r_c$ ), то  $b_2 \approx -0,48 / z$ . Подставив параболическое приближение в интеграл из (3.46), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{r_p} \frac{\exp(-ikr + ik\sqrt{r^2 + z^2})}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr &\approx \int_0^{r_p} \frac{\exp[-ik(b_2 r^2 + r - z)]}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr = \\ &= \exp\left[ ik\left( z + \frac{1}{2b_2} \right) \right] \int_0^{r_p} \frac{\exp[-ikb_2(r - r_0)^2]}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr, \quad r_0 = -1/(2b_2) = 1,042z. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Далее возможно применение метода стационарной фазы:

$$\begin{aligned} \int_0^{r_p} \frac{\exp(-ikr + ik\sqrt{r^2 + z^2})}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr &\approx \frac{\exp\left[ ik\left( z + \frac{1}{2b_2} \right) \right]}{\sqrt{-b_2} \sqrt{r^2 + z^2}} \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt, \\ t_1 &= -r_0 \sqrt{-b_2}, \quad t_2 = (r_{pr} - r_0) \sqrt{-b_2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Искусственно полученная стационарная точка  $r_0$  лежит за пределами отрезка интегрирования, поэтому интеграл (3.50) будет иметь малую величину.

На втором отрезке, если он есть, функцию  $r - \sqrt{r^2 + z^2}$  приблизим дробью  $-b_3 / (r + b_4)$ . Для нахождения коэффициентов можно использовать различные типы коллокации. Если приравнять значения функций на левом конце и асимптотическое поведение при большом  $r$ , то получится простое выражение для  $b_3 = z^2/2$ .

Метод стационарной фазы здесь неприменим, но можно использовать его некий аналог, пользуясь тем, что функция  $1/\sqrt{r^2 + z^2}$  на этом участке меняется сравнительно медленно и её можно заменить значением в средней точке. Тогда:

$$\int_{r_p}^R \frac{\exp\left(\frac{ikb_3}{r+b_4}\right)}{\sqrt{r^2+z^2}} dr \approx \frac{1}{\sqrt{r_s^2+z^2}} \int_{r_p}^R \exp\left(ik \frac{b_3}{r+b_4}\right) dr = \quad (3.51)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r_s^2+z^2}} \left\{ \exp\left(\frac{ikb_3}{R+b_4}\right)(R+b_4) - \exp\left(\frac{ikb_3}{r_p+b_4}\right)(r_p+b_4) + ikb_3 \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{ikb_3x}}{x} dx \right\},$$

где  $x_1 = 1/(R+b_4)$ ,  $x_2 = 1/(r_p+b_4)$ . Оставшийся в (3.51) интеграл тривиально выражается через интегральные синус и косинус.

Исходя из того, что функция  $r - \sqrt{r^2+z^2}$  при увеличении  $r$  стремится к нулю, что соответствует исчезновению осцилляций, можно сделать вывод, что, увеличивая  $R$ , мы будем иметь всё возрастающую амплитуду. К сожалению, приближение в (3.51) не показывает этого – амплитуда стремится к конечному постоянному значению.

Более грубая оценка получается проще при замене фазы нулём:

$$\left| \int_{r_p}^R \frac{\exp(ikb_3/(r+b_4))}{\sqrt{r^2+z^2}} dr \right| < \int_{r_p}^R \frac{dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \ln\left(R + \sqrt{R^2+z^2}\right) - \ln\left(r_p + \sqrt{r_p^2+z^2}\right). \quad (3.52)$$

Оценка (3.52) будет более точной, если нижний предел заменить на такое значение, которое соответствует началу последнего лепестка, но на зависимость от  $R$  это влияния не оказывает. Как видно из (3.52), рост амплитуды намного слабее, чем в случае параболической линзы в приближении Френеля [113\*], где он был пропорционален  $R^2$ , но там сама величина  $R$  была ограничена в силу требования параксиальности.

### Числовая апертура больше предельной, $p > 1$

Выражение (3.4) в этом случае принимает следующий вид:

$$E(0,0,z) = \exp(ikz) - \frac{z \cdot e^{ik\sqrt{R^2+z^2} - ikpR}}{\sqrt{R^2+z^2}} - ikpz \cdot \int_0^R \frac{\exp\left(ik\sqrt{r^2+z^2} - ikpr\right)}{\sqrt{r^2+z^2}} dr \quad (3.53)$$

Заметим, что фазовая функция  $pr - \sqrt{r^2 + z^2}$  при  $p > 1$  имеет совсем иной внешний вид зависимости, чем было при  $p = 1$ . После деления отрезка интегрирования на две части можно выполнить аппроксимацию фазовой функции линейными функциями вида  $b_1 r + b_0$ . Деление производится так же, что и при  $p = 1$ : в точке графика функции  $pr - \sqrt{r^2 + z^2}$ , ближайшей к началу координат, хотя визуально она не очень выражена. Как и при  $p = 1$  она совпадает с точкой максимальной кривизны.

Найдём эту точку: квадрат расстояния от начала координат равен  $(2 + p^2)r^2 + z^2 - 2pr\sqrt{r^2 + z^2}$ . Минимум достигается при значении  $r$ , удовлетворяющем уравнению  $(4 + p^4)r^4 + (4 + p^4)r^2 z^2 - p^2 z^4 = 0$ , которое имеет корень  $r_c^2 = \frac{z^2}{2} \left[ \frac{2 + p^2}{\sqrt{4 + p^4}} - 1 \right]$ . При увеличении  $p$  выражение в квадратных скобках сначала возрастает до  $\sqrt{2} - 1$  при  $p = \sqrt{2}$ , а затем убывает до нуля.

Так же, как при  $p = 1$ , обозначим правый край первого отрезка  $r_p = \min(r_c, R)$ . Подставив в интеграл из (3.53) приближение фазовой функции, получим:

$$\int_0^{r_p} \frac{\exp\left(ik\sqrt{r^2 + z^2} - ikpr\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr \approx \exp(-ikb_0) \int_0^{r_p} \frac{\exp(-ikb_1 r)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr. \quad (3.54)$$

Если  $r_p$  хотя бы в 2-3 раза превышает  $\pi / (kb_1)$ , то верхний предел можно заменить бесконечным, что позволит использовать справочные выражения. Учитывая, что величина  $b_1$  близка к  $p$  (обычно немного меньше) и используя выражение для  $r_c^2$ , при среднем коэффициенте 2,5 получим, что замена возможна, если  $z > \frac{2,5\sqrt{2}}{2p\sqrt{(2 + p^2)/\sqrt{4 + p^4} - 1}} \cdot \lambda$ . В частном случае при  $p = 1,2$

имеем  $z > 2,34\lambda$ , а при увеличении  $p$  в пределе получим  $z > 1,25\lambda$ . Разделив

вещественную и мнимую часть, после использования табличных формул [130] получим ответ:

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-ikb_1 r)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr = K_0(kb_1 z) - i \frac{\pi}{2} [I_0(kb_1 z) - L_0(kb_1 z)]. \quad (3.55)$$

Вычисление интеграла по второму отрезку можно выполнить аналогично (заменить предел на бесконечный и вычесть интеграл по первому отрезку от функции для второго отрезка) только при достаточно большом радиусе  $R$ . Это значение заметно больше, чем требуется для бесконечного предела. Дело в том, что первый отрезок не вмещает приблизительно целое число периодов с параметрами второго отрезка. Поэтому в левой части формулы, аналогичной (3.55), под корнем будет не  $r^2$ , а  $(r - r_{sd})^2$ , а такой формулы нет в справочнике. При большом же радиусе этот эффект можно игнорировать.

Полученные формулы показывают, что при больших  $z$  амплитуда убывает экспоненциально, и это не противоречит априорно известному убыванию амплитуды как  $z^{-1}$ , так как такое убывание обеспечивают первые два слагаемых в (3.40).

Если применить формулу (3.55) невозможно, то всё же есть способ вычислить интеграл из (3.53). Он требует больше вычислений, чем обычно требуют приближённо-аналитические методы; но при небольших  $z$  и  $R$  проигрыш невелик. Его отличие в том, что фазовая функция в (3.53) на начальном шаге сохраняется в исходном виде без аппроксимации. Опишем этот способ.

### Шаг 1.

Преобразуем экспоненту в (3.53) следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp\left(ik\sqrt{r^2 + z^2} - ikpr\right) &= e^{ikz} \exp\left(-ik\left[pr + z - \sqrt{r^2 + z^2}\right]\right) = \\ &= e^{ikz} (\cos(kf_2(r)) - i \sin(kf_2(r))). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Такое представление удобно тем, что даёт одинаковую фазу  $f_2(r=0) = 0$  независимо от  $z$  и тем, что появляется такой же фазовый множитель  $e^{ikz}$ , как у первого слагаемого в (3.53); второе удобство проявится ниже. После этого находим границы лепестков (нули) у косинуса и синуса.

Нули косинуса:

$$r_m^c = \frac{\sqrt{(p^2 - 1)z^2 + z_m^2} - pz_m}{p^2 - 1}; \quad z_m = z - \pi(m + 0,5) / k; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.57)$$

Нули синуса  $r_m^s$  вычисляются по той же формуле, но меняется  $z_m = z - \pi m / k; m = 1, 2, \dots$ . Если подставить значения  $z_m$  и обозначить  $z = \beta\lambda$ , то получим «безразмерные» границы лепестков:

$$\frac{r_m^c}{\lambda} = \frac{\sqrt{p^2\beta^2 - \beta(m + 0,5) + \frac{(m + 0,5)^2}{4}} - p\beta + 0,5p(m + 0,5)}{p^2 - 1}, \quad (3.58)$$

$$\frac{r_m^s}{\lambda} = \frac{\sqrt{p^2\beta^2 - \beta m + m^2 / 4} - p\beta + 0,5pm}{p^2 - 1}.$$

### Шаг 2.

После того как границы лепестков найдены, первый лепесток аппроксимируется параболой. А именно: первый лепесток косинуса (от 0 до  $r_0^c$  – строго говоря, это полу-лепесток) приближаем кривой  $1 - (r / r_0^c)^2$ . При малом  $z$  первый лепесток синуса (от 0 до  $r_1^s$ ) заметно несимметричен относительно максимума, поэтому левая и правая половины лепестка аппроксимируются отдельно: левый кривой  $1 - ((r - r_0^c) / r_0^c)^2$ , а правый кривой  $1 - ((r - r_0^c) / (r_1^s - r_0^c))^2$ . При не очень малом  $z$  первый лепесток синуса становится примерно симметричен, поэтому его можно приблизить единой кривой  $1 - ((r - 0,5r_1^s) / 0,5r_1^s)^2$ . Остальные лепестки приближаются лепестками обычной симметричной синусоиды. Поэтому площадь всех лепестков, кроме первого, приближённо вычисляются следующим образом:

$$S_n = (-1)^{n-1} \int_{r_{n-1}}^{r_n} \frac{\cos(\pi r / (r_n - r_{n-1}))}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr \approx$$

$$\approx \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{((r_{n-1} + r_n) / 2)^2 + z^2}} \int_{r_{n-1}}^{r_n} \cos\left(\frac{\pi r}{r_n - r_{n-1}}\right) dr = \frac{2(-1)^{n-1}}{\sqrt{((r_{n-1} + r_n) / 2)^2 + z^2}} \cdot \frac{r_n - r_{n-1}}{\pi}. \quad (3.59)$$

Если последний лепесток не является приближённо полным, то в данном выражении множитель 2 заменится на  $1 - \cos \theta$ , где угол  $\theta$  получаем из пропорции:  $r_n - r_{n-1}$  соответствуют 180 градусам, а  $R - r_{n-1}$  соответствуют  $\theta$ . Если  $z$  мало, то можно положить  $z = 0$ .

### Шаг 3.

При вычислении площади первого лепестка знаменатель сохраняется в исходном виде и используются формулы для интегралов

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad \int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{2} r \sqrt{r^2 + z^2} - \frac{z^2}{2} \ln \left( r + \sqrt{r^2 + z^2} \right).$$

Если  $z$  мало, то можно использовать следующие приближения. Первый лепесток косинуса имеет площадь  $\ln(2r_0^c / z) - 0,5$ , левая половина лепестка синуса имеет площадь  $1,5 - (2z / r_0^c)$ .

### **3.5.2 Анализ поперечного распределения**

В данном пункте рассмотрим поперечное распределение комплексной амплитуды. Для этого перепишем (3.1) в полярных координатах:

$$E(\rho, \theta, z) = -\frac{z}{2\pi} \iint_{\Sigma_1} E_0(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \frac{\exp(ik\ell)}{\ell^2} \left( ik - \frac{1}{\ell} \right) r dr d\varphi, \quad (3.60)$$

где  $\ell^2 = \rho^2 + r^2 + z^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)$ . Пусть входное поле радиально-симметрично, тогда полярный угол в подынтегральном выражении будет только под знаком косинуса; поэтому интеграл по полному периоду не зависит от сдвига угла  $\theta$ . То есть выходное поле будет тоже радиально-симметрично и при вычислениях можно положить  $\theta = 0$ :

$$E(\rho, z) = -\frac{z}{2\pi} \int_0^\infty E_0(r) r dr \int_0^{2\pi} \frac{\exp(ik\ell)}{\ell^2} \left( ik - \frac{1}{\ell} \right) d\varphi. \quad (3.61)$$

Ограничимся распределением вблизи оптической оси, что позволит сделать упрощения: в выражении для  $\ell$  положим  $\rho = 0$ , кроме показателя экспо-

ненты, где разложим  $\ell$  по степеням  $\rho$ , ограничившись двумя слагаемыми ( $\ell \approx \sqrt{r^2 + z^2} - \rho r \cos \varphi / \sqrt{r^2 + z^2}$ ). В этом случае интегрирование по полярному углу производится аналитически, а результат будет следующим:

$$E(\rho, z) \approx -z \int_0^{\infty} E_0(r) \left( ik - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \frac{r}{r^2 + z^2} \exp\left( ik\sqrt{r^2 + z^2} \right) J_0\left( \frac{k\rho r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) dr. \quad (3.62)$$

Для получения хотя бы начального приближения используем классический метод стационарной фазы. Тогда зависимость от поперечной координаты будет только в функции Бесселя, что позволит легко найти радиусы нескольких первых колец.

В случае аксикона  $E_0(r) = \exp(-ikpr)$ , ограничиваясь случаем апертуры меньше предельной, находим стационарную точку  $r_s = pz / \sqrt{1 - p^2}$ . В результате получаем, что  $E(\rho, z) \sim J_0(kpr)$ , то есть получаем пучок Бесселя, масштаб которого зависит от числовой апертуры.

### 3.5.3 Численный расчет на основе интеграла Рэлея-Зоммерфельда

В данном разделе приведены результаты моделирования дифракции ограниченной плоской волны на аксиконе с помощью численного интегрирования по формуле (3.4). Параметры расчёта: длина волны  $\lambda = 0,532$  мкм, радиус ограничивающей апертуры  $R = 2,5$  мкм.

На рисунке 3.5 показано распределение интенсивности вдоль оптической оси для аксиконов с различными числовыми апертурами.

Как видно из рисунка 3.5а, с увеличением числовой апертуры до предельной  $NA = 1$  происходит постепенное уменьшение концентрации энергии на оптической оси. Это значит, что энергия уходит во внеосевую область. В случае, когда числовая апертура становится больше предельной ( $NA = 1,2$ ) (рисунок 3.5б) энергия практически перестает проходить через оптический

элемент, однако явно становится заметным вклад затухающих волн на расстоянии менее длины волны.

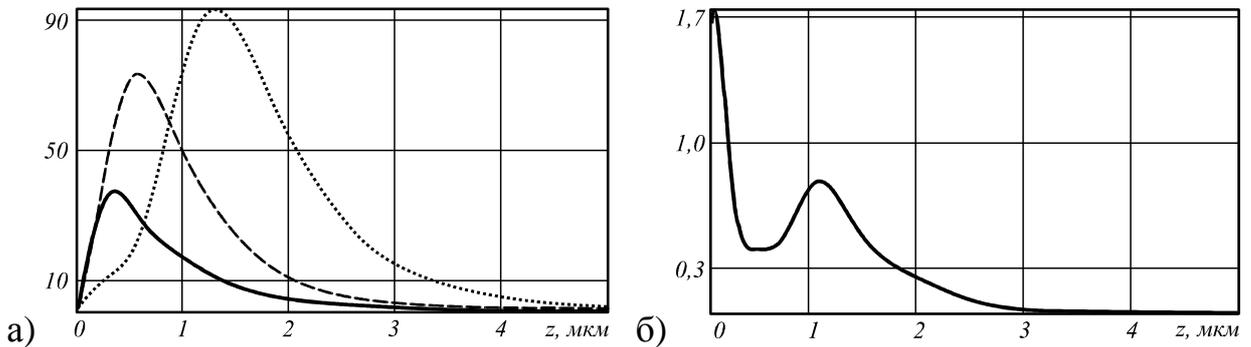


Рисунок 3.5 – Осевое распределение интенсивности для аксиконов с числовыми апертурами  $NA=0,7$  (точечная линия),  $NA=0,9$  (пунктирная линия),  $NA=1$  (сплошная линия) (а) и  $NA=1,2$  (б)

Вид графика на рисунке 3.5б можно, по крайней мере, качественно, объяснить при помощи рассуждений из конца пункта 3.5.1. Если в формуле (3.53) опустить второе слагаемое, подставить выражение интеграла через площади лепестков, положить  $p = 1,2$  и  $z = \beta\lambda$ , то без учёта фазового множителя  $e^{ikz}$  получим выражение:

$$E_1(0,0,z) \approx 1 - i \cdot 7,54\beta(S_{\cos} - iS_{\sin}) = (1 - 7,54\beta S_{\sin}) - i \cdot 7,54\beta S_{\cos}. \quad (3.63)$$

Производя вычисление площадей лепестков, как указано выше, можно найти местоположение всех экстремумов. Даже не делая слишком частый перебор значений  $\beta$ , можно обнаружить экстремумы, хотя и не так точно, как при прямом вычислении по квадратурным формулам. Но в отличие от квадратур, можно произвести доказательство наличия экстремумов.

При очень малом  $\beta$  первый лепесток превалирует над всеми остальными, причём его площадь с ростом  $\beta$  убывает (это очевидно геометрически и следует из приближений для площади первых лепестков). Мы получаем произведение  $\beta$  на убывающую функцию, что означает наличие максимума. Вычисляя площади всех лепестков, получим значение максимума 1,758, которое соответствует  $z = 0,12\lambda$ . Рассчитанное на основе численного интегрирования

значение получилось  $0,24\lambda$ , что в 2 раза больше приведенной оценки (само значение максимума вычислено намного точнее).

С увеличением  $\beta$  площади всех лепестков, очевидно, убывают, но убывание тем быстрее, чем меньше номер лепестка. Поэтому настанут моменты, когда площади обратятся в нуль. Нуль площади косинусов даёт нуль мнимой части амплитуды, нуль вещественной части будет немного раньше, чем обратится в нуль площадь синусов (смотри формулу (3.63)). В этой области получится минимум. Он получается в области  $0,35\lambda \leq z \leq 0,39\lambda$ . Далее площади становятся отрицательными, но их модуль на некотором участке будет расти, поэтому начнёт расти и амплитуда.

В то же время из (3.55) и наглядных соображений следует, что при больших  $z$  амплитуда монотонно убывает к нулю, поэтому неизбежно должен быть и второй максимум. Отметим, что в области применимости (3.55), опускать второе слагаемое в (3.53) нужно с осторожностью.

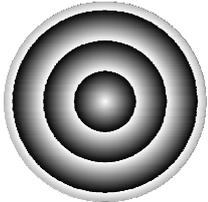
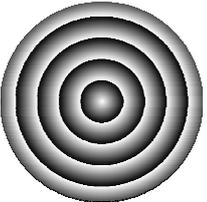
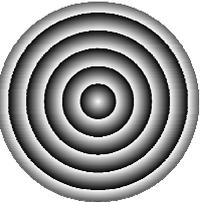
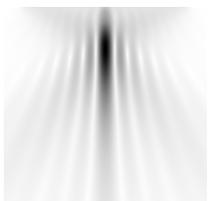
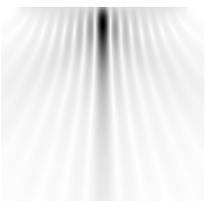
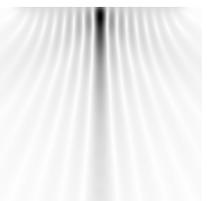
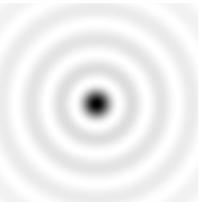
Таким образом, методика, предложенная в пункте 3.5.1 для аксикона с числовой апертурой выше предельной, позволяет качественно предсказывать поведение интенсивности вдоль оптической оси.

Структура внеосевого распределения показана в таблице 3.3. Также в ней показаны распределения интенсивности в поперечной плоскости с максимальной интенсивностью и приведены полученные численно размеры центрального пятна (в скобках - теоретические). Видно, что с увеличением числовой апертуры размер центрального светового пятна уменьшается, вплоть до достижения предельного значения  $\text{FWHM} = 0,2 \text{ мкм} = 0,37\lambda$ .

Оценки, полученные в пункте 3.5.2, предсказывают радиус центрального пятна  $\rho_0 = \frac{2,4}{kp} = \frac{0,203}{p} \text{ мкм}$ , что согласуется с результатами численных расчетов вплоть до  $p=1$ . При  $p>1$  полученные теоретические оценки следует применять с осторожностью, так как при их выводе предполагалось  $p<1$  (смотри конец пункта 3.5.2).

Дальнейшее увеличение числовой апертуры не приводит к уменьшению размера светового пятна. Аналогичный результат был получен в [107\*].

Таблица 3.3. Результаты моделирования дифракции ограниченной плоской волны на аксиконе с помощью интеграла Рэлея-Зоммерфельда (3.4)

	$p=0,7$	$p=0,9$	$p=1$	$p=1,2$
Вид фазы аксикона				
Распределение амплитуды в продольной плоскости $z \in [0,1 \text{ мкм}, 5 \text{ мкм}]$ $x \in [-3 \text{ мкм}, 3 \text{ мкм}]$				
Распределение интенсивности в поперечной плоскости с максимальной интенсивностью $x, y \in [-1 \text{ мкм}, 1 \text{ мкм}]$	 $z = 1,3 \text{ мкм}$ FWHM = 0,26 мкм $\rho_0 = 0,27(0,29) \text{ мкм}$	 $z = 0,6 \text{ мкм}$ FWHM = 0,21 мкм $\rho_0 = 0,22(0,226) \text{ мкм}$	 $z = 0,37 \text{ мкм}$ FWHM = 0,2 мкм $\rho_0 = 0,21(0,203) \text{ мкм}$	 $z = 1,1 \text{ мкм}$ FWHM = 0,21 мкм $\rho_0 = 0,22(0,169) \text{ мкм}$

Заметим, что использование скалярной волновой модели в ближней зоне дифракции правомерно только для одной из поперечных компонент электрического поля. Причём с увеличением числовой апертуры роль продольной компоненты электрического поля становится очень важной, её вклад может превышать вклад поперечных компонент [131], хотя для однородно-поляризованного излучения, не имеющего фазовой сингулярности, энергия продольной компоненты электрического поля концентрируется вне оси.

Известны ситуации [132-134], когда вещество или устройство является чувствительным только к поперечным или продольной компонентам элек-

трического поля. Таким образом, полученные аналитические оценки становятся актуальны не только для отдельных компонент, но и картины в целом.

### 3.6 Фраксикон ( $1 < \gamma \leq 2$ )

Продолжим рассмотрение разных диапазонов значений параметра  $\gamma$ . Так как и свойства функции, описывающей образующую оптического элемента или (в дифракционной реализации) набег фазы; и внешний вид рефракционного элемента заметно отличаются, можно ожидать и другого воздействия элемента на падающее поле.

В работе [104\*] на основе геометро-оптического анализа было показано, что фраксикон формально позволяет получать бесконечно большое значение интенсивности на оптической оси. В рамках волновой параксиальной модели такого эффекта каустики обнаружено не было [86\*]. В данном параграфе рассматривается действие фраксикона как переходного элемента между параболической линзой и аксиконом. В своей основе изложение следует [135\*].

#### 3.6.1 Осевое распределение при освещении фраксикона плоской волной

В данном диапазоне в основном сохраняются все соотношения из пункта 3.1, за исключением некоторых описываемых здесь частных случаев.

##### Распределение в освещенной части оптической оси.

Из выражения (3.13) можно получить неявную функцию зависимости стационарной точки от расстояния. Функция  $z(r_0)$  имеет вид:

$$z^2 = \frac{k^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} r_0^{4-2\gamma} - r_0^2. \quad (3.64)$$

Учитывая, что  $0 < 4 - 2\gamma < 2$ , степень первого слагаемого меньше, чем у второго, но является положительной, поэтому ситуация будет существенно иной, чем для  $0 < \gamma < 1$  (смотри пункт 3.2 и [127\*]). Вид функции (3.64) при различных значениях параметра  $\gamma$  показан на рисунке 3.6.

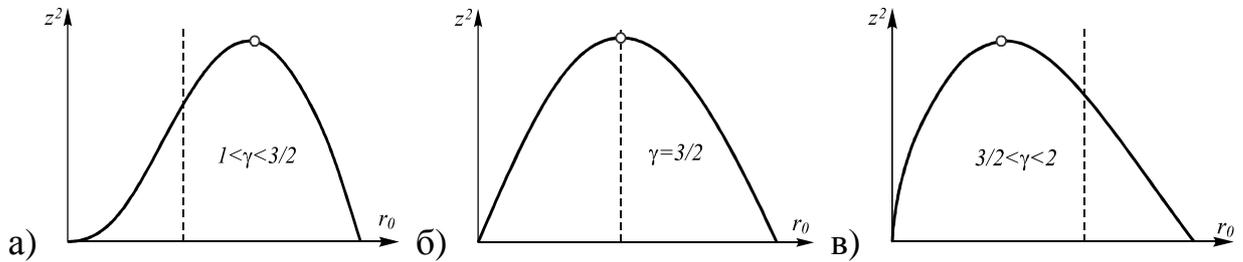


Рисунок 3.6 – Функция зависимости стационарной точки  $r_0$  и расстояния  $z$

При заданном  $z$  может быть 0, 1 или 2 стационарные точки. Наибольшее значение  $z$ , при котором есть стационарная точка, равно

$$z_{\max}^2 = \frac{1}{k^2} \cdot \left( \frac{2-\gamma}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} \right)^{1/(\gamma-1)} \cdot \frac{\gamma-1}{2-\gamma}. \quad (3.65)$$

Это левая граница тени, и её природа отличается от подобной границы для диапазона  $0 < \gamma < 1$ . Там тень получалась из-за наличия ограничивающего зрачка (и в формулу для границы входил его радиус). Здесь же тень является естественной, а её появление соответствует полному отражению в геометро-оптическом рассмотрении [104\*].

Одновременно  $z_{\max}$  является таким расстоянием, при приближении к которому слева две стационарные точки сливаются в одну, что на графике (рисунок 3.7) даёт почти горизонтальный отрезок. При формальном применении классического метода стационарной фазы на границе тени слева получается бесконечная амплитуда (так как  $f''(r_0) = 0$ ), а справа – нуль. Модифицированный метод стационарной фазы формально также даст бесконечное значение. Ниже на основе более точного анализа вычислено корректное значение.

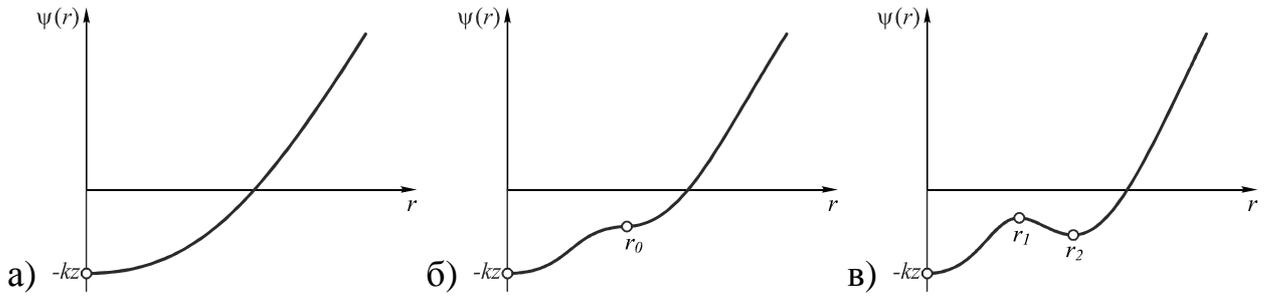


Рисунок 3.7 – Вид фазовой функции при различном числе стационарных точек

Этот эффект аналогичен появлению бесконечной интенсивности при геометро-оптическом рассмотрении фраксикона [104\*]. Отметим, что в рамках параксиального приближения такого эффекта не ожидается и не наблюдается [86\*]. Назовём точку, лежащую на расстоянии (3.65) от элемента, точкой фокуса. Соответствующее значение стационарной точки

$$r_{0,\max} = \frac{1}{k} \left( \frac{2-\gamma}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} \right)^{1/(2\gamma-2)} = z_{\max} \sqrt{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}. \quad (3.66)$$

Подкоренное выражение в (3.66) меньше 1 при  $\gamma > 3/2$ , и больше или равно 1 в противном случае. Чтобы фокус наблюдался, эта точка должна попасть внутрь зрачка:  $R > r_{0,\max}$ , то есть угол, под которым из фокуса виден зрачок, будет удовлетворять неравенству  $\operatorname{tg} \beta = R / z_{\max} > r_{0,\max} / z_{\max} = \sqrt{(2-\gamma)/(\gamma-1)}$ . В частности, при  $\gamma = 3/2$  угол должен быть больше  $45^\circ$ .

Вернёмся к вопросу о значении амплитуды в фокусе. На самом деле бесконечности нет, надо только учесть обычно отбрасываемое следующее слагаемое ряда Тейлора для фазы (3.11):  $\psi(r) \approx \psi(r_0) + \psi'''(r_0)(r-r_0)^3/6$ .

Для уяснения свойств фраксикона в данном диапазоне рассмотрим конкретное значение  $\gamma = 3/2$  (общий случай будет рассмотрен ниже), при котором уравнение (3.64) разрешимо относительно  $r_0$  алгебраически. При подстановке  $\gamma = 3/2$  в (3.64) получится уравнение

$$z^2 = \frac{4r_0}{9k\alpha_0^3} - r_0^2. \quad (3.67)$$

В этом случае кривая на рисунке 3.6 станет симметричной относительно вершины (параболой). Полученное уравнение имеет решение

$$r_0 = \frac{2}{9k\alpha_0^3} \pm \sqrt{\frac{4}{81k^2\alpha_0^6} - z^2}. \quad (3.68)$$

Фокус расположен в точке  $z_m = 2/(9k\alpha_0^3)$ , и ему соответствует стационарная точка  $r_{0m}$  с таким же значением (это следует и из равенства (3.66)). В дальнейшем используются значения для фазовой функции в этой точке:

$$\Psi(r_{0,\max}) = -\frac{4\sqrt{2}}{27\alpha_0^3}; \quad \Psi'''(r_{0,\max}) = \frac{81}{8\sqrt{2}}k^3\alpha_0^6. \quad (3.69)$$

Оценим размер  $2\Delta r$  «почти горизонтального» отрезка фазовой функции (рисунок 3.7). Исходя из того, что фаза на нём меняется не более чем на  $\pi$  (более точно:  $\Psi(r_{0,\max} \pm \Delta r) = \Psi(r_{0,\max}) \pm \pi/2$ ) и формулы для фазы находим, что (модуль не пишем, так как третья производная положительна)

$$\Delta r = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{\Psi'''(r_{0,\max})}}. \quad (3.70)$$

В первом приближении вычисления амплитуды примем фазу на этом отрезке постоянной, а остальную часть интервала учитывать не будем:

$$\begin{aligned} \int_0^R A(r)e^{i\Psi(r)} dr &\approx 2A(r_{0,\max})e^{i\Psi(r_{0,\max})}\Delta r = \\ &= 2A(r_{0,\max})e^{i\Psi(r_{0,\max})}\sqrt[3]{\frac{3\pi}{\Psi'''(r_{0,\max})}} \approx \frac{4,22A(r_{0,\max})e^{i\Psi(r_{0,\max})}}{\sqrt[3]{\Psi'''(r_{0,\max})}}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Более точное решение, причём для любого  $1 < \gamma < 2$ , получится, если действовать аналогично классическому методу стационарной фазы, т.е. расширять пределы до бесконечных:

$$\begin{aligned}
\int_0^R A(r) e^{i\Psi(r)} dr &\approx A(r_{0,\max}) e^{i\Psi(r_{0,\max})} \int_0^R e^{i\Psi'''(r_{0,\max})(r-r_{0,\max})^3/6} dr \approx \\
&\approx A(r_{0,\max}) e^{i\Psi(r_{0,\max})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Psi'''(r_{0,\max})x^3/6} dx = \\
&= A(r_{0,\max}) e^{i\Psi(r_{0,\max})} \sqrt[3]{\frac{6}{\Psi'''(r_{0,\max})}} \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^{2/3}} dt \approx \frac{2,81 A(r_{0,\max}) e^{i\Psi(r_{0,\max})}}{\sqrt[3]{\Psi'''(r_{0,\max})}}.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Последнее равенство в (3.72) получено с учётом равенства

$$\int_0^{\infty} t^{-2/3} \cos t dt = \sqrt{3} \Gamma(1/3) / 2 \quad [130].$$

Таким образом, результат (3.71), очевидно, является приближением с избытком. (Можно уточнить формулу (3.72), если сохранить конечные пределы; в этом случае ответ выражается через спиральные функции с параметром  $2/3$ ).

За пределами окрестности фокуса – если две стационарных точки  $r_{01}$  и  $r_{02}$  не слишком близки, то для каждой точки по отдельности можно использовать общую формулу (3.8) с учётом, что знаки второй производной в стационарных точках противоположны. Пределы интегрирования у слагаемых будут  $[0; (r_{01} + r_{02}) / 2]$  и  $[(r_{01} + r_{02}) / 2; R]$ .

Найдём критерий близости стационарных точек. Будем считать, что стационарные точки близки, если перекрываются их окрестности малого изменения фазы:  $r_{01} + \Delta r_1 > r_{02} - \Delta r_2$ . Рассуждая подобно выводу формулы (3.70), получим, что  $\Delta r_{1,2} = \sqrt{\pi / |\Psi''(r_{01,2})|}$ . Если же корни близки, то для соблюдения непрерывности при переходе к точке фокуса возьмём взвешенную сумму результата по формуле (3.8) и результата по формуле (3.71) или (3.72). Вес первого слагаемого возьмём равным  $(r_{02} - r_{01}) / (\Delta r_1 + \Delta r_2)$ , а второй вес будет дополнением до единицы.

Для  $\gamma = 3/2$  мы можем получить явные количественные результаты. Длина прямолинейного участка по (3.70) равна  $\Delta r = (2 / 3k\alpha_0^2) \cdot \sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[6]{2}$ . Тогда в (3.71) получим:

$$\int_0^R A(r)e^{i\psi(r)} dr \approx \frac{4\sqrt[3]{\pi^6} \sqrt{2}}{3k\alpha_0^2} A(r_{0,\max}) e^{i\psi(r_{0,\max})}. \quad (3.73)$$

Соответственно, (3.72) превратится в

$$\int_0^R A(r)e^{i\psi(r)} dr \approx \frac{2\Gamma(1/3)\sqrt{6}}{9k\alpha_0^2} A(r_{0,\max}) e^{i\psi(r_{0,\max})}. \quad (3.74)$$

Стационарные точки будут считаться близкими (смотри условие выше), если выполнено неравенство  $\Delta z < \frac{\sqrt[3]{2\pi^2/9}}{k\alpha_0}$ . Оно получено в предположении,

что  $\Delta z/z_{\max}$  мало, что эквивалентно требованию, чтобы была мала величина  $\alpha_0^2 \cdot \sqrt[3]{81\pi^2/4} \approx 5,847\alpha_0^2$ .

Выясним, насколько больше будет амплитуда в точке фокуса по сравнению с амплитудой на границе области близости стационарных точек. Не учитывая в (3.6) внеинтегральных слагаемых и считая множители при интеграле примерно равными, мы можем сравнить только значения интегралов. Значение в точке фокуса дано формулой (3.74). Значение на границе, очевидно, равно сумме вкладов обеих стационарных точек. Пользуясь тем, что на границе области точка  $r_{0,\max}$  лежит посередине между стационарными точками, можно доказать, что при предположениях из неравенства для  $\Delta z$ , множители  $A(r)e^{i\psi(r)}\sqrt{2/|\psi''(r)|}$  в результирующем выражении при использовании метода стационарной фазы можно считать одинаковыми. При этом множители без производной берутся в точке  $r_{0,\max}$ , а вторые производные – в самих стационарных точках. Они равны по модулю, но противоположны по знаку:

$$\psi''(r_{02}) \approx -\psi''(r_{01}) \approx \frac{27k^2\alpha_0^{9/2}}{4\sqrt{2}}\sqrt{k\Delta z}. \text{ Заметим, что равенство приближённое,}$$

так как фазовая функция в отличие от кривой (3.64) не становится симметричной относительно точки  $r_{0,\max}$ .

Для оценки используем классический метод стационарной фазы. Из-за разных знаков второй производной общий вклад двух стационарных точек

будет не в два, а только в  $\sqrt{2}$  раза больше, чем одной точки. Если учесть, что на границе области неравенство для  $\Delta z$  превращается в равенство, значение интеграла равно

$$\int_0^R A(r) e^{i\Psi(r)} dr \approx \frac{2\sqrt[3]{4\pi/3}}{3k\alpha_0^2} A(r_{0,\max}) e^{i\Psi(r_{0,\max})}. \quad (3.75)$$

Поделив величины из (3.74) и (3.75), получим, что амплитуда в точке фокуса превышает амплитуду на границе области близости в  $\Gamma(1/3) / (\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[6]{6}) \approx 1,357$  раза. Таким образом, пик в фокусе не очень острый.

Для других значений  $\gamma$  из данного диапазона принципиально ничего не меняется, кроме, может быть, участков вблизи 1 или 2. Существенным качественным отличием, хотя количественно оно, возможно, не очень велико, будет отсутствие симметрии стационарных точек относительно позиции, соответствующей фокусу.

#### Распределение в области тени.

Рассмотрим теперь вычисления в области естественной тени, когда  $z > z_{\max}$ . Это более сложная задача по сравнению с тенью от наличия входного зрачка. В случае тени от зрачка можно использовать модифицированный метод стационарной фазы, который, в отличие от классического, не требует нахождения стационарной точки внутри отрезка интегрирования. Правда, точность приближения будет падать при продвижении вглубь области тени. В рассматриваемом случае в тени стационарной точки нет, но она есть вне области тени, в отличие от  $\gamma = 1$ ,  $\alpha_0 \geq 1$ , где её нет ни в какой ситуации. Поэтому желательно при вычислениях сохранить непрерывность перехода.

Самым простым способом, который должен работать вблизи границы тени, является формальная подстановка в выражение (3.8) невещественного значения  $r_0$ . Вид формулы при этом не изменится, но будет нельзя считать, что множитель  $e^{i\Psi(r_0)}$  равен по модулю единице. Если не заходить в область тени слишком далеко, то задача упрощается: в окрестности максимума кри-

вую (3.64) приближаем параболой, что позволит получить явную, хотя и приближённую формулу, аналогичную (3.68), при произвольном  $\gamma$ .

Можно показать, что при надлежащем выборе знака мнимой части при извлечении корня, амплитуда в теневой области (без учёта внеинтегральных слагаемых) убывает экспоненциально с ростом расстояния от границы тени. Это соотношение аналогично случаю  $\gamma = 1$ ,  $\alpha_0 > 1$  [129\*].

### 3.6.2 Распределение на оси при освещении плоской волной параболической линзы

Для данного частного случая функция ( $\gamma = 2$ )  $z(r_0)$  имеет вид:

$$z^2 = \frac{1}{4k^2\alpha_0^4} - r_0^2. \quad (3.76)$$

Графиком является парабола с вершиной на оси  $r_0 = 0$  (рисунок 3.8).

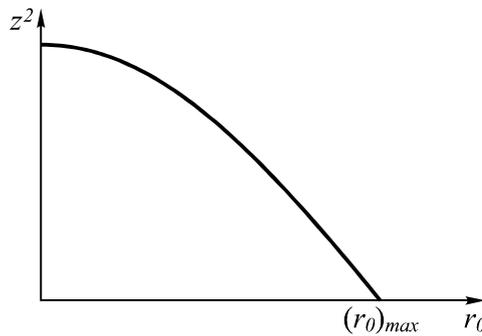


Рисунок 3.8 – Функция зависимости стационарной точки  $r_0$  и расстояния  $z$

При заданном  $z$  может быть одна или ни одной стационарной точки. Явное решение даётся выражением

$$r_0 = \sqrt{\frac{1}{4k^2\alpha_0^4} - z^2}. \quad (3.77)$$

Максимальное значение равно  $r_{0,max} = 1/(2k\alpha_0^2)$ . Если радиус входного зрачка  $R$  меньше этой величины, то появится область тени вблизи оптического элемента. Так же, как в диапазоне  $1 < \gamma < 2$ , при любом радиусе  $R$  будет ес-

тественная тень в области  $z > z_{\max} = 1/(2k\alpha_0^2)$ . Граница тени соответствует кратному корню, вторая производная фазовой функции равна нулю, но, в отличие от диапазона  $1 < \gamma < 2$ , при применении метода стационарной фазы бесконечной амплитуды не будет даже формально. Дело в том, что граница тени достигается при стационарной точке, равной нулю, и дробь сокращается. Дадим явные выражения с учётом того, что при  $\gamma = 2$  медленно меняющийся множитель равен  $r/\sqrt{r^2 + z^2}$ :

$$\left. \begin{aligned} \psi''(r_0) &= 2k^2\alpha_0^2(1 - 4k^2\alpha_0^4z^2) \\ A(r_0) &= r_0/\sqrt{r_0^2 + z^2} = r_0 \cdot 2k\alpha_0^2 = \sqrt{1 - 4k^2\alpha_0^4z^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{A(r_0)}{\sqrt{\psi''(r_0)}} = \quad (3.78)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k\alpha_0}} = \text{const}.$$

Подстановка в (3.8, 3.9) даёт следующий результат:

$$E(0, 0, z) = E_1(z) - 2ik\alpha_0z \exp[-i\psi(r_0)] \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt, \quad (3.79)$$

$$t_1 = -r_0\sqrt{|\psi''(r_0)|/2} \quad t_2 = (R - r_0)\sqrt{|\psi''(r_0)|/2}$$

Таким образом, при применении модифицированного метода стационарной фазы амплитуда в данной точке не только не будет формально бесконечной, но будет (без учёта внеинтегральных слагаемых) равна нулю, так как оба предела интегрирования будут равны нулю. Пренебрегая краевыми слагаемыми, получаем линейный рост амплитуды для линии узлов.

Если мы захотим найти более точное (не равное нулю) значение амплитуды вблизи «фокуса», то можно рассуждать, как в начале пункта 3.6.1. Отличие от данного пункта в том, что третья производная в точке  $r_0 = 0$  тоже равна нулю, поэтому придётся использовать четвёртую производную и фазу представлять в виде  $\psi(r) \approx \psi(r_0) + \psi^{IV}(r_0)(r - r_0)^4/24$ . Размер  $\Delta r$  «почти горизонтального» отрезка фазовой функции равен  $\Delta r = \sqrt[4]{\frac{12\pi}{f^{IV}(r_0)}} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k\alpha_0^{3/2}}$ .

Медленно меняющийся множитель  $r / \sqrt{r^2 + z^2}$  нельзя вынести за знак интеграла даже в первом приближении (получится нуль), но, как и в 3.6.1, примем фазу на этом отрезке постоянной, а остальную часть интервала интегрирования учитывать не будем:

$$\int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} e^{i\psi(r)} dr \approx \frac{e^{i\psi(r_0)}}{z_{\max}} \cdot \int_0^{\Delta r} r dr = e^{i\psi(r_0)} \sqrt{\pi/2} \cdot \frac{1}{k\alpha_0} \dots \quad (3.80)$$

В последнем равенстве подставлены явные выражения для  $z_{\max}$  и  $\Delta r$ . То есть вблизи границы тени имеем

$$E(0, 0, z) = E_1(z) - ik\sqrt{2\pi}\alpha_0 z \exp[-i\psi(r_0)]. \quad (3.81)$$

Последнее слагаемое в (3.81) оказалось не так уж мало, как мы ожидали – по модулю оно только в  $\sqrt{2}$  раза меньше, чем получилось бы по (3.79) в классическом методе стационарной фазы.

В области тени мы можем действовать так же, как в предыдущем пункте, подставляя незначительные значения  $r_0$ , тем более имеется явная формула (3.77). Вблизи границы тени это даст непрерывный переход. Если же идти далее вглубь области тени, то, начиная с некоторого места, в (3.79) основной вклад начнут давать внеинтегральные слагаемые.

### 3.6.3 Результаты численного моделирования

При численном моделировании выполнялось сравнение действия аксикона, фраксикона ( $\gamma = 1,5$ ) и параболической линзы для высоких значений числовой апертуры. Расчет выполнялся на основе численного интегрирования по формулам Рэлея-Зоммерфельда без приближений.

Значение параметра  $\alpha_0$  в каждом случае выбиралось в соответствии с заданной максимальной числовой апертурой оптического элемента  $NA_{\max}$ :

$$\alpha_0 = \left[ \frac{NA_{\max}}{\gamma(kR)^{\gamma-1}} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \gamma \geq 1, \text{ где } R - \text{ радиус оптического элемента.}$$

Численное моделирование выполнялось при следующих расчетных параметрах:  $\lambda = 1$  мкм, максимальное значение числовой апертуры  $NA_{\max} = 0,95$ , радиус  $R = 10\lambda$ .

На рисунке 3.9 приведены результаты дифракции ограниченного плоского пучка на микроэлементах при различных значениях  $\gamma$ .

Как видно из рисунков 3.9а-в, частота кольцевых линий для аксикона равномерная, в то время как для фраксикона и линзы сгущается на периферии. Из пространственных спектров хорошо видно, что фраксикон занимает промежуточное положение между линзой, спектр которой почти равномерно распределен в диапазоне частот от нуля до 0,8, и аксиконом, спектр которого сосредоточен около частоты 0,95.

Из продольного распределения интенсивности видно, что в непараксиальном режиме возможна ситуация, когда фраксикон обеспечивает лучшую концентрацию энергии, чем линза (рисунок 3.9д). При этом в плоскости максимальной интенсивности размер фокального пятна оказывается меньше, чем у линзы (рисунок 3.9е): диаметр светового пятна линзы по уровню полуспада интенсивности для линзы равен  $0,62\lambda$  на расстоянии  $z = 8,25\lambda$ , для фраксикона –  $0,51\lambda$  на расстоянии  $z = 5,14\lambda$ , для аксикона –  $0,38\lambda$  на расстоянии  $z = 1,7\lambda$ .

Для параболической линзы в пункте 3.6.2 была получена оценка правой границы светового отрезка, которую можно считать фокусным расстоянием  $z_{\max} = 1/(2k\alpha_0^2)$ . Для рассмотренных параметров получается  $z_{\max} = 10,5\lambda$ , что на 27% больше полученной численно.

Для фраксикона можно воспользоваться формулой (3.65), из которой плоскость максимальной интенсивности предсказывается на расстоянии  $z_{\max} = 5,54\lambda$ , что на 8% больше полученной численно.

В работе [127\*] был рассмотрен аксикон в непараксиальном случае и получено выражение для границы светового отрезка, которое совпало с известной формулой длины формируемого аксиконом светового отрезка [3]  $z_{\max} = R\sqrt{1-\alpha_0^2}/\alpha_0$ . Используя эту формулу, можно примерно определить расстояние максимума интенсивности, которое для рассмотренных параметров равно  $z_{\max} = 3,28\lambda$ , что почти в 2 раза больше, чем полученное численно.

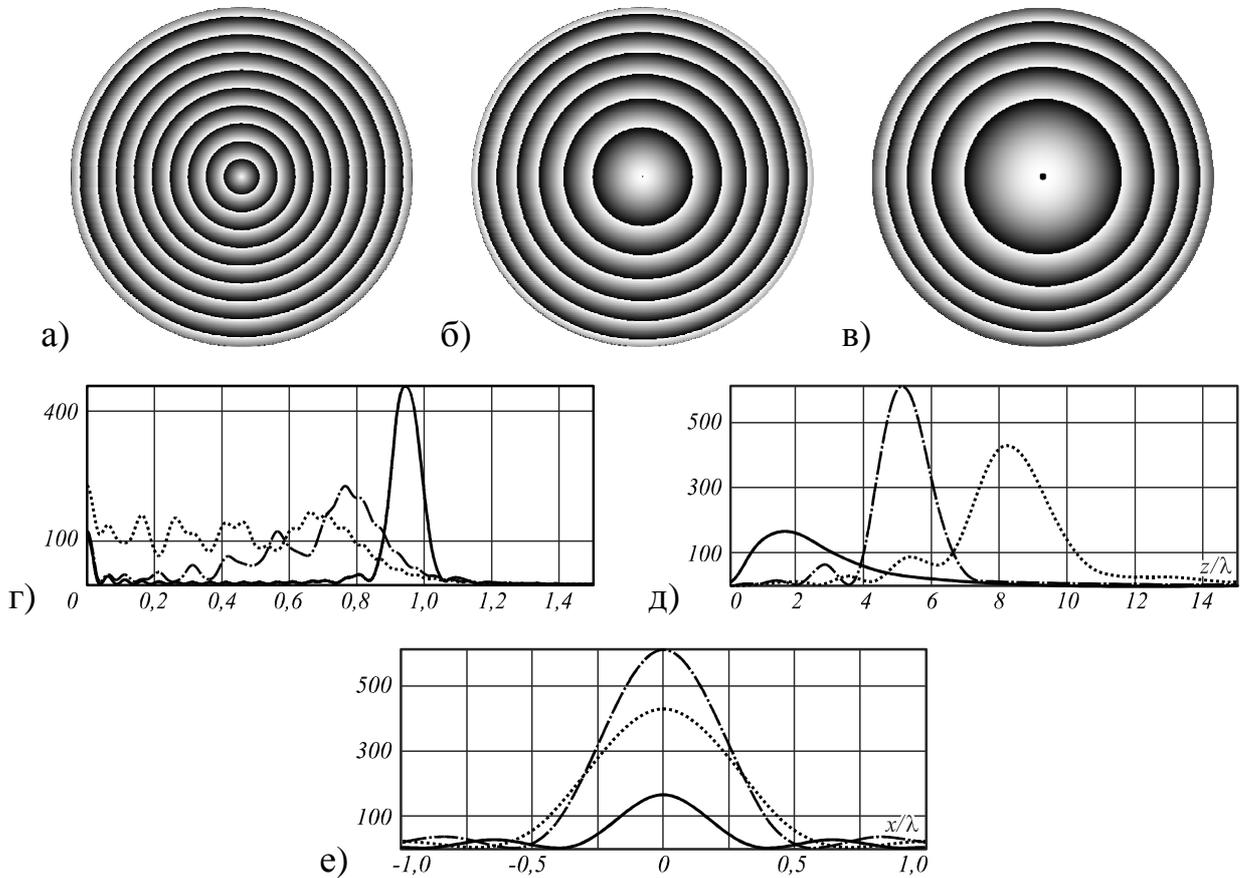


Рисунок 3.9 – Фаза фраксикона при (а)  $\gamma=1, \alpha_0=0,95$ , (б)  $\gamma=1,5, \alpha_0=0,185$ , (в)  $\gamma=2, \alpha_0=0,087$  и соответствующие пространственные спектральные распределения (г), а также распределения интенсивности вдоль оптической оси (д) и в плоскости максимального значения (е) ( $\gamma=1$  – сплошная линия,  $\gamma=1,5$  – штрихпунктирная линия,  $\gamma=2$  – точечная линия)

Такое завышенное значение теоретических оценок связано с тем, что они предсказывают не положение максимальной интенсивности, а границу начала тени, которая находится правее максимума.

Заметим, однако, что параболическая линза не является оптимальной для фокусировки излучения в непараксиальном случае. Известно, что наилучшую фокусировку обеспечивает безабберационная (гиперболическая) линза (смотри также пункт 1.5.2):

$$\tau_{lens}(r) = \exp\left(-ik\sqrt{r^2 + f^2}\right), \quad (3.82)$$

где  $f$  – фокусное расстояние.

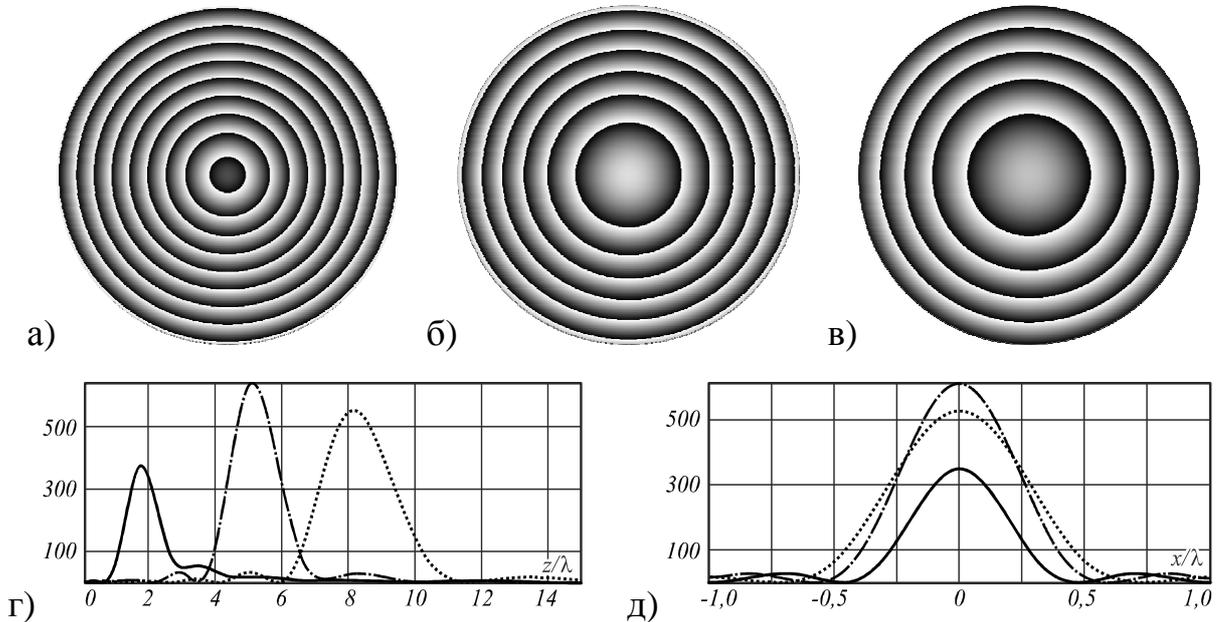


Рисунок 3.10 – Фаза гиперболической линзы (3.97) при (а)  $f=1,7\lambda$ , (б)  $f=5,14\lambda$ , (в)  $f=8,25\lambda$  и соответствующие распределения интенсивности (г) вдоль оптической оси и (д) в плоскостях фокусов ( $f=1,7\lambda$  – сплошная линия,  $f=5,14\lambda$  – штрихпунктирная линия,  $f=8,25\lambda$  – точечная линия)

На рисунке 3.10 приведены результаты фокусировки плоского пучка, ограниченного радиусом  $R = 10\lambda$  микролинзой (3.82) при различных значениях фокусного расстояния. Фокусы были выбраны так, чтобы соответствовать расстояниям максимальной интенсивности рассмотренных выше элементов:  $f = 1,7\lambda$ . (рисунок 3.10а),  $f = 5,14\lambda$  (рисунок 3.10б),  $f = 8,25\lambda$  (рису-

нок 3.10в). Из сравнения рисунков 3.9а-в и 3.10а-в видно, что структура фазы элементов, концентрирующих излучение на заданных плоскостях, очень похожа, вплоть до преобразования гиперболической линзы (3.97) в аксикон при малых значениях фокусного расстояния  $f$ .

Из сравнения продольного распределения интенсивности (рисунки 3.9д и 3.10г) видно, что линза (3.82) обеспечивает лучшую концентрацию энергии, чем рассмотренные выше микроэлементы. Однако с размером светового пятна ситуация неоднозначная. Диаметр светового пятна гиперболической линзы с  $f = 1,7\lambda$  равен  $0,42\lambda$ , что на 10% больше, чем у аксикона при двукратном увеличении интенсивности. Результаты для линзы (3.97) и фраксикона с  $\gamma = 1,5$  очень близки как по концентрации энергии, так и по размеру светового пятна (для  $f = 5,14\lambda$  размер светового пятна равен  $0,514\lambda$ , что на 1% больше при росте интенсивности на 4%). Для фокуса  $f = 8,25\lambda$  размер светового пятна такой же, как у параболической линзы  $0,62\lambda$  при увеличении интенсивности на 20%.

Таким образом, можно сделать вывод, что в непараксиальной области фраксикон с показателем степени из середины диапазона  $1 < \gamma < 2$  фактически является аналогом гиперболической линзы, оптимально фокусирующей падающее излучение. Заметим при этом, что при использовании фраксикона обеспечивается более резкая тень справа от максимума, чем при гиперболической линзе (сравним рисунки 3.9д и 3.10г).

### 3.7 Обобщённая линза ( $\gamma > 2$ )

Для логического завершения описания действия асферической линзы осталось лишь рассмотреть случай показателя  $\gamma > 2$ , что и будет сделано в данном параграфе. Геометро-оптический анализ показывает, что такой элемент имеет сколь угодно большую глубину фокуса (с тенью до начала фокального отрезка). Такая глубина обеспечивается параксиальной областью

оптического элемента, в то время как начальный, самый яркий участок фокального отрезка формируется его непараксиальной областью.

Нужно отметить, что фазовые оптические элементы с высокими показателями степени используются для кодирования волнового фронта с целью увеличения глубины поля изображающей системы [41, 64, 67, 136], а также для уменьшения влияния хроматических aberrаций [61, 62]. Изложение данного параграфа следует работе [137\*].

### 3.7.1 Общие соотношения для комплексной амплитуды на оптической оси

В данном диапазоне сохраняют справедливость общие формулы, приведённые в пункте 3.1, но для удобства часть из них повторим. Амплитуда на оси вычисляется по формуле (смотри (3.9)):

$$U(0,0,z) = \exp(ikz) - \exp\left[-i(k\alpha_0 R)^\gamma + ik\sqrt{R^2 + z^2}\right] \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \\ - i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \int_0^R \frac{\exp\left[-i(k\alpha_0 r)^\gamma + ik\sqrt{r^2 + z^2}\right]}{\sqrt{r^2 + z^2}} r^{\gamma-1} dr. \quad (3.83)$$

Она верна при любом значении  $\gamma$ , но при вычислении по методу стационарной фазы начинает проявляться различие свойств подынтегральной функции в разных диапазонах значений  $\gamma$ . Элемент с показателем, не большим двух уже рассматривался в предыдущих параграфах. При вычислениях использовались свойства неявной функции зависимости стационарной точки от расстояния. Само уравнение одно и то же для любого  $\gamma$ , но свойства функции в разных диапазонах различны. Функция  $z(r_0)$  имеет вид:

$$z^2 = \frac{k^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} r_0^{4-2\gamma} - r_0^2. \quad (3.84)$$

Так как  $4 - 2\gamma < 0$ , вид графика существенно отличается от диапазонов  $0 < \gamma < 1$  и  $1 < \gamma < 2$  (рисунок 3.11). При заданном  $z$  всегда есть одна стацио-

нарная точка, поэтому естественной тени нет, что содержит противоречие с геометро-оптической теорией, где естественная тень появляется на границе полного отражения [104\*]. Отметим, что в диапазоне  $1 < \gamma < 2$  такое противоречие отсутствует. Величина стационарной точки не превосходит величины

$(r_0)_{\max}$ , соответствующей  $z = 0$ :  $(r_0)_{\max} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(\gamma \alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-1)}}$ . Если  $(r_0)_{\max} > R$ , то

вблизи оптического элемента вплоть до  $z = R \cdot \sqrt{\frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} - 1}$  будет тень от на-

личия входного зрачка.

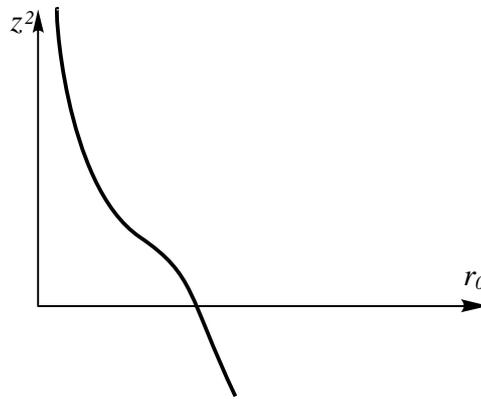


Рисунок 3.11 – Функция зависимости стационарной точки  $r_0$  и расстояния  $z$

### 3.7.2 Частные примеры и приближения для случая больших и малых расстояний от оптического элемента

Для более точного представления о поведении амплитуды желательно иметь (хотя бы приближённое) явное решение уравнения (3.84). В области  $\gamma > 2$  оно разрешимо алгебраически при двух значениях:  $\gamma=2,5$  и  $\gamma=3$ .

При  $\gamma=2,5$  имеем уравнение  $r_0^3 + z^2 r_0 = 1 / (6,25 \alpha_0^5 k^3)$ . Оно проще, чем аналогичное уравнение при  $\gamma=0,5$ , так как уже имеет каноническую форму кубического уравнения, но решение всё равно громоздко. Поэтому для уяснения свойств решения ограничимся значением  $\gamma=3$ , при котором будет более простое уравнение.

При  $\gamma=3$  имеем уравнение

$$r_0^4 + z^2 r_0^2 = 1 / (9\alpha_0^6 k^4), \quad (3.85)$$

имеющее решение

$$2r_0^2 = \sqrt{z^4 + 4 / (9\alpha_0^6 k^4)} - z^2. \quad (3.86)$$

В выражения других величин, используемых в методе стационарной фазы:

$$A(r_0) = \frac{r_0^2}{\sqrt{r_0^2 + z^2}}, \quad f''(r_0) = 6(k\alpha_0)^3 r_0 - \frac{kz^2}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.87)$$

по причине их громоздкости значение стационарной точки подставлять в общем случае не будем (подставим только в приближениях).

Подставив в (3.83)  $\gamma=3$ , по методу стационарной фазы получим:

$$U(0,0,z) = U_{sp} - 3i(k\alpha_0)^3 z \cdot A(r_0) \exp[-if(r_0)] \sqrt{2/|f''(r_0)|} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt. \quad (3.88)$$

Следует отдельно упомянуть о правомерности применения метода стационарной фазы, особенно классического, в данном диапазоне  $\gamma > 2$ . Дело в том, что модуль подынтегральной функции в (3.83) возрастает с увеличением  $r$ . Но можно доказать, что ширина лепестков убывает быстрее, чем увеличивается их высота. При замене переменной  $r^\gamma = y$  факт сходимости интеграла в бесконечных пределах становится очевидным, поэтому все наши рассуждения корректны.

При определённых приближениях формулы (3.86), (3.87) можно упростить. Это возможно в двух случаях. Заметим, однако, что окрестность максимума амплитуды не попадает в области применимости этих случаев.

Случай I. Если  $z$  не слишком мало, по крайней мере, если  $4 / (9\alpha_0^6 k^4 z^4) \sim < 1/2$ , что эквивалентно  $kz > \sqrt[4]{8} / \sqrt{3}\alpha_0^{3/2}$  (при  $\alpha_0 = 0,01$   $z > 154,5\lambda$ , при  $\alpha_0 = 0,001$   $z > 4886\lambda$ ), имеем следующие приближения:

$$r_0^2 \approx 1 / (9\alpha_0^6 k^4 z^2), \quad A(r_0) \approx 1 / (9\alpha_0^6 k^4 z^3), \quad f''(r_0) \approx k / z. \quad (3.89)$$

$$U(0,0,z) \approx U_{ep} - i \exp[-if(r_0)] \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\alpha_0^3(kz)^{3/2}} \cdot \int_{t1}^{t2} \exp(it^2) dt, \quad (3.90)$$

$$t1 \approx -\frac{1}{3\sqrt{2}\alpha_0^3(kz)^{3/2}} \quad t2 \approx R\sqrt{\frac{k}{2z}}.$$

Случай II. Теперь, наоборот, пусть  $z$  достаточно мало, более точно должно выполняться неравенство  $9\alpha_0^6 k^4 z^4 / 4 \sim < 1/2$ , что эквивалентно  $(kz) < \sqrt[4]{2}/\sqrt{3}\alpha_0^{3/2}$  (при  $\alpha_0 = 0,01$  это даёт  $z < 109,3\lambda$ ). В этом случае формулы (3.86), (3.87) также можно упростить:

$$r_0^2 \approx 1/(3\alpha_0^3 k^2) - z^2/2,$$

$$A(r_0) \approx 1/(\sqrt{3}\alpha_0^{3/2} k) - kz^2 \cdot (3\sqrt{3}/4)\alpha_0^{3/2}, \quad (3.91)$$

$$f''(r_0) \approx 2\sqrt{3}\alpha_0^{3/2} k^2 - k^4 z^2 \cdot (3\sqrt{3}/4)\alpha_0^{9/2} \cdot (1 + \sqrt{2}).$$

Как видим, выражения всё же достаточно длинные. Но при более жёстких условиях их можно ещё упростить. Так как перед интегралом в (3.83) и (3.88) уже есть множитель  $z$ , заменим все величины в (3.91) значениями, получающимися при  $z = 0$ ; это можно сделать при  $kz < 1/\sqrt{6}\alpha_0^{3/2}$  (при  $\alpha_0 = 0,01$   $z < 65\lambda$ , при  $\alpha_0 = 0,001$   $z < 2055\lambda$ ). Подставив в (3.88), получим

$$U(0,0,z) \approx U_{ep} - i \exp[-if(r_0)] \cdot \sqrt[4]{3}\alpha_0^{3/4}(kz) \cdot \int_{t1}^{t2} \exp(it^2) dt, \quad (3.92)$$

где  $t1 \approx -\frac{1}{\sqrt[4]{3}\alpha_0^{3/4}}$   $t2 \approx \left(R - \frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0^{3/2} k}\right) \cdot \sqrt[4]{3}\alpha_0^{3/4} k$  являются постоянными числами.

То есть величина добавки к  $U_{ep}$  пропорциональна  $(kz)$ .

Последнее, применённое в (3.92), приближение верно и для произвольного  $\gamma$ . При  $z = 0$  уравнение (3.83) легко решается при любом  $\gamma$ ; граница малости  $z$ , аналогичная  $kz < 1/\sqrt{6}\alpha_0^{3/2}$  приводится ниже.

Выпишем требуемые для вычисления величины в явном виде:

$$r_0 \approx \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-1)}}, \quad A(r_0) \approx r_0^{\gamma-2}, \quad f''(r_0) \approx \gamma(\gamma-1)(k\alpha_0)^\gamma r_0^{\gamma-2}. \quad (3.93)$$

Тогда можно получить выражение, обобщающее (3.92):

$$U(0,0,z) \approx U_{ep} - i \exp[-if(r_0)] \cdot \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} (\gamma\alpha_0^\gamma)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} (kz) \cdot \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt, \quad (3.94)$$

формулы для  $t_1, t_2$  писать не будем, важно, что это постоянные числа.

Посмотрим теперь, можно ли обобщить приближение не очень малого  $z$ , применённое в (3.89), (3.90). Можно показать, что (3.89) можно получить, не имея точного решения, а выбросив в исходном уравнении (3.84) слагаемое  $r_0^2$ . Если мы сделаем это при произвольном  $\gamma$ , то получим обобщение (3.90).

Ниже мы приведём границу большого  $z$ , аналогичную  $kz > \sqrt[4]{8}/\sqrt{3}\alpha_0^{3/2}$ . В результате получим

$$r_0^{\gamma-2} \approx 1/(\gamma\alpha_0^\gamma k^{\gamma-1} z), A(r_0) \approx r_0^{\gamma-1}/z, f''(r_0) \approx k(\gamma-2)/z. \quad (3.95)$$

$$U(0,0,z) \approx U_{ep} - i \exp[-if(r_0)] \cdot \frac{\sqrt{2}}{(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-2)}} \cdot \frac{1}{(kz)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-2)}}} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt, \quad (3.96)$$

$$t_1 \approx -\sqrt{\frac{\gamma-2}{2}} \frac{1}{(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-2)}} \cdot \frac{1}{(kz)^{\gamma/(2(\gamma-2))}} \quad t_2 \approx R\sqrt{\frac{k}{2z}}(\gamma-2).$$

Всё слагаемое с интегралом убывает пропорционально  $1/z^{(\gamma-1)/(\gamma-2)}$ , с ростом  $\gamma$  показатель степени  $z$  приближается к единице. Получаем, что по порядку убывания интегральное слагаемое приближается к краевому  $U_{ep}$ . Это вполне естественно, если учесть предельную форму оптического элемента, при которой сечения  $r = r_0$  и  $r = R$  становятся практически одинаковыми по своим свойствам.

Вид зависимости от  $kz$  в (3.94) и (3.96) показывает, что правый край максимума амплитуды должен быть достаточно пологий, а левый резкий, что согласуется с геометрико-оптическим рассмотрением.

Попытаемся найти границы, когда  $z$  можно считать достаточно малым или достаточно большим при произвольном  $\gamma$ .

Малые  $z$ . Неравенство  $kz < \sqrt[4]{2}/\sqrt{3}\alpha_0^{3/2}$ , при котором верны формулы (3.91), нельзя получить для других  $\gamma$ , так как оно получено из явного алгеб-

раического решения. А для неравенства  $kz < 1/\sqrt{6}\alpha_0^{3/2}$ , определяющего верность (3.92), можно найти аналог и, таким образом, сказать, когда верны (3.93), (3.94). Запишем (3.84) в виде  $r_0^{2\gamma-2} + z^2 r_0^{2\gamma-4} = (r_0)_{\max}^{2\gamma-2}$ . Значение стационарной точки из (3.93) получается, если подставить  $z=0$ . Это не очень влияет на корень уравнения, если верно неравенство  $z^2 < (r_0)_{\max}^2 / 2$  или

$$kz < 1/\sqrt{2}(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-1)}. \quad (3.97)$$

Например, при  $\gamma=4$ ,  $\alpha_0=0,01$  будет  $z < 32,9\lambda$ , а при  $\gamma=4$ ,  $\alpha_0=0,001$  будет  $z < 709\lambda$ .

Большие  $z$ . Приближение (3.95) получено удалением в исходном уравнении (3.84) слагаемого  $r_0^2$ , что означает удаление  $r_0^{2\gamma-2}$  выше. Корень уравнения мало изменяется, если верно неравенство  $((r_0)_{\max}^2 / z^2)^{\frac{2\gamma-2}{2\gamma-4}} < 1/8$  или

$$kz > 8^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}} / (\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-1)}. \quad (3.98)$$

Например, при  $\gamma=4$ ,  $\alpha_0=0,01$  будет  $z > 93,1\lambda$ , а при  $\gamma=4$ ,  $\alpha_0=0,001$  будет  $z > 2005\lambda$ .

В (3.92) при интеграле имеется возрастающая величина  $(kz)$ , а в (3.90) – убывающая величина  $(kz)^{-3/2}$ . Поэтому, если приравнять модули коэффициентов при интеграле (формально применить классический м.с.ф.), то получим некоторое, возможно, грубое приближение для положения максимума амплитуды  $z_{\max}$ . В итоге получим

$$kz_{\max} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{3\alpha_0^{3/2}}}, \quad (3.99)$$

при  $\alpha_0=0,01$  имеем  $z_{\max} \approx 105,6\lambda$ , а при  $\alpha_0=0,001$  имеем  $z_{\max} \approx 3338\lambda$ .

Для произвольного  $\gamma$  аналогично приравняем (3.94) и (3.96). Получим

$$kz_{\max} = (\gamma-1)^{\frac{\gamma-2}{3\gamma-4}} / (\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-1)}, \quad (3.100)$$

в частных примерах имеем при  $\gamma=4, \alpha_0=0,01 \quad z_{\max}=61,2\lambda$ , а при  $\gamma=4, \alpha_0=0,001 \quad z_{\max}=1319,6\lambda$ . Заметим, что во всех трёх примерах  $z_{\max}$  совсем немного меньше значения, среднего между границами приближений для малого и большого  $z$  (средние равны соответственно  $109,75\lambda$ ;  $3470\lambda$ ;  $63\lambda$ ;  $1357\lambda$ ). Для  $\gamma=3$  позиция максимума также близка к «мягкой» границе малого  $z$  (когда верны равенства (3.91)) –  $109,3\lambda$ .

Само значение максимума, очевидно, будет (по модулю) с избытком и без вне-интегральных слагаемых равно

$$U(0,0,z_{\max}) = \sqrt{2\pi i} \exp[-if(r_0)] \cdot (\gamma-1)^{-\frac{\gamma}{4(3\gamma-4)}} \left(\gamma\alpha_0^\gamma\right)^{-\frac{1}{2(\gamma-1)}}. \quad (3.101)$$

При  $\gamma=3$  получаем  $U(0,0,z_{\max}) = \sqrt{2\pi i} \exp[-if(r_0)] \cdot 2^{\frac{3}{20}} \left(3\alpha_0^3\right)^{-\frac{1}{4}}$ , а при  $\gamma=4$  будет  $U(0,0,z_{\max}) = \sqrt{2\pi i} \exp[-if(r_0)] \cdot 3^{\frac{1}{8}} \left(4\alpha_0^4\right)^{-\frac{1}{6}}$ .

### 3.7.3 Результаты численного моделирования

В данном разделе приведены результаты моделирования, основанного на прямом расчете интеграла Рэлея-Зоммерфельда методом численного интегрирования. В таблице 3.4 показаны расчеты при  $\lambda = 1$  мкм для  $\gamma = 3$  и  $\gamma = 4$  при  $\alpha_0 = 0,01$ , а в таблице 3.5 для  $\alpha_0 = 0,001$ . Радиус оптического элемента  $R$  выбирался так, чтобы период краевой зоны не был менее длины волны, а также, чтобы не было тени от входного зрачка. Для этого радиус должен быть не менее  $92\lambda$  и  $46,5\lambda$  в таблице 3.4, и  $2906\lambda$  и  $1003\lambda$  в таблице 3.5, значение минимального радиуса вычислено по формуле (3.94).

Таблица 3.4 – Расчеты распределения интенсивности для  $\gamma = 3$  и  $\gamma = 4$  при  $\alpha_0 = 0,01$

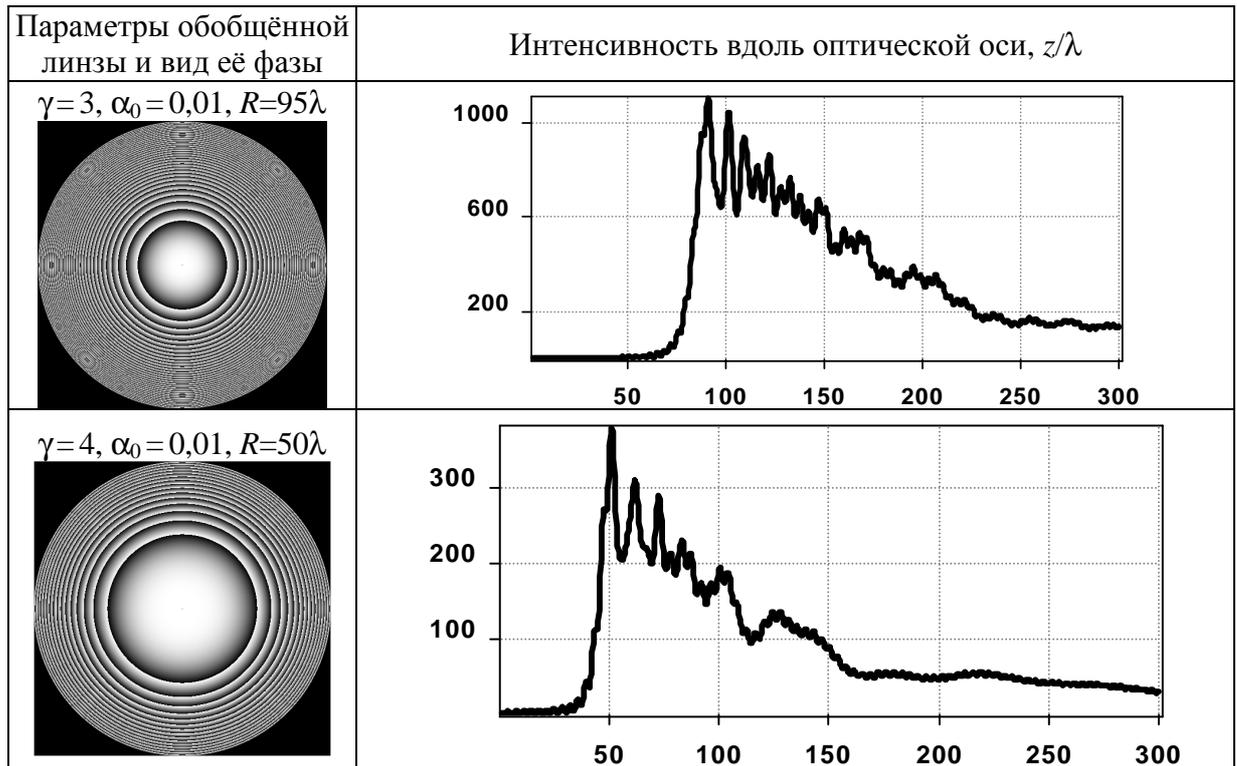
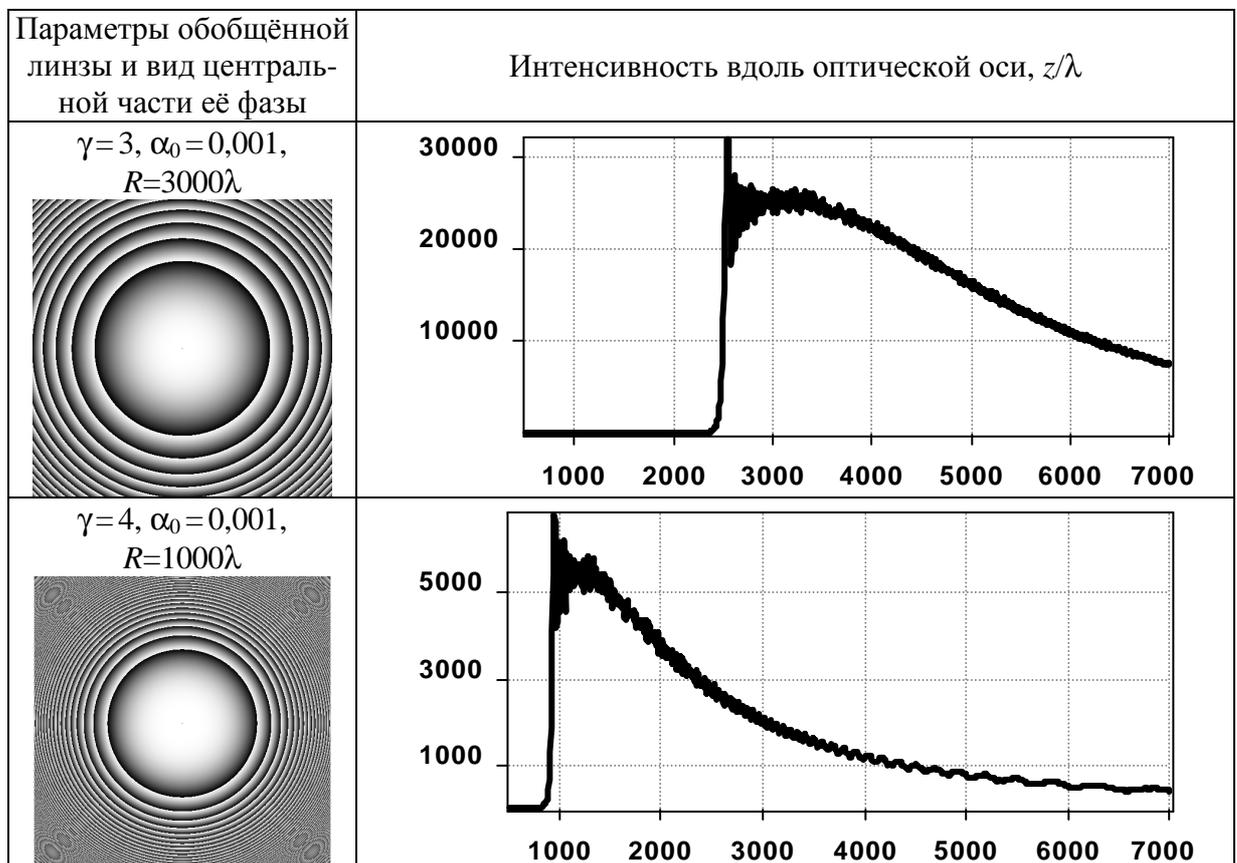


Таблица 3.5 – Расчеты распределения интенсивности для  $\gamma = 3$  и  $\gamma = 4$  при  $\alpha_0 = 0,001$



Визуальное наблюдение графиков интенсивности из таблиц 3.4 и 3.5 позволяет сделать следующие выводы:

- вид распределения вдоль оси качественно соответствует геометро-оптическому;

- упомянутое после формулы (3.84) утверждение об отсутствии тени скорее формальное, чем количественное, так как интенсивность в этой области очень мала;

- приближение малого расстояния почти не применимо, так как оно справедливо в области очень малой интенсивности; в то же время приближение большого расстояния применимо в большой области, которая начинается с места, где интенсивность примерно вдвое меньше максимума;

- вычисленные по (3.100) позиции максимумов всегда получаются больше, чем найденные численно, причём для более слабого (с меньшим  $\alpha_0$ ) элемента относительная погрешность больше (32,5% против 20%). Хотя такая погрешность не очень мала, мы всё же можем говорить о хорошем согласии с теорией, так как погрешность теоретического значения изначально предполагалась не очень малой.

Перед тем, как сформулировать выводы к главе, желательно немного сказать о связи с асферическими линзами в геометро-оптическом представлении. Как мы увидели в пункте 3.6, дифракционные аналоги элементов из §1.5 сохраняют свои свойства при рассмотрении в рамках волновой теории. Очевидно, что интенсивность уже не будет бесконечной, но имеет максимум по сравнению с другими значениями параметров элемента. Заметим, что и условия достижения максимума чем-то похожи: при определённых значениях параметра аналог элемента из пункта 1.5.1 даёт суммарную фазу с точкой перегиба, а из пункта 1.5.2 – нулевую фазу. При этом формула, совпадающая с (1.49) с точностью до обозначений, в волновой теории получается тривиально, без решения каких-либо уравнений.

### 3.8 Выводы к разделу 3

1. На основе интегрирования по частям интеграла Рэлея-Зоммерфельда первого типа получено удовлетворяющее граничному условию выражение для комплексного распределения на оптической оси при дифракции ограниченной плоской волны на произвольной асферической линзе в непараксиальном скалярном случае. (Граничное условие выполняется при любом падающем поле.) При падении плоской волны на асферическую линзу для последующего использования модифицированного метода стационарной фазы получено неявное уравнение стационарной точки.

2. Показано, что для дробного аксикона стационарная точка – единственная. Получено аналитическое выражение для границы тени и амплитуды в ближней зоне. Результаты, полученные численным интегрированием, показывают хорошее согласование с аналитической оценкой границы тени.

На численных примерах показано, что с уменьшением значения показателя  $\gamma$  световой отрезок, формируемый дробным аксиконом вдоль оптической оси, становится более протяженным и равномерным по интенсивности. («Более равномерный» означает, что уменьшается среднее значение производной от функции средней линии интенсивности.) При этом происходит увеличение максимального диаметра светового отрезка. Однако относительное уширение светового отрезка происходит медленнее, чем его удлинение. Это может быть использовано в приложениях, где размер светового пятна порядка одной длины волны является удовлетворительным, но требуется более длинный и равномерный световой отрезок, чем обеспечивает аксикон.

Доказано, что для анализа дифракции плоской волны в ближней зоне на дробном аксиконе требуется учитывать тот факт, что результат применения метода стационарной фазы является недостаточно точным. Для качественного согласования теоретических и численных результатов необходимо учиты-

вать поправочные слагаемые, физический смысл которых состоит в учёте влияния затухающих волн вблизи оптического элемента.

Численный расчет на основе интеграла Рэлея-Зоммерфельда и с использованием метода разложения по плоским волнам показал, что дробные аксиконы, имеющие высокую числовую апертуру, в плоскости максимальной интенсивности формируют центральное световое пятно примерно одинакового размера ( $\text{FWHM}=0,39\lambda$ ). Однако с уменьшением показателя  $\gamma$  уменьшается интенсивность светового пятна. Это связано с тем, что элементы в этом случае становятся более высокоапертурными, и основная энергия идет в затухающие волны.

В ближней зоне (в непосредственной близости от оптического элемента) дробный аксикон, степень которого значительно меньше единицы, позволяет формировать световое пятно, имеющее как продольный, так и поперечный размер порядка одной десятой длины волны. Заметим, что данный результат получен в скалярной теории дифракции и соответствует лишь одной компоненте электрического поля. Для получения полной картины дифракции необходимо учитывать векторный характер электромагнитного поля. Тем не менее, данный результат может быть полезен при взаимодействии излучения с веществами, чувствительными к определенным компонентам поля.

3. Для аксикона с числовой апертурой меньше единицы уравнение стационарной точки решено алгебраически и получено явное выражение для комплексного распределения на оптической оси. При числовой апертуре, меньшей предельной, использован модифицированный метод стационарной фазы с поправками, которые существенны в ближней зоне дифракции. Поправки выражены аналитически через модифицированные функции Бесселя.

Для распределения комплексной амплитуды вдоль оптической оси получены аналитические оценки для высоких значений числовой апертуры, в том числе, превышающих предельное. При числовой апертуре, равной и большей предельной, использование метода стационарной фазы невозможно. Для анализа в этом случае использована аппроксимация подынтегральной

функции, обеспечивающая сохранение точных нулей вещественной и мнимой части. Такая модель позволяет качественно предсказывать поведение интенсивности вдоль оптической оси.

Оценки, полученные для поперечного распределения, хорошо согласуются с результатами численных расчетов вплоть до предельной числовой апертуры. Дальнейшее увеличение числовой апертуры не приводит к уменьшению размера светового пятна.

**4.** В главе рассмотрено действие фраксикона как переходного элемента между параболической линзой и аксиконом.

На основе модифицированного метода стационарной фазы получены приближенные аналитические выражения для распределения комплексной амплитуды на оптической оси при дифракции плоской волны на фраксиконе. Найдена позиция фокуса.

Численное моделирование показало, что при высоких числовых апертурах фраксикон с показателем степени, близким к  $3/2$ , фактически является аналогом гиперболической линзы, которая обеспечивает наибольшую интенсивность в точке фокуса при падающем плоском ограниченном пучке.

**5.** Рассмотрено действие обобщённой линзы. Для частного значения  $\gamma=3$  получено приближённо-аналитическое выражение для комплексной амплитуды на оптической оси, а для других значений показателя – выражения, достаточно точные вблизи оптического элемента и вдалеке от него. В последнем случае приведены границы расстояний, начиная с которых эти выражения применимы. Получены приближенные значения для положения и величины максимума амплитуды. Результаты позволяют сделать вывод о том, что качественно имеет место согласие с геометро-оптической моделью, а для положения фокуса имеется и количественное согласие с результатами численного моделирования. Особенностью этого диапазона является наличие теневой области вблизи элемента и очень длинный медленно тускнеющий фокальный отрезок после границы тени.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие основные научные результаты.

1. На основе геометро-оптического анализа определены типы преломляющих асферических поверхностей, описываемых степенной функцией, позволяющие формировать характерные распределения интенсивности на оптической оси. Приблизённо равномерное распределение формируется при использовании поверхности с показателем степени  $\gamma < 1$  (дробный аксикон). Для формирования продольного отрезка с теоретически бесконечной интенсивностью на краю необходимо использовать поверхность с  $1 < \gamma < 2$  (фраксикон). При  $\gamma > 2$  распределение интенсивности вдоль оси характеризуется начальной теневой областью, после которой начинается неограниченный световой отрезок с постепенно убывающей интенсивностью.

2. Вычислена комплексная функция пропускания рефракционного аксикона с учётом как геометро-оптической, так и волновой теорий. Полученное выражение применимо для широкого набора конфигураций хода лучей, в том числе при углах, соответствующих полному внутреннему отражению.

3. Параксиальное распространение лазерного пучка с начальной произвольной степенной фазовой функцией описано приближёнными аналитическими выражениями, которые качественно согласуются с геометро-оптическим анализом. Лучшее согласование наблюдается при  $\gamma < 1$  и  $\gamma > 2$ . Для показателей степенной функции  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 4$  полученные выражения дают точный результат.

4. На основе непараксиального анализа распространения пучка со степенной фазовой функцией показано, что существенный рост интенсивности в фокусе происходит в диапазоне  $1 < \gamma < 2$ , причём в середине диапазона достигается максимальная интенсивность. Полученные аналитические выражения с уточняющими поправками основаны на вычислении интеграла Рэлея-Зоммерфельда.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **McLeod, J.H.** The axicon: a new type of optical element [Текст] / J.H. McLeod // J. Opt. Soc. Am. – 1954. – Vol. 44. – P. 592-597.
2. **Jaroszewicz, Z.** Axicon – the most important optical element [Текст] / Z. Jaroszewicz, A. Burvall, A.T. Friberg. – Optics & Photonics News, April 2005.
3. **Durnin, J.** Diffraction-free beams [Текст] / J. Durnin, J.J. Miceli, Jr. and J.H. Eberly // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58. – P. 1499-1501.
4. **McGloin, D.** Bessel beams: diffraction in a new light [Текст] / D. McGloin and K. Dholakia // Contemporary Physics. – 2005. – Vol. 46(1). – P. 15-28.
5. **Arlt, J.** Optical micromanipulation using a Bessel light beam [Текст] / J. Arlt, V. Garces-Chavez, W. Sibbett and K. Dholakia // Optics Communications. – 2001. – Vol. 197. – P. 239-245.
6. **Garces-Chavez, V.** Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam [Текст] / V. Garces-Chavez [et al.] // Nature. – 2002. – V. 419. – P. 145-147.
7. **Сойфер, В.А.** Оптическое манипулирование микрообъектами: достижения и новые возможности, порожденные дифракционной оптикой [Текст] / В.А. Сойфер, В.В. Котляр, С.Н. Хонина // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2004. – Т. 35(6). – P. 1368-1432.
8. **Ding, Z.** High-resolution optical coherence tomography over a large depth range with an axicon lens [Текст] / Z. Ding, H. Ren, Y. Zhao, J.S. Nelson and Z. Chen // Optics Letters. – 2002. – Vol. 27. – P. 243-245.
9. **Lee, K.** Bessel beam spectral-domain high-resolution optical coherence tomography with micro-optic axicon providing extended focusing range [Текст] / K. Lee and J. Rolland // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33. – P. 1696-1698.
10. **Котляр, В.В.** Бесконтактное прецизионное измерение линейных смещений с использованием ДОЭ, формирующих моды Бесселя [Текст] /

- В.В. Котляр, Р.В. Скиданов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2001. – № 21. – С. 102-104.
11. **Fortin, M.** Optical tests with Bessel beam interferometry [Текст] / M. Fortin, M. Piché and E.F. Borra // Optics Express. – 2004. – Vol. 2, Issue 24. – P. 5887-5895.
  12. **Fujiwara, J.** Optical properties of conic surfaces. I. Reflecting cone [Текст] / J. Fujiwara // Journal of the Optical Society of America. – 1962. – Vol. 52. – P. 287-292.
  13. **Sochacki, J.** Annular-aperture logarithmic axicon [Текст] / J. Sochacki, Z. Jaroszewicz, L.R. Staroiski, A. Kolodziejczyk // J. Opt. Soc. Am. A. – 1993. – Vol. 10, Issue 8. – P. 1765-1768.
  14. **Jaroszewicz, Z.** Apodized annular-aperture logarithmic axicon: smoothness and uniformity of the intensity distribution [Текст] / Z. Jaroszewicz, J. Sochacki, A. Kołodziejczyk and L.R. Staronski // Optics Letters. – 1993. – Vol. 18. – P. 1893-1895.
  15. **Golub, I.** Characterization of a refractive logarithmic axicon [Текст] / I. Golub, B. Chebbi, D. Shaw, and D. Nowacki // Optics Letters. – 2010. – Vol. 35. – P. 2828-2830.
  16. **Sochacki, J.** Nonparaxial design of generalized axicons [Текст] / J. Sochacki, A. Kołodziejczyk, Z. Jaroszewicz and S. Bará // Applied Optics. – 1992. – Vol. 31. – P. 5326-5330.
  17. **Davidson, N.** Holographic axilens: high resolution and long focal depth [Текст] / N. Davidson, A.A. Friesem and E. Hasman // Optics Letters. – 1991. – Vol. 16, Issue 7. – P. 523-525.
  18. **Koronkevich, V.P.** Lensacon [Текст] / V.P. Koronkevich, I.A. Mikhaltsova, E.G. Churin and Yu.I. Yurlov // Appl. Opt. – 1993. – Vol. 34(25). – P. 5761-5772.
  19. **Parigger, C.** Spherical aberration effects in lens axicon doublets: theoretical study [Текст] / C. Parigger, Y. Tang, D.H. Plemmons [et al.] // Appl. Opt. – 1997. – Vol. 36(31). – P. 8214-8221.

20. (\*)**Хонина, С.Н.** Линзакон: непараксиальные эффекты [Текст] / С.Н. Хонина, Н.Л. Казанский, А.В. Устинов, С.Г. Волотовский // Оптический журнал. – 2011. – Т. 78, № 11. – С. 44-51.
21. **Bin, Z.** Diffraction property of an axicon in oblique illumination [Текст] / Z. Bin and L. Zhu // Applied Optics. – 1998. – Vol. 37. – P. 2563–2568.
22. **Burvall, A.** Axicon imaging by scalar diffraction theory [Текст] / A. Burvall. – PhD thesis, Stockholm, 2004.
23. **Хонина, С.Н.** Применение аксиконов в изображающих системах для увеличения глубины фокуса [Текст] / С.Н. Хонина, Д.А. Савельев // Известия Самарского научного центра РАН. – 2011. – Т. 13, № 6. – С. 7-15.
24. **Mikula, G.** Diffractive elements for imaging with extended depth of focus [Текст] / G. Mikula, A. Kolodziejczyk, M. Makowski, C. Prokopowicz, M. Szypek // Optical Engineering. – 2005. – Vol. 44(5). – P. 058001–058008.
25. **Хонина, С.Н.** Применение аксиконов в изображающих системах для увеличения глубины фокуса [Текст] / С.Н. Хонина, Д.А. Савельев // Известия Самарского научного центра РАН. – 2011. – Т. 13, № 6. – С. 7-15.
26. **Van Heel, A.C.S.** Modern alignment devices [Текст] / in Advanced Optical Techniques. – Ed. By A.C.S. Van Heel. – North-Holland, 1967. – P. 319.
27. **Wang, K.** Influence of the incident wave-front on intensity distribution of the nondiffracting beam used in large-scale measurement [Текст] / K. Wang, L. Zeng, and Ch. Yin // Optics Communications. – 2003. – Vol. 216. – P. 99-103.
28. **Reichelt, S.** Self-calibration of wavefront testing interferometers by use of diffractive elements [Текст] / S. Reichelt, H. Tiziani and H. Zappe // Proceeding of SPIE. – 2006. – Vol. 6292. – P. 629205-10.
29. **Arimoto, R.** Imaging properties of axicon in a scanning optical system [Текст] / R. Arimoto, C. Saloma, T. Tanaka and S. Kawata // Applied Optics. – 1992. – Vol. 31(31). – P. 6653-6657.

30. **Lu, J.** Diffraction-limited beams and their applications for ultrasonic imaging and tissue characterization [Текст] / J. Lu and J.F. Greenleaf // Proceeding of SPIE. – 1992. – Vol. 1733. – P. 92-119.
31. **Leitgeb, R.A.** Extended focus depth for Fourier domain optical coherence microscopy [Текст] / R.A. Leitgeb, M. Villiger, A.H. Bachmann, L. Steinmann and T. Lasser // Optics Letters. – 2006. – Vol. 31, Issue 16. – P. 2450-2452.
32. **Khonina, S.N.** DOE for optical micromanipulation [Текст] / S.N. Khonina, R.V. Skidanov, A.A. Almazov, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, A.V. Volkov // Proceedings of SPIE: Lasers and Measurements. – 2004. – Vol. 5447. – P. 304-311.
33. **Shao, B.** Size tunable three-dimensional annular laser trap based on axicons [Текст] / B. Shao, S.C. Esener, J.M. Nascimento, M.W. Berns, E.L. Botvinick and M. Ozkan // Optics Letters. – 2006. – Vol. 31. – P. 3375-3377.
34. **Vohnsen, B.** Wavefront sensing with an axicon [Текст] / B. Vohnsen, S. Castillo, D. Rativa // Optics Letters. – 2011. – Vol. 36, Issue 6. – P. 846-848.
35. **Mezouari, S.** Phase pupil functions for reduction of defocus and spherical aberrations [Текст] / S. Mezouari and A.R. Harvey // Opt. Lett. – 2003. – Vol. 28, Issue 10. – P. 771-773.
36. **Davidson, N.** Holographic axilens: high resolution and long focal depth [Текст] / N. Davidson, A.A. Friesem and E. Hasman // Opt. Lett. – 1991. – Vol. 16(7). – P. 523-525.
37. **Pereira, S.** Superresolution by means of polarisation, phase and amplitude pupil masks [Текст] / S. Pereira, A.S. van de Nes // Opt. Commun. – 2004. – Vol. 234. – P. 119-124.
38. **Gundu, P.N.** Apodized superresolution – concept and simulations [Текст] / P.N. Gundu, E. Hack, P. Rastogi // Opt. Commun. – 2005. – Vol. 249. – P. 101-107.
39. (\*)**Хонина, С.Н.** Анализ влияния волновых aberrаций на уменьшение размеров фокального пятна в высокоапертурных фокусирующих систе-

- мах [Текст] / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Е.А. Пелевина // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 2. – С. 203-219.
40. **Котляр, В.В.** Дифракционный расчёт фокусаторов в продольный отрезок [Текст] / В.В. Котляр, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина // Письма в ЖЭТФ. – 1991. – № 17(24). – С. 63-66.
  41. **Dowski, E.R. Jr.** Extended depth of field through wave-front coding [Текст] / E.R. Dowski, Jr. and W.T. Cathey // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34, N 11. – P. 859-1866.
  42. **van der Gracht, J.** Broadband behavior of an optical–digital focus-invariant system [Текст] / J. van der Gracht, E. Dowski, M. Taylor, D. Deaver // Opt. Lett. – 1996. – Vol. 21(13). – P. 919-921.
  43. **Mikuła, G.** Imaging with extended focal depth by means of lenses with radial and angular modulation [Текст] / G. Mikuła, Z. Jaroszewicz, A. Kolodziejczyk, K. Petelczyc and M. Sypek // Opt. Express. – 2007. – Vol. 15(15). – P. 9184-9193.
  44. **Li, J.** Focal shift and focusing properties generation by radial cosine phase masks [Текст] / J. Li, X. Gao, S. Zhuang, C. Huang // Optik. – 2010. – Vol. 121. – P. 821-825.
  45. **Jia, J.** Superresolution technology for reduction of the far-field diffraction spot size in the laser free-space communication system [Текст] / J. Jia, C. Zhou, L. Liu // Opt. Commun. – 2003. – Vol. 228. – P. 271-278.
  46. **Li, J.** Gradient force pattern of truncated hyperbolic-cosine-Gaussian beam through phase plate focusing system [Текст] / J. Li, S. Zhuang, Y. Xie, C. Huang // Opt. Eng. – 2007. – Vol. 46(12). – P. 124201.
  47. **Molloy, J.E.** Lights, action: optical tweezers [Текст] / J.E. Molloy, M.J. Padgett // Cont. Phys. – 2002. – Vol. 43. – P. 241-258.
  48. **Paterson, L.** Controlled rotation of optical trapped microscopic particles [Текст] / L. Paterson, M.P. MacDonald, J. Arlt, W. Sibbett, P.E. Bryant, K. Dholakia // Science. – 2001. – Vol. 292. – P. 912-914.

49. **Galajda, P.** Complex micromachings produced and driven by light [Текст] / P. Galajda, P. Ormos // *Appl. Phys. Lett.* – 2001. – Vol. 78. – P. 249-251.
50. **Котляр, В.В.** Некоторые типы гипергеометрических лазерных пучков для оптического микроманипулирования [Текст] / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, Р.В. Скиданов, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 2008. – Т. 32, № 2. – С. 180-186.
51. **Ahlawat, S.** Long-distance optical guiding of colloidal particles using holographic axilens [Текст] / S. Ahlawat, R. S. Verma, R. Dasgupta, P. K. Gupta // *Applied Optics.* – 2011. – Vol. 50, Issue 13. – P. 1933-1940.
52. **Mikula, G.** Imaging with extended focal depth by means of lenses with radial and angular modulation [Текст] / G. Mikula, Z. Jaroszewicz, A. Kolodziejczyk, K. Petelczyc, M. Sypek // *Optics Express.* – 2007. – Vol. 15, Issue 15. – P. 9184-9193.
53. **Хонина, С.Н.** Фраксикон – дифракционный оптический элемент с конической фокальной областью [Текст] / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский // *Компьютерная оптика.* – 2009. – Т. 33, №4. – С. 401-411.
54. **Toytman, I.** Optical breakdown in transparent media with adjustable axial length and location [Текст] / I. Toytman, D. Simanovski, D. Palanker // *Optics Express.* – 2010. – Vol. 18, Issue 24. – P. 24688-24698.
55. **Батусов, Ю.А.** История зарождения мезооптики [Текст] / Ю.А. Батусов, Л.М. Сороко // *Физика элементарных частиц и атомного ядра.* – 2009. – Т. 40, № 2. – С. 457-496.
56. **(\*)Khonina, S.N.** The lensacon: nonparaxial effects [Текст] / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, A.V. Ustinov, S.G. Volotovskiy // *J. Opt. Technol.* – 2011. – Vol.78, Issue 11. – P. 724-729.
57. **Голуб, М.А.** Дифракционный расчёт оптического элемента, фокусирующего в кольцо [Текст] / М.А. Голуб, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // *Автометрия.* – 1987. – № 6. – С. 8-15.

58. **Казанский, Н.Л.** Исследование дифракционных характеристик фокусатора в кольцо методом вычислительного эксперимента [Текст] // Компьютерная оптика. – 1992. – Вып. 10-11. – С. 128-144.
59. **Chen, Y.** Axial intensity distribution of lens axicon illuminated by Gaussian-Schell model beam [Текст] / Y. Chen, J. Pu, X. Liu // Optical Engineering. – 2007. – Vol. 46, Issue 1. – P. 018003.
60. **Голуб, М.А.** Фокусировка когерентного излучения в заданную область пространства с помощью синтезированных на ЭВМ голограмм [Текст] / М.А. Голуб, С.В. Карпеев, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // Письма в ЖТФ. – 1981. – Т. 7, № 10. – С. 618-623.
61. **Tucker, S.C.** Extended depth of field and aberration control for inexpensive digital microscope systems [Текст] / S.C. Tucker, W.T. Cathey and E.R. Dowski // Opt. Express. – 1999. – Vol. 4(11). – P. 467-474.
62. **Wach, H.** Control of chromatic focal shift through wavefront coding [Текст] / H. Wach, E.R. Dowski and W.T. Cathey // Appl. Opt. – 1998. – Vol. 37. – P. 5359-5367.
63. **Marks, D.L.** Three-dimensional tomography using a cubic-phase plate extended depth-of-field system [Текст] / D.L. Marks, R.A. Stack and D.J. Brady // Opt. Lett. – 1999. – Vol. 24. – P. 253-255.
64. **Narayanswamy, R.** Extending the imaging volume for biometric iris recognition [Текст] / R. Narayanswamy, G.E. Johnson, P.E.X. Silveira and H.B. Wach // Appl. Opt. – 2005. – Vol. 44. – P. 701-712.
65. **Sherif, S.S.** Phase plate to extend the depth of field of incoherent hybrid imaging systems [Текст] / S.S. Sherif, W.T. Cathey and E.R. Dowski // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43(13). – P. 2709-2721.
66. **Castro, A.** Asymmetric phase masks for extended depth of field [Текст] / A. Castro and J. Ojeda-Castaneda // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43(17). – P. 3474-3479.
67. **Хонина, С.Н.** Фазовая аподизация изображающей системы с целью увеличения глубины фокуса в когерентном и некогерентном случаях

- [Текст] / С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 3. – С. 357-364.
68. Методы компьютерной оптики [Текст] // под ред. В.А. Соифера. – Учебник, изд. 2-е, испр. – М.: Физматлит, 2003. – 688 с.
  69. **Turunen, J.** Holographic generation of diffraction-free beams [Текст] / J. Turunen, A. Vasara and A.T. Friberg // Appl. Opt. – 1988. – Vol. 27. – P. 3959-3962.
  70. **Arlt, J.** Optical dipole traps and atomic waveguides based on Bessel light beams [Текст] / J. Arlt [et al.] // Phys. Rev. – 2001. – Vol. 63. – P. 063602.
  71. **Cizmar, T.** An optical nanotrap array movable over a millimetre range [Текст] / T. Cizmar, M. Siler, P. Zemanek // Appl. Phys. B. – 2006. – Vol. 84. – P. 197–203.
  72. **Khonina, S.N.** Narrowing of a light spot at diffraction of linearly-polarized beam on binary asymmetric axicons [Текст] / S.N. Khonina, D.V. Nesterenko, A.A. Morozov, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). – 2012. – Vol. 21(1). – P. 17-26.
  73. **Khonina, S.N.** Experimental demonstration of the generation of the longitudinal E-field component on the optical axis with high-numerical-aperture binary axicons illuminated by linearly and circularly polarized beams [Текст] / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, S.V. Alferov, D.A. Savelyev, J. Laukkanen, J. Turunen // Journal of Optics. – 2013. – Vol. 15. – P. 085704 (9pp).
  74. **Lin, X.-F.** Mask-Free Production of Integratable Monolithic Micro Logarithmic Axicon Lenses [Текст] / X.-F. Lin, Q.-D. Chen, L.-G. Niu, T. Jiang, W.-Q. Wang, H.-B. Sun // Journal of Lightwave Technology. – 2010. – Vol. 28, Issue 8. – P. 1256-1260.
  75. **Хонина, С.Н.** Гипергеометрические пучки в ближней зоне дифракции в рамках скалярной модели [Текст] / С.Н. Хонина, С.А. Балалаев // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 4. – С. 427-435.
  76. **Vahimaa, P.** Electromagnetic analysis of nonparaxial Bessel beams generated by diffractive axicons [Текст] / P. Vahimaa, V. Kettunen, M. Kuittinen, J.

- Turunen and A.T. Friberg // J. Opt. Soc. Am. A. – 1997. – Vol. 14, Issue 8. – P. 1817-1824.
77. **Zhang, Y.** Vector propagation of radially polarized Gaussian beams diffracted by an axicon [Текст] / Y. Zhang, L. Wang, C. Zheng // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol. 22, Issue 11. – P. 2542-2546.
78. **Котляр, В.В.** Моделирование острой фокусировки радиально-поляризованной лазерной моды с помощью конического и бинарного микроаксиконов [Текст] / В.В. Котляр, С.С. Стафеев // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 1. – С. 52-60.
79. **Хонина, С.Н.** Дифракция на бинарных микроаксиколах в ближней зоне [Текст] / С.Н. Хонина, Д.А. Савельев, П.Г. Серафимович, И.А. Пустовой // Оптический журнал – 2012. – Т. 79, № 10. – С. 22-29.
80. **(\*)Хонина, С.Н.** Расчёт дифракции линейно-поляризованного ограниченного пучка с постоянной интенсивностью на высокоапертурных бинарных микроаксиколах в ближней зоне [Текст] / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, С.Г. Вологовский, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 4. – С. 443-460.
81. **(\*)Хонина, С.Н.** Распространение радиально-ограниченных вихревых пучков в ближней зоне: I. Алгоритмы расчёта [Текст] / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, А.А. Ковалёв, С.Г. Вологовский // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 3. – С. 317-332.
82. **(\*)Устинов, А.В.** Быстрый способ вычисления интеграла Рэлея - Зоммерфельда первого типа [Текст] / А.В. Устинов // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 4. – С. 412-419.
83. **(\*)Хонина, С.Н.** Алгоритмы быстрого расчёта дифракции радиально-вихревых лазерных полей на микроапертуре [Текст] / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, С.Г. Вологовский, М.А. Ананьин // Известия Самарского научного центра РАН. – 2010. – № 12(3). – С. 15-25.

84. **Totzeck, M.** Validity of the scalar Kirchhoff and Rayleigh-Sommerfeld diffraction theories in the near field of small phase objects [Текст] / M. Totzeck // J. Opt. Soc. Am. A. – 1991. – Vol. 8(1). – P. 27-32.
85. **Tsoy, V.I.** The use of Kirchhoff approach for the calculation of the near field amplitudes of electromagnetic field [Текст] / V.I. Tsoy, L.A. Melnikov // Optics Communications. – 2005. – Vol. 256. – P. 1-9.
86. **(\*)Устинов, А.В.** Обобщённая линза: анализ осевого и поперечного распределения [Текст] / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 3. – С. 305-315.
87. **Wood, R.W.** Phase-reversal zone-plates, and diffraction-telescopes [Текст] / R.W. Wood // Philos. Mag. – 1898. – Vol. 45. – P. 511-522.
88. **Faklis, D.** Diffractive lenses create new opportunities [Текст] / D. Faklis // Optics & Photonics News. – 1995. – P. 28-39.
89. **Unno, Y.** Point-spread function for binary diffractive lenses fabricated with misaligned masks [Текст] / Y. Unno // Applied Optics. – 1998. – Vol. 37, N 16. – P. 3401-3407.
90. **Sabatyan, A.** Diffractive performance of a photon-sieve-based axilens [Текст] / A. Sabatyan, S.A. Hoseini // Applied Optics. – 2014. – Vol. 53, Issue 31. – P. 7331-7336.
91. **Wojnowski, D.** Surface profilometry with binary axicon-vortex and lens-vortex optical elements [Текст] / D. Wojnowski, E. Jankowska, J. Masajada, J. Suszek, I. Augustyniak, A. Popiolek-Masajada, I. Ducin, K. Kakarenko, and M. Sypek // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39, Issue 1. – P. 119-122.
92. **Rastani, K.** Binary phase Fresnel lenses for generation of two-dimensional beam arrays [Текст] / K. Rastani, A. Marrakchi, S.F. Habiby, W.M. Hubbard, H. Gilchrist and R.E. Nahory // Applied Optics. – 1991. – Vol. 30, Issue 11. – P. 1347-1354.
93. **Davis, J.A.** Subharmonic focal-length intensities formed by Fresnel lenses [Текст] / J.A. Davis, A.M. Field and D.M. Cottrell // Applied Optics, 1994. – Vol. 33, N 35. – P. 8194-8196.

94. **Налимов, А.Г.** Сравнение методов моделирования прохождения рентгеновского излучения через ДОО в параксиальной области [Текст] / А.Г. Налимов, С.Н. Хонина // Вестник СГАУ. – 2010. – № 4. – С. 238-247.
95. **Wei, P.-K.** Subwavelength focusing in the near field in mesoscale air-dielectric structures [Текст] / P.-K. Wei, H.-L. Chou and Y.-C. Chen // Opt. Letters. – 2004. – Vol. 29, Issue 5. – P. 433-435.
96. **Kotlyar, V.V.** Tight focusing with a binary microaxicon [Текст] / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, L. O’Faolain and V.A. Soifer // Opt. Letters. – 2011. – Vol. 36, Issue 16. – P. 3100-3102.
97. **Хонина, С.Н.** Экспериментальное исследование дифракции линейно-поляризованного гауссова пучка на бинарных микроаксиконах с периодом близким к длине волны [Текст] / С.Н. Хонина, Д.В. Нестеренко, А.А. Морозов, Р.В. Скиданов, И.А. Пустовой // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 1. – С. 11-21.
98. **Котляр, В.В.** Симметрия интенсивности и потока мощности субволнового фокусного пятна [Текст] / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, С.С. Стафеев // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 2. – С. 190-198.
99. **Котляр, В.В.** Выравнивание интенсивности фокального пятна сфокусированного гауссового пучка [Текст] / В.В. Котляр, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 1998. – Т. 18. – С. 42-52.
100. **(\*)Хонина, С.Н.** Уменьшение размера фокального пятна при радиальной поляризации с помощью бинарного кольцевого элемента [Текст] / С.Н. Хонина, А.В. Устинов // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 2. – С. 219-226.
101. **Born, M.** Principles of Optics [Текст] / M. Born, E. Wolf – 6th ed. – Oxford: Pergamon, 1980. – Chap. 8.3.
102. **Andrews, C.L.** Diffraction pattern in a circular aperture measured in the microwave region [Текст] / C.L. Andrews // J. Appl. Phys. – 1950. – Vol. 21. – P. 761-767.

103. **Мессиа, А.** Квантовая механика, том 1 [Текст] / А. Мессиа, пер. с франц., М., Физматлит – 1978.
104. (\*)**Устинов, А.В.** Геометро-оптический анализ обобщённой рефракционной линзы [Текст] / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Известия Самарского научного центра РАН. – 2012. – Т. 14, № 4. – С.28-37.
105. **Эльсгольц, Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Текст] – М.: Наука, 1969. - 424 с.
106. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 800 с.
107. (\*)**Устинов, А.В.** Расчёт комплексной функции пропускания рефракционных аксиконов [Текст] / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 4. – С.480-490.
108. (\*)**Ustinov, A.V.** Calculating the complex transmission function of refractive axicons [Текст] / A.V. Ustinov, S.N. Khonina // Optical Memory and Neural Networks. – 2012. – Vol. 21, Issue 3. – P. 133-144.
109. (\*)**Хонина, С.Н.** Расчёт дифракции лазерного излучения на двумерном (цилиндрическом) аксиконе с высокой числовой апертурой в различных моделях [Текст] / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, С.А. Дегтярёв // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 4. – С.670-680.
110. **Березный, А.Е.** Бессель-оптика [Текст] / А. Е. Березный, А. М. Прохоров, И. Н. Сисакян [и др.] // ДАН СССР. – 1984. – № 234 (4). – С. 802-805
111. **Tiwari, S. K.** Generation of a Bessel beam of variable spot size [Текст] / S. K. Tiwari, S. R. Mishra, S. P. Ram, H. S. Rawat // Applied Optics. – 2012. – Vol. 51, Issue 17. – P. 3718-3725.
112. **Пальчикова, И.Г.** «Бездифракционные пучки» и их каустики [Текст] / И.Г.Пальчикова // Компьютерная оптика. – 1996. – Т. 16. – С. 35-39.
113. (\*)**Устинов, А.В.** Сравнительный анализ параболической линзы и аксикона в моделях геометрической и скалярной параксиальной оптики [Текст] / А.В. Устинов, А.В. Карсаков, С.Н. Хонина // Вестник Самар-

ского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва. – 2012. – № 4(35). – С. 230-239.

114. (\*)**Khonina, S.N.** Analysis of wave aberration influence on reducing focal spot size in a high-aperture focusing system [Текст] / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, E.A. Pelevina // J. Opt. – 2011. – Vol. 13. – P. 095702-095714.
115. **Федорюк, М.В.** Асимптотика: Интегралы и ряды [Текст] / М.В. Федорюк. – М.: Наука. 1987. – 544 с.
116. **Friberg, A.T.** Stationary-phase analysis of generalized axicons [Текст] / Ari T. Friberg // Journal of the Optical Society of America. – 1996. – Vol. 13(4). – P. 743-750.
117. **Пальчикова, И.Г.** Исследование дифракционных характеристик аксикона методом вычислительного эксперимента [Текст] / И.Г.Пальчикова, С.В. Смирнов // Компьютерная оптика. – 1998. – Т. 18. – С. 104-110.
118. **Янке, Е.** Специальные функции. Формулы, графики, таблицы [Текст] / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
119. **Lit, J.W.Y.** Focal depth of a transmitting axicon [Текст] / J.W.Y. Lit, R. Tremblay// J. Opt. Soc. Am. – 1973. – Vol. 63, Issue 4. – P. 445-449.
120. **Хонина, С.Н.** Сравнительный анализ распределений интенсивности, формируемых дифракционным аксиконом и дифракционным логарифмическим аксиконом [Текст] / С. Н. Хонина, С. А. Балалаев // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 2. – С. 162-174.
121. **Голуб, М.А.** Дифракционный расчёт интенсивности светового поля вблизи фокальной линии [Текст] / М.А. Голуб, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 1992. – № 10-11. – С. 122-127.
122. (\*)**Khonina S.N.** Shaping of spherical light intensity based on the interference of tightly focused beams with different polarizations [Текст] / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, S.G. Volotovskiy // Optics & Laser Technology. – 2014. – Vol. 60. – P. 99–106.

123. (\*)**Устинов, А.В.** Анализ осевого распределения, формируемого фраксиконом в параксиальном и непараксиальном случаях [Текст] / А.В. Устинов, С.Н. Хонина, А.В. Карсаков // Известия СНЦ РАН. – 2013. – Т. 15, № 4. – С.18-25.
124. (\*)**Хонина, С.Н.** Расчёт линз для формирования параксиального продольного распределения в соответствии с их пространственным спектром [Текст] / С.Н. Хонина, А.В. Устинов // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 2. – С. 193-202.
125. (\*)**Хонина С.Н.** Дифракция Гауссова пучка на обобщённой линзе, [Текст] / С.Н. Хонина, А.В. Устинов // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 4. – С. 443-450.
126. (\*)**Устинов, А.В.** Описание способа вычисления одного класса спиральных функций [Текст] // Известия Самарского Научного Центра Российской Академии Наук. – 2013. – Т. 15, № 6. – С. 53-58.
127. (\*)**Устинов, А.В.** Анализ дифракции плоского пучка на рассеивающем фраксиконе в непараксиальном режиме [Текст] / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 42-50.
128. (\*)**Устинов, А.В.** Расчёт дифракции плоской волны на рассеивающем дробном аксиконе с учётом затухающих волн [Текст] / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Известия Самарского научного центра РАН. – 2014. – Т. 16, № 4. – С. 34-41.
129. (\*)**Устинов, А.В.** Анализ дифракции лазерного излучения на аксиконе с числовой апертурой выше предельной [Текст] / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 2. – С. 213-222.
130. **Диткин, В.А.** Интегральные преобразования и операционное исчисление [Текст] / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Физматлит, 1961. – Главы VII, VIII.
131. **Khonina, S.N.** Controlling the contribution of the electric field components to the focus of a high-aperture lens using binary phase structures [Текст] /

- S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // Journal of the Optical Society of America A. – 2010. – Vol. 27(10). – P. 2188-2197.
132. **Huse, N.** Z-polarized confocal microscopy [Текст] / N. Huse, A. Schonle, and S. W. Hell // Journal of Biomedical Optics. – 2001. – Vol. 6. – P. 273-276.
133. **Grosjean, T.** Photopolymers as vectorial sensors of the electric field [Текст] / T. Grosjean and D. Courjon // Opt. Express. – 2006. – Vol. 14. – P. 2203-2210.
134. **Dedecker, P.** Orientational effects in the excitation and de-excitation of single molecules interacting with donut-mode laser beams [Текст] / P. Dedecker, B. Muls, J. Hofkens, J. Enderlein, and J.-I. Hotta // Optics Express – 2007. – Vol. 15. – P. 3372-3383.
135. (\*)**Устинов, А.В.** Фраксикон как гибридный элемент между параболической линзой и линейным аксиконом [Текст] / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 3. – С. 402-411.
136. **Khonina, S.N.** Extended depth of focus through imaging system's phase apodization in coherent and incoherent cases [Текст] / S.N. Khonina, A.S. Demidov // Optical Memory and Neural Networks (Allerton Press). – 2014. – Vol. 23(3). – P. 130-139.
137. (\*)**Устинов, А.В.** Теоретический анализ действия фраксикона с большой глубиной фокуса в рамках волновой модели [Текст] / А.В. Устинов // Известия Самарского научного центра РАН. – 2014. – Т. 16(6). – С. 32-37.
138. (\*)**Хонина, С.Н.** Бинарная линза: исследование локальных фокусов [Текст] / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Р.В. Скиданов // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 3. – С. 339-346.
139. (\*)**Хонина, С.Н.** Пространственно-спектральный анализ бинарных дифракционных оптических элементов, кодированных на основе комплексно-сопряжённого дополнения [Текст] / С.Н. Хонина, А.В. Устинов // Известия Самарского научного центра РАН. – 2014. – № 16(6). – С. 10-18.
140. **Osterberg, H.** Closed solutions of Rayleigh's integral for axial points [Текст] / H. Osterberg, L.W. Smith // J. Opt. Soc. – 1961. – Vol. 51(10). – P. 1050-1054.

141. **Romero, J.A.** Vectorial approach to Huygens's principle for plane waves: circular aperture and zone plates [Текст] / J.A. Romero, L. Hernández // J. Opt. Soc. Am. A. – 2006. – Vol. 23, Issue 5. – P. 1141-1145.
142. (\*)**Хонина С.Н.** Острая фокусировка лазерного излучения с помощью двухзонного аксиального микроэлемента [Текст] / С.Н. Хонина, Д.А. Савельев, А.В. Устинов // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 2. – С. 160-169.
143. **Oskooi, A.F.** Meep: A flexible free-software package for electromagnetic simulations by the FDTD method [Текст] / A.F. Oskooi, D. Roundy, M. Ibanescu, P. Bermel, J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson // Computer Physics Communications. – 2010. – Vol. 181. – P. 687-702.
144. **Савельев, Д.А.** Сравнение моделирования дифракции линейно-поляризованного гауссова пучка на бинарном аксиконе с высокой числовой апертурой интегральным и разностным методами [Текст] / Д.А. Савельев // Известия Самарского научного центра РАН. – 2012. – Т. 14, № 4. – С. 38-46.
145. **Савельев, Д.А.** Максимизация продольной электрической компоненты при дифракции на бинарном аксиконе линейно-поляризованного излучения [Текст] / Д.А. Савельев, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 4. – С. 511-517.
146. **Котляр, В.В.** Моделирование фокусировки линейно поляризованного света с помощью субволнового бинарного аксикона [Текст] / В.В. Котляр, С.С. Стафеев, А.А. Ковалёв, А.Г. Налимов // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 2. – С. 183-189.
147. **Dubra, A.** Diffracted field by an arbitrary aperture [Текст] / A. Dubra and J.A. Ferrari // Am. J. Phys. – 1999. – Vol. 67(1). – P. 87-92.

## ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АСФЕРИЧЕСКИХ ЛИНЗ И МЕТОДОВ ИХ АНАЛИЗА

В основной части диссертации большей частью описывался теоретический анализ действия асферической линзы как рефракционного или дифракционного оптического элемента (ДОЭ). Здесь рассмотрим некоторые примеры применения предложенного в предыдущих главах математического аппарата для реальных оптических элементов, не всегда являющихся асферическими линзами.

### П.1 Исследование локальных фокусов бинарной линзы

В предшествующих рассуждениях фаза асферической линзы при её изготовлении в виде ДОЭ предполагалась гладкой – скачки высоты рельефа имеют место только там, где фаза переходит через значение, кратное  $2\pi$ . Однако в изготовлении проще бинарный ДОЭ, который имеет только два значения фазы. В отличие от рефракционной линзы (или гладкого ДОЭ) бинарная линза имеет множество локальных фокусов. Это явление не всегда является недостатком: дополнительные порядки дифракции в ряде случаев можно полезно применить, примеры имеются в [112, 138\*].

В данном параграфе в рамках скалярной теории (как параксиальной, так и непараксиальной) исследуются такие характеристики локальных фокусов, как размер фокального пятна и его интенсивность. Более подробное изложение дано в [138\*].

**П.1.1 Параксиальный анализ осевого распределения  
для осесимметричных оптических элементов с кусочно-постоянной  
функцией пропускания**

Распространение поля  $\tau(r)$ , обладающего осевой симметрией, в параксиальном приближении описывается с помощью преобразования Френеля (\*) в пункте 2.1 (повторим формулу для наглядности):

$$F(\rho, z) = \frac{k}{iz} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \times \int_0^R \tau(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_0\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr, \quad (\text{П.1})$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны излучения,  $R$  – радиус входной апертуры.

Если  $\tau(r)$  принимает кусочно-постоянные значения:

$$\tau(r) = \begin{cases} a_n, & r_n \leq r < r_{n+1}, \\ 0, & r < r_0, r \geq r_N = R, \end{cases} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (\text{П.2})$$

то на оптической оси имеем выражение:

$$F_\tau(0, z) = \frac{k}{iz} \exp(ikz) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_{r_n}^{r_{n+1}} \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) r dr, \quad (\text{П.3})$$

которое можно вычислить аналитически. Оно равно

$$F_\tau(0, z) = \frac{k}{iz} \exp(ikz) \frac{2z}{2ik} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \left[ \exp\left(\frac{ikr_{n+1}^2}{2z}\right) - \exp\left(\frac{ikr_n^2}{2z}\right) \right] = \exp(ikz) \left\{ a_0 \exp\left(\frac{ikr_0^2}{2z}\right) - a_{N-1} \exp\left(\frac{ikr_N^2}{2z}\right) + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n-1}) \exp\left(\frac{ikr_n^2}{2z}\right) \right\}. \quad (\text{П.4})$$

Из (П.4) следует, что если все  $a_n$  равны некоторой константе  $a$  (соответствует кольцевому отверстию с радиусами  $r_0$  и  $r_N$ ), то сумма обнуляется:

$$F(0, z) = a \exp(ikz) \left\{ \exp\left(\frac{ikr_0^2}{2z}\right) - \exp\left(\frac{ikr_N^2}{2z}\right) \right\} = -2ia \exp(ikz) \exp\left(\frac{ik(r_N^2 + r_0^2)}{4z}\right) \times \sin\left(\frac{k(r_N^2 - r_0^2)}{4z}\right). \quad (\text{П.5})$$

Таким образом, в параксиальном случае любое кольцевое отверстие с постоянной пропускающей функцией приводит к формированию осциллирующего с постоянной амплитудой осевого распределения с нулевыми значениями в точках  $z_m^0 = (r_N^2 - r_0^2)/2m\lambda$  и максимумами при  $z_m^1 = (r_N^2 - r_0^2)/[(2m+1)\lambda]$ , где  $m$  – целое. «Последний» максимум будет располагаться на расстоянии  $z_0^1 = (r_N^2 - r_0^2)/\lambda$  от входной плоскости.

Если функция пропускания входного поля (П.2) имеет только два значения внутри области радиуса  $R$ , например, когда бинарный фазовый или амплитудный оптический элемент освещается равномерным излучением, то выражение (П.4) примет следующий вид для бинарного фазового элемента:

$$F_{ph}(0, z) = \exp(ikz) \left[ \begin{array}{l} -\exp\left(\frac{ikr_0^2}{2z}\right) + (-1)^{N+1} \exp\left(\frac{ikr_N^2}{2z}\right) + \\ + 2 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n+1} \exp\left(\frac{ikr_n^2}{2z}\right) \end{array} \right], a_0 = -1 \quad (\text{П.6})$$

и для бинарного амплитудного элемента:

$$F_{amp}(0, z) = \exp(ikz) \left[ \begin{array}{l} \exp\left(\frac{ikr_0^2}{2z}\right) + \frac{1 - (-1)^{N+1}}{2} \exp\left(\frac{ikr_N^2}{2z}\right) + \\ \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \exp\left(\frac{ikr_n^2}{2z}\right) \end{array} \right], a_0 = 1. \quad (\text{П.7})$$

Как видно из сравнения выражений (П.6) и (П.7), вклад суммы при использовании фазового элемента удваивается.

### П.1.2 Анализ осевого распределения для бинарной линзы

Бинарный аналог непрерывной фазовой функции пропускания оптического элемента с фазой  $\psi(r)$  можно представить для фазового элемента:

$$\tau_{ph}(r) = \exp\left[i\frac{\pi}{2}\{1 - \text{sgn}(\sin[\psi(r)])\}\right] = \begin{cases} 1, & \sin[\psi(r)] > 0, \\ -1, & \sin[\psi(r)] \leq 0, \end{cases} \quad (\text{П.8})$$

и для амплитудного элемента:

$$\tau_{amp}(r) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{sgn}(\sin[\psi(r)]) \right\} = \begin{cases} 1, & \sin[\psi(r)] > 0, \\ 0, & \sin[\psi(r)] \leq 0. \end{cases} \quad (\text{П.9})$$

Позиции фазовых скачков между значениями 0 и  $\pi$  фазового элемента, а также между пропускающими и поглощающими зонами амплитудного элемента, вычисляются из уравнения:

$$\sin[\psi(r)] = 0 \Rightarrow \psi(r) = \pi n. \quad (\text{П.10})$$

Для (параксиальной) параболической линзы с фокусным расстоянием  $f$  фаза  $\psi(r) = -kr^2 / 2f$ , и радиусы зон равны:

$$r_n^2 = 2\pi n f / k = n\lambda f. \quad (\text{П.11})$$

В соответствии с формулами, полученными в п. П.1.1, бинарная фазовая линза будет формировать следующее осевое распределение ( $r_0 = 0$ ,  $r_N = R$ ):

$$F_{phL}(0, z) = \exp(ikz) \left\{ -1 + (-1)^{N+1} \exp\left(\frac{ikR^2}{2z}\right) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n+1} \exp\left(\frac{i\pi n f}{z}\right) \right\}. \quad (\text{П.12})$$

Далее будем считать что число зон  $N$  достаточно велико, поэтому в (П.12) можно рассматривать только последний член в фигурных скобках. Экстремальные значения модуля этой суммы достигаются в точках локальных фокусов  $z_m = f / m$ :

$$F_{phL}(0, z_m) = \exp(ikz_m) \left\{ -1 + (-1)^{N+1} \exp\left(\frac{ikR^2}{2z_m}\right) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n+1} \exp(i\pi n m) \right\}. \quad (\text{П.13})$$

Независимо от чётности числа зон  $N$  в выражении (П.13) модуль суммы будет минимальным при чётных  $m$  ( $\exp(i\pi n m) = 1$ ) и максимальным при нечётных  $m$  ( $\exp(i\pi n m) = (-1)^n$ ):

$$2 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n+1} \exp(i\pi n m) = \begin{cases} 1 - (-1)^{N+1}, & m - \text{чётные}, \\ -2(N-1), & m - \text{нечётные}. \end{cases}$$

Аналогичный результат получается для амплитудной бинарной линзы:

$$F_{ampL}(0, z_m) = \exp(ikz_m) \left\{ 1 + \frac{1 - (-1)^{N+1}}{2} \exp\left(\frac{ikR^2}{2z_m}\right) + \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \exp(i\pi n t) \right\}, \quad (\text{П.14})$$

где 
$$\sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \exp(i\pi n t) = \begin{cases} t - \text{чѐтные}: -1 \text{ при } N \text{ чѐтным}; 0 \text{ при } N \text{ нечѐтным} \\ (N-1), t - \text{нечѐтные}. \end{cases}$$

В этом случае значения интенсивности в локальных фокусах будут в 4 раза меньше, чем для фазового элемента.

Получаем, что в параксиальном случае амплитуда всех локальных фокусов имеет одинаковое значение. Это не соответствует реальности при приближении к плоскости оптического элемента. Граница верности параксиального приближения и необходимые поправки имеются в [138\*] и будут приведены в пункте П.1.4.

### ***П.1.3 Анализ осевого распределения для бинарной асферической линзы***

Для бинарной обобщѐнной линзы сохраняет справедливость формула (П.10). Поэтому достаточно использовать фазу произвольной обобщѐнной линзы  $\psi(r) = -(k\alpha_0 r)^\gamma$ , откуда получаем радиусы колец:

$$r_n^2 = (\pi n)^{2/\gamma} / (k\alpha_0)^2. \quad (\text{П.15})$$

Подставим эти значения в (П.6) и далее ограничимся суммой

$$S = 2 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \exp\left(\frac{i\pi^{2/\gamma} n^{2/\gamma}}{2k\alpha_0^2 z}\right), \quad (\text{П.16})$$

так как вклад остальных слагаемых невелик.

Рассмотрим свойства этого выражения. Так же, как и для линзы, минимальное (по модулю) значение этой суммы равно 0 или 1, максимальное  $2(N-1)$ . Минимум будет, если все экспоненциальные множители равны единице, а максимум, если равны  $(-1)^n$ . Для возможности этого необходимо выполнение условия: чѐтность  $n^{2/\gamma}$  должна совпадать с чѐтностью  $n$ , что

возможно только когда  $2/\gamma$  есть целое число. Пусть это требование выполнено. Тогда минимум достигается при  $\pi^{2/\gamma}/(2k\alpha_0^2 z) = 2\pi m$  или при

$$z^{(\min)} = \frac{\lambda}{m\alpha_0^2} \frac{\pi^{(2/\gamma)-2}}{8}, \quad (\text{П.17а})$$

а максимум при  $\pi^{2/\gamma}/(2k\alpha_0^2 z) = \pi + 2\pi m$  или при

$$z^{(\max)} = \frac{\lambda}{(m+1/2)\alpha_0^2} \frac{\pi^{(2/\gamma)-2}}{8}. \quad (\text{П.17б})$$

Эти позиции из (П.17б) можно назвать локальными фокусами. Получаем, что зависимость положения фокусов от их номера одинаковая для всех (допустимых) значений параметра  $\gamma$ , который влияет только на масштаб.

Условие целости числа  $2/\gamma$  накладывает жёсткое ограничение на величину  $\gamma$ : можно использовать только  $\gamma=2$  (линза),  $\gamma=1$  (аксикон) и бесконечный ряд значений  $\gamma$ , меньших единицы. Если же условие целости не выполнено, то мы не сможем синхронизировать фазы всех слагаемых в сумме (П.16), что приведёт к падению контраста картины: минимумы будут больше нуля, а максимумы меньше  $2(N-1)$ . Также вышеприведённое рассуждение показывает, что даже при допустимых величинах  $\gamma$  равенства (П.17) дают положение далеко не всех максимумов и минимумов. Случай линзы является исключением (равенства (П.17) являются исчерпывающими), так как её фокус является точечным. Остальные допустимые элементы дают протяжённый фокус, и формируют множество экстремумов кроме задаваемых равенствами (П.17). Подробнее об этом сказано в [139\*]. Более того, при допустимых значениях  $\gamma$ , меньших единицы, вполне возможно, что экстремумы (П.17) вообще нереальны: при малых  $\gamma$  значения  $\alpha_0$  велики, и вычисленные позиции не попадают в область параксиальности.

### П.1.4 Анализ для бинарной линзы в непараксиальном случае

В непараксиальном случае можно воспользоваться интегральным преобразованием Рэлея-Зоммерфельда первого типа:

$$E(u, v, z) = -\frac{z}{2\pi} \iint_{\Sigma_0} E_0(x, y) \frac{e^{ik\ell}}{\ell^2} \left( ik - \frac{1}{\ell} \right) dx dy, \quad \text{где } E_0(x, y) \text{ – входное поле, } \Sigma_0 \text{ –}$$

область, в которой задано входное поле,  $\ell = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + z^2}$ .

Для осевого распределения при дифракции плоской волны на круглом отверстии радиусом  $R$  известно аналитическое выражение [140, 141, 147]:

$$F_R(0, z) = \exp(ikz) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \exp\left(ik\sqrt{R^2 + z^2}\right), \quad (\text{П.18})$$

из которого получаем выражение для случая дифракции на кольце с радиусами  $a$  и  $b$ :

$$F_{ab}(0, z) = z \left[ \frac{\exp\left(ik\sqrt{a^2 + z^2}\right)}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{\exp\left(ik\sqrt{b^2 + z^2}\right)}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]. \quad (\text{П.18a})$$

Для кусочно-постоянного элемента (П.2):

$$F_\tau(0, z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \times \left[ \frac{\exp\left(ikz\sqrt{1 + r_n^2/z^2}\right)}{\sqrt{1 + r_n^2/z^2}} - \frac{\exp\left(ikz\sqrt{1 + r_{n+1}^2/z^2}\right)}{\sqrt{1 + r_{n+1}^2/z^2}} \right]. \quad (\text{П.19})$$

Для фазовой бинарной линзы  $a_n = (-1)^{n+1}$ ,  $r_n^2 = n\lambda f$ , при  $z_m = f/m$  получим  $\frac{r_n^2}{z_m^2} = \frac{\lambda n m^2}{f}$  и следующее осевое распределение:

$$F_{phL}(0, z_m) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{n+1} \left[ \frac{\exp\left(\frac{ikf}{m} \sqrt{1 + \frac{\lambda n m^2}{f}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{\lambda n m^2}{f}}} - \frac{\exp\left(\frac{ikf}{m} \sqrt{1 + \frac{\lambda(n+1)m^2}{f}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{\lambda(n+1)m^2}{f}}} \right] \quad (\text{П.20})$$

Рассмотрим случай, когда  $(kf/m)(\lambda Nm^2/f)^2 < \pi$ , т.е.

$m < (\lambda/2R)^{1/3} (f/R)$ , что соответствует ближайшим к основному локальным фокусам. Для данного случая граница вдоль оптической оси определяется аналогичным выражением:  $z_p = R(2R/\lambda)^{1/3}$ .

Для длиннофокусной линзы с невысокой числовой апертурой (например,  $NA = 0,01$ ) отношение  $f/R \sim 100$  и число включённых в рассмотрение локальных фокусов будет значительно, особенно для микроэлементов.

Для данного случая можно применить приближение  $\sqrt{1 + \lambda Nm^2/f} \approx 1 + \lambda Nm^2/(2f)$  (погрешность которого для  $n < N$  будет ещё меньше), и тогда выражение в (П.20) примет следующий вид:

$$F_{phL}(0, z_m > z_p) = \exp(ikz_m) \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{n+1} \exp(i\pi nm) \times \left[ \frac{1}{1 + \lambda nm^2/2f} - \frac{\exp(i\pi m)}{1 + \lambda(n+1)m^2/2f} \right]. \quad (\text{П.21})$$

Для чётных  $m$  фазовые множители внутри суммы примут единичное значение, и выражения в квадратных скобках можно приблизить как:

$$\left[ \frac{1}{1 + \lambda nm^2/2f} - \frac{1}{1 + \lambda(n+1)m^2/2f} \right] \approx \frac{\lambda m^2}{2f} \cdot \frac{1}{1 + \lambda(2n+1)m^2/2f}.$$

Для нечётных  $m$  можно провести аналогичные рассуждения. В результате получим:

$$F_{phL}(0, z_m > z_p) \approx \exp(ikz_m) \times \begin{cases} \frac{\lambda m^2}{2f} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{1 + \lambda(2n+1)m^2/2f}, & m - \text{чётное,} \\ 2 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{1 + \lambda nm^2/2f}, & m - \text{нечётное.} \end{cases} \quad (\text{П.22})$$

Заметим, что при чётных  $m$  на оптической оси теперь ненулевое (хотя и малое) значение, которое увеличивается с ростом  $m$ . Значения в нечётных локальных фокусах медленно убывают с ростом  $m$ .

Для выражения (П.22) (без фазового множителя) можно дать оценки сверху и снизу:

$$L(z_m) < \tilde{F}_{phL}(0, z_m > z_p) < R(z_m), \text{ где}$$

$$L(z_m) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda m^2}{f + \lambda m^2} \right)^2, & m - \text{чётное,} \\ 2N \frac{2f}{(2f + \lambda N m^2)}, & m - \text{нечётное,} \end{cases} \quad R(z_m) = \begin{cases} \frac{\lambda m^2}{2f + \lambda m^2}, & m - \text{чётное,} \\ 2N, & m - \text{нечётное.} \end{cases}$$

Отношение локальных фокусов к глобальному по нижней границе:

$$\eta_m = \frac{2f + \lambda N}{2f + \lambda N m^2} = \frac{1 + R^2 / 2f^2}{1 + R^2 m^2 / 2f^2}. \quad (\text{П.23})$$

В частности, при  $f / R = 100$   $\eta_m = \frac{1 + 5 \cdot 10^{-5}}{1 + 5m^2 10^{-5}} \sim 1$  при  $m < 10$ . Конкретнее, при  $m = 9$   $\eta_9 \approx 0,99$ .

Таким образом, для линзы с низкой числовой апертурой значительное число локальных фокусов имеют практически такую же интенсивность, как и основной фокус. Однако в области, близкой к оптическому элементу, нельзя использовать параксиальное приближение. В этом случае выражение (П.19) удобнее записать в следующем виде (первое слагаемое суммы исключим, так как его нельзя записать в нужном виде и оно мало):

$$F_\tau(0, z) = z \sum_{n=1}^{N-1} a_n \times \left[ \frac{\exp\left(ikr_n \sqrt{1 + \frac{z^2}{r_n^2}}\right)}{r_n \sqrt{1 + \frac{z^2}{r_n^2}}} - \frac{\exp\left(ikr_{n+1} \sqrt{1 + \frac{z^2}{r_{n+1}^2}}\right)}{r_{n+1} \sqrt{1 + \frac{z^2}{r_{n+1}^2}}} \right]. \quad (\text{П.24})$$

Учитывая близость к оптическому элементу  $r_n \sqrt{1 + z^2 / r_n^2} \approx r_n + z^2 / (2r_n)$ , тогда

$$\text{для бинарной линзы в локальных экстремумах } r_n + z_m^2 / (2r_n) = \frac{f(2m^2 n \lambda + f)}{2m^2 \sqrt{n \lambda f}},$$

и амплитуда на оптической оси:

$$\begin{aligned}
F_{phL}(0, z_m) = & \\
= 2m\sqrt{\lambda f} \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \times & \left\{ \frac{\sqrt{n}}{2m^2 n\lambda + f} \exp \left[ ik \left( \sqrt{n\lambda f} + \frac{f^2}{2m^2 \sqrt{n\lambda f}} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{\sqrt{n+1}}{2m^2 (n+1)\lambda + f} \exp \left[ ik \left( \sqrt{(n+1)\lambda f} + \frac{f^2}{2m^2 \sqrt{(n+1)\lambda f}} \right) \right] \right\}. \quad (П.25)
\end{aligned}$$

Приближённо модуль выражения (П.25) можно оценить как модуль первого слагаемого:

$$|F_{phL}(0, z_m)| < 2m\sqrt{\lambda f} \frac{2}{2m^2\lambda + f} \sim \frac{2}{m} \sqrt{\frac{f}{\lambda}}, \quad (П.26)$$

то есть интенсивность будет уменьшаться обратно пропорционально  $m^2$ .

### ***П.1.5 Численное моделирование для фазовой бинарной линзы***

Численное моделирование для линзы радиусом  $R = 1$  мм и фокусным расстоянием  $f = 100$  мм проводилось с помощью расчёта преобразования Френеля (П.1) и непараксиального распространения через угловой спектр, который полностью соответствует интегралу Рэлея-Зоммерфельда, но в условиях радиальной симметрии задачи позволяет сократить время вычислений [83\*]. Длина волны была принята  $\lambda = 532$  нм.

На рисунке П.1 показаны результаты моделирования в рамках параксиального приближения для многоуровневой линзы, фаза которой представлена на рисунке П.1а, и бинарной линзы, фаза которой представлена на рисунке П.1б. Радиальные сечения фазовых распределений показаны на рисунке П.1в. Осевое распределение интенсивности, формируемое каждой из линз, приведено на рисунке П.1г.

Как видно из рисунка П.1, многоуровневая дифракционная линза не имеет дополнительных фокусов. Бинарная же линза имеет множество локальных фокусов, интенсивности которых равны. Интенсивность основного

фокуса бинарной линзы составляет примерно 41% от интенсивности фокуса многоуровневой линзы. Локальные фокусы располагаются в плоскостях  $z_m = f / m$ ,  $m$  – нечётное.

При использовании непараксиальной модели значение интенсивности в локальных фокусах перестаёт сохраняться при приближении к плоскости оптического элемента. Интенсивность локальных фокусов примерно одинаковая вплоть до  $m = 7$  (рисунок П.2а). Начиная с локального фокуса с  $m = 13$ , наблюдается заметное падение интенсивности (рисунок П.2б).

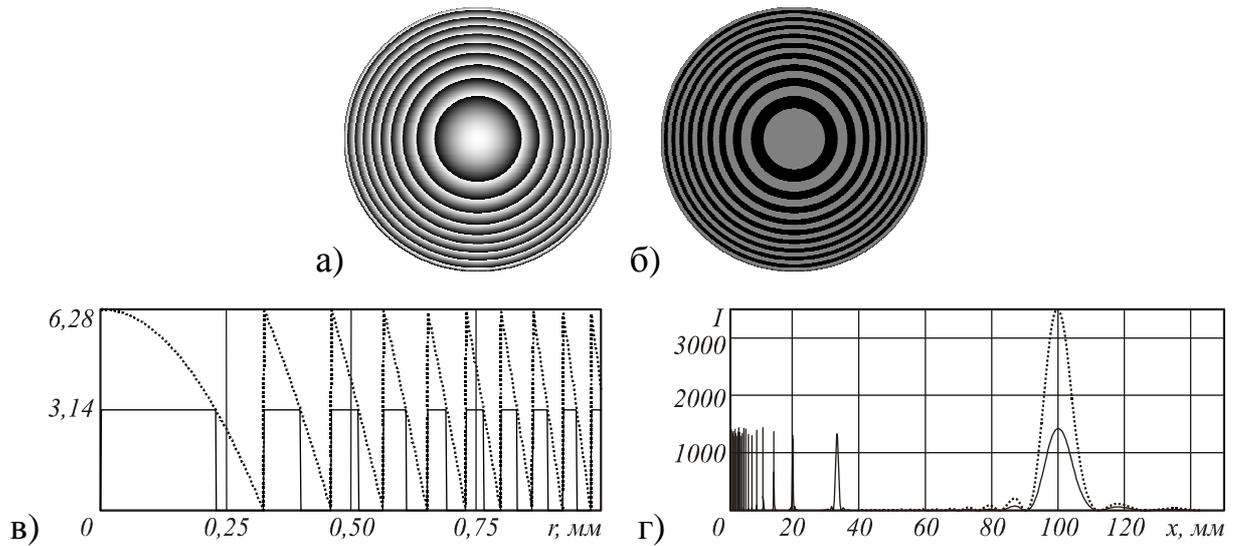


Рисунок П.1 – Результаты параксиального моделирования: фаза многоуровневой линзы (а), фаза бинарной линзы (б), радиальные сечения фазовых распределений (в), осевое распределение интенсивности, формируемое каждой из линз (г) (в, г: точечная линия – для многоуровневой линзы, сплошная линия – для бинарной линзы)

Таким образом, результаты моделирования подтверждают аналитические выкладки, приведённые выше.

Характеристики локальных фокусов в рамках непараксиальной модели по отношению к основному фокусу, включая интенсивность, продольную ширину по полуспаду интенсивности (FWHM<sub>l</sub>) и поперечную ширину по полуспаду интенсивности (FWHM<sub>t</sub>), приведены в таблице П.1.

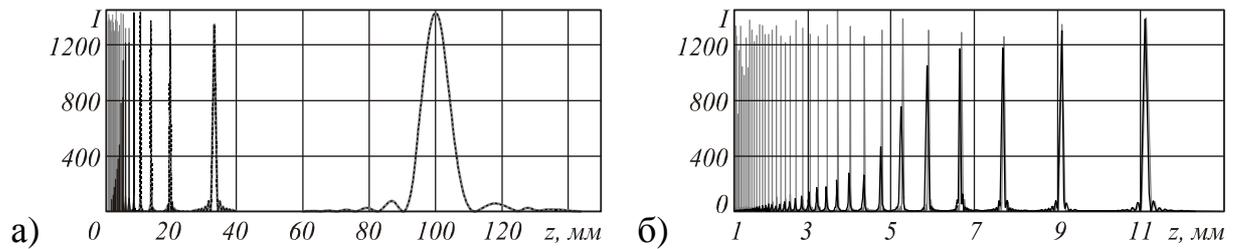


Рисунок П.2 – Сравнение осевого распределения интенсивности, формируемого бинарной линзой в рамках параксиальной (серая линия) и непараксиальной (чёрная линия) моделей: вблизи основного фокуса (а) и вблизи оптического элемента (б)

Как видно из рисунка П.2б, в непараксиальной модели положения локальных фокусов несколько смещаются к плоскости оптического элемента. В таблице П.1 приведены результаты с учётом этого смещения.

Таблица П.1 – Сравнительные характеристики локальных фокусов в рамках непараксиальной модели по отношению к основному фокусу (FWHM<sub>l</sub>= 9,357 мм, FWHM<sub>t</sub> = 0,028 мм)

<i>M</i>	Положение, мм	Относительная интенсивность	Относительная FWHM <sub>l</sub>	Относительная FWHM <sub>t</sub>
<b>1</b>	100,00	1,000	1,0000	1,0000
<b>3</b>	33,33	0,999	0,1144	0,3321
<b>5</b>	20,00	0,998	0,0423	0,2001
<b>7</b>	14,27	0,996	0,0209	0,1419
<b>9</b>	11,09	0,991	0,0124	0,1089
<b>11</b>	9,06	0,958	0,0084	0,0898
<b>13</b>	7,66	0,861	0,0063	0,0764
<b>15</b>	6,63	0,824	0,0047	0,0659
<b>17</b>	5,84	0,766	0,0037	0,0572
<b>19</b>	5,22	0,557	0,0036	0,0511
<b>21</b>	4,71	0,328	0,0045	0,0485
<b>23</b>	4,27	0,254	0,0046	0,0365
<b>25</b>	3,92	0,216	0,0046	0,0339

Из таблицы П.1 можно заметить, что уменьшение продольной ширины фокусов происходит значительно быстрее, чем поперечной. Однако с некоторого момента продольный размер перестаёт уменьшаться.

Вплоть до локального фокуса с номером  $m = 21$  поперечный размер светового пятна уменьшается пропорционально номеру фокуса, однако это компенсирует падение энергии фокального пятна лишь до фокуса с номером  $m = 7$ . Это значит, что далее мы выходим из области параксиальности, которая определяется границей  $z_p = R\sqrt[3]{2R/\lambda} \approx 15$  мм, и попадаем в промежуточную зону - зону между зоной параксиальности и зоной, в которой начинается падение интенсивности пропорционально квадрату номера. Такой закон падения интенсивности наблюдается, если расстояние до оптического элемента менее радиуса элемента. В этом случае радиусы локальных фокусов перестанут уменьшаться (рисунок П.3в).

Итак, можно выделить три зоны вдоль оптической оси, соответствующие различным соотношениям интенсивности в локальных фокусах:

- 1) зона одинаковой интенсивности,  $z > z_p = R\left(\frac{2R}{\lambda}\right)^{1/3}$ ,
- 2) зона приближённо линейного падения интенсивности,  $R < z < z_p$ ,
- 3) зона падения интенсивности пропорционально квадрату номера фокуса,  $z < R$ .

### ***П.1.6 Экспериментальные результаты***

Экспериментальные результаты были получены с помощью фазовой бинарной маски, выведенной на динамическом транспаранте CLR OPTO. Маска размерностью  $1024 \times 1024$  отсчёта рассчитана для радиуса  $R = 7,5$  мм и фокального расстояния  $f = 2000$  мм. Для освещения использовалось лазерное излучение с длиной волны  $\lambda = 532$  нм.

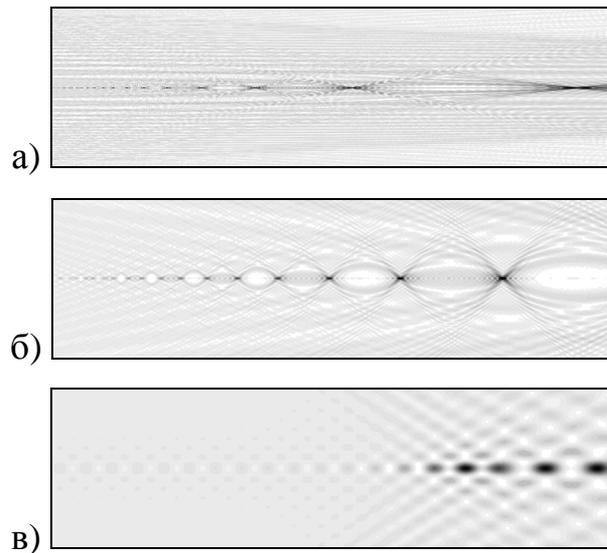


Рисунок П.3 – Различные зоны на оптической оси: зона сохранения интенсивности в локальных фокусах (а), зона линейного падения (б), зона квадратичного падения (в)

На рисунках П.4, П.5 представлены результаты, зафиксированные в основном и ближайшем локальном фокусах бинарной фазовой линзы. Видно, что происходит уменьшение размера фокального пятна при небольшом уменьшении интенсивности. Положения фокусов оказались несколько сдвинуты от плоскости элемента из-за небольшой расходимости освещающего транспарант лазерного пучка.

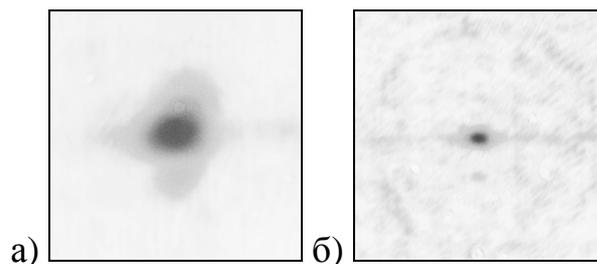


Рисунок П.4 – Экспериментально зафиксированные распределения интенсивности (негатив) в основном и ближайшем локальном фокусах бинарной фазовой линзы:  $z_1=2010$  мм (а),  $z_3=670$  мм (б)

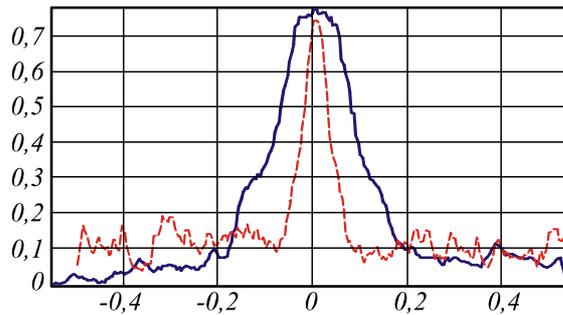


Рисунок П.5 – Сечения экспериментальных интенсивностей в основном и ближайшем локальном фокусах бинарной фазовой линзы:

$z_1=2010$  мм (синяя линия),  $z_3=670$  мм (красная линия)

В таблице П.2 приведены сравнительные характеристики фокусов, полученные в эксперименте и при численном моделировании (экспериментальные результаты приведены перед разделителем с указанием погрешности измерений, численные – после разделителя).

Эффективность рассчитывалась как отношение энергии в фокальном пятне к общей энергии, падающей на бинарную линзу. Как видно, она падает пропорционально квадрату номера локального фокуса. Однако за счёт того, что радиус локальных фокусов также уменьшается пропорционально номеру фокуса, интенсивность остаётся близкой к значению в основном фокусе.

Наблюдается достаточное согласование численных и экспериментальных результатов: пропорциональное уменьшение размеров локального фокуса по сравнению с основным. Размер фокусов в эксперименте оказался несколько больше ожидаемого, что связано со сложностью юстировки при использовании динамического транспаранта и с низким разрешением камеры. В дальнейшем планируется выполнить эксперименты с дифракционным оптическим элементом на кварцевой подложке.

Таким образом, аналитические выкладки для параксиального случая подтверждаются не только численными, но и экспериментальными результатами.

Таблица П.2 – Сравнительные характеристики локальных фокусов, полученные в эксперименте и при численном моделировании

<i>M</i>	Положение, мм	Относительная интенсивность	FWHM <sub>t</sub> , мм	Эффективность, %
<b>1</b>	2010±10 / 2000	1,00 / 1,00	0,18±0,03 / 0,142	31,46 / 26,43
<b>3</b>	670±10 / 667	0,95 / 0,99	0,07±0,02 / 0,047	2,51 / 2,81

## **П.2 Острая фокусировка лазерного излучения с помощью двухзонного аксиального микроэлемента**

В предыдущем разделе описывалось действие бинарного оптического элемента, в частности, бинарной линзы. Позиции скачков фазы выбирались из условия приближения непрерывной функции пропускания оптического элемента. Линзе при этом соответствует зонная пластинка.

Однако зонная пластинка с предельной для свободного пространства числовой апертурой имеет центральную зону радиусом  $r_1 = 1,12\lambda$ , а остальные зоны представляют собой кольца шириной менее  $\lambda/2$ . Уменьшение центральной зоны такого элемента соответствует уменьшению фокусного расстояния и дальнейшему уменьшению размеров периферийных зон. В таком случае через эту часть оптического элемента проходят только затухающие волны, которые не будут существенно влиять на распределение вблизи оптической оси. Таким образом, можно вовсе отказаться от рельефа в периферийной части и рассматривать влияние только одной - двух центральных зон.

Отметим, что структура периферийной части зонной пластинки с коротким фокусом приближается к виду аксикона, т.е. кольца становятся равной ширины. Фактически отличие аксикона с высокой числовой апертурой и зонной пластинки с коротким фокусом определяется только центральной частью. Таким образом, влияние размера центральной части микроэлемента является очень важным при фокусировке в ближней зоне. Поэтому в данном параграфе исследуется возможность фокусировки лазерного излучения с по-

мощью микроэлемента, состоящего из двух центральных зон, разность фаз в которых составляет  $\pi$  радиан; радиусы зон считаются произвольными.

### П.2.1 Анализ в приближении тонкого элемента

При дифракции плоской волны на круглом отверстии радиусом  $R$  для осевого распределения известно аналитическое выражение [140, 141, 147]:

$$F_R(0, z) = \exp(ikz) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \exp\left(ik\sqrt{R^2 + z^2}\right). \quad (\text{П.27})$$

Также можно получить аналитический вид для случая дифракции на оптическом элементе, состоящем из нескольких кольцевых зон [138\*]:

$$F_N(0, z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \times \left[ \frac{\exp\left(ikz\sqrt{1+r_n^2/z^2}\right)}{\sqrt{1+r_n^2/z^2}} - \frac{\exp\left(ikz\sqrt{1+r_{n+1}^2/z^2}\right)}{\sqrt{1+r_{n+1}^2/z^2}} \right]. \quad (\text{П.28})$$

Для элемента, состоящего из двух зон, причём  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 1$ , выражение (П.28) принимает следующий вид:

$$F_2(0, z) = \frac{2\exp\left(ikz\sqrt{1+r_1^2/z^2}\right)}{\sqrt{1+r_1^2/z^2}} - \exp(ikz) - \frac{\exp\left(ikz\sqrt{1+R^2/z^2}\right)}{\sqrt{1+R^2/z^2}}. \quad (\text{П.29})$$

Интенсивность для выражения (П.29) имеет вид:

$$\begin{aligned} I(0, z) = & 1 + \frac{4}{1+r_1^2/z^2} + \frac{1}{1+R^2/z^2} - \frac{4}{\sqrt{1+r_1^2/z^2}} \cos\left[kz\left(\sqrt{1+r_1^2/z^2} - 1\right)\right] - \\ & - \frac{4}{\sqrt{1+r_1^2/z^2}\sqrt{1+R^2/z^2}} \times \cos\left[kz\left(\sqrt{1+R^2/z^2} - \sqrt{1+r_1^2/z^2}\right)\right] + \\ & + \frac{2}{\sqrt{1+R^2/z^2}} \cos\left[kz\left(\sqrt{1+R^2/z^2} - 1\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{П.30})$$

Приблизённо максимум достигается, когда косинусы с отрицательными коэффициентами принимают минимально возможные значения, а косинус с положительным коэффициентом – максимально возможное:

$$\begin{aligned} \cos\left(k\sqrt{z^2 + r_1^2} - kz\right) &= -1, & \cos\left(k\sqrt{z^2 + R^2} - k\sqrt{z^2 + r_1^2}\right) &= -1, \\ \cos\left(k\sqrt{z^2 + R^2} - kz\right) &= 1. \end{aligned} \quad (\text{П.31})$$

Из выражений (П.31) следуют условия на аргументы:

$$\begin{aligned} 2\left(\sqrt{z^2 + r_1^2} - z\right) &= (2m_1 + 1)\lambda, & 2\left(\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2 + r_1^2}\right) &= (2m_2 + 1)\lambda, \\ \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right) &= m_3\lambda. \end{aligned} \quad (\text{П.32})$$

Если условия (П.32) выполнены, то интенсивность в максимумах имеет следующую зависимость от расстояния:

$$I_{\text{mx}}(0, z) = \left(1 + \frac{2z}{\sqrt{z^2 + r_1^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)^2, \quad (\text{П.33})$$

$$\frac{d\sqrt{I_{\text{mx}}(0, z)}}{dz} = \frac{2r_1^2}{(z^2 + r_1^2)^{3/2}} + \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} > 0. \quad (\text{П.34})$$

Из (П.34) следует, что с ростом расстояния  $z$  максимумы растут. Это не противоречит условию  $I(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , так как после некоторого расстояния интерференционные максимумы исчезают (условия (П.31), (П.32) перестают выполняться).

Так как левые части в равенствах (П.32) убывают с ростом  $z$ , наибольший интерференционный максимум достигается при  $m_1 = m_2 = 0, m_3 = 1$ :

$$\lambda z_1 = r_1^2 - \lambda^2/4, \quad \lambda z_3 = (R^2 - \lambda^2)/2. \quad (\text{П.35})$$

Равенство  $z_1 = z_3$  обеспечивается при

$$R^2 = 2r_1^2 + \lambda^2/2. \quad (\text{П.36})$$

Для других интерференционных максимумов можно выписать аналогичное соотношение в общем виде:

$$(2m_1 + 1)\lambda z_1 = r_1^2 - (2m_1 + 1)^2 \lambda^2/4, \quad m_3 \lambda z_3 = (R^2 - (m_3 \lambda)^2)/2. \quad (\text{П.37})$$

Совпадение положений будет при следующем соотношении радиусов внутренней и внешней зон:

$$R^2 = 2m_3 \left[ \frac{r_1^2}{(2m_1 + 1)} + (2m_3 - 2m_1 - 1)\lambda^2/4 \right]. \quad (\text{П.38})$$

Заметим, что данное соотношение радиусов соответствует зонной пластинке.

Наибольший номер максимума получается из условия (с учётом  $r_1 < R$ ):

$$m_1 < \frac{r_1}{\lambda} - \frac{1}{2}, \quad (\text{П.39})$$

откуда следует, что если  $r_1 < 1,5\lambda$ , то интерференционный максимум будет только один, а если  $r_1 < \lambda/2$ , то центральная зона не будет давать вклада в дифракционную картину, точнее не будет максимума со значением (П.33).

### ***П.2.2 Численный расчёт в приближении тонкого элемента***

Для верификации полученных в предыдущем разделе аналитических выражений были выполнены численные расчёты осевой интенсивности плоской волны, прошедшей через оптический элемент следующего вида:

$$\tau(r) = \begin{cases} \exp(i\pi), & r \leq r_1, \\ 1, & r_1 < r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (\text{П.40})$$

В расчётах использовался быстрый алгоритм, разработанный в [80\*]. Этот алгоритм основан на методе разложения по плоским волнам и позволяет учитывать радиальную симметрию задачи, а также коэффициенты пропускания Френеля. При моделировании использовались следующие параметры: длина волны излучения  $\lambda = 0,532$  мкм, показатель преломления оптического элемента  $n = 2$ .

На рисунке П.6 приведены результаты моделирования при падении плоской волны с линейной у-поляризацией на элемент (П.40) с  $r_1 = 5\lambda$ . Для сравнения полный радиус элемента был выбран из условия соответствия максимумов (П.36)  $R = 7,11\lambda$  (сплошная линия на рисунке П.6) и несколько большим  $R = 10\lambda$  (пунктирная линия на рисунке П.6).

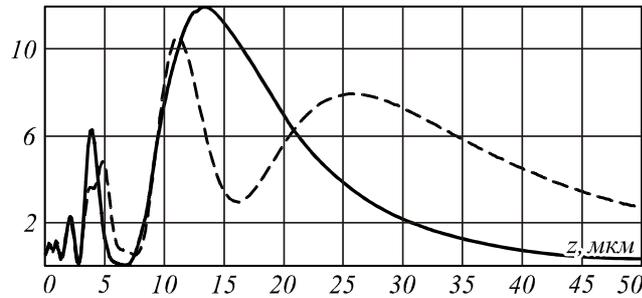


Рисунок П.6. Осевое распределение интенсивности при  $r_1 = 5\lambda$  для согласованного с (П.36) радиуса  $R = 7,11\lambda$  (сплошная линия) и большего радиуса  $R = 10\lambda$  (пунктирная линия)

Результаты численного моделирования показывают, что большее значение максимума достигается при согласовании радиусов внутренней и внешней зоны элемента (П.40) в соответствии с аналитическими выкладками предыдущего раздела.

В соответствии с формулой (П.35) расстояние, на котором должен формироваться наибольший интерференционный максимум, равно

$$z_{mx} = 24,75\lambda = 13,17 \text{ мкм.}$$

В соответствии с выражением (П.33) и учётом коэффициента пропускания интенсивность  $I_{mx} = 12,14$ . Данные аналитические оценки, как видно из рисунка П.6, оказываются очень близки к численным результатам.

В таблице П.3 приведены результаты моделирования для различных параметров элемента (П.40). Размер фокального пятна по уровню полуспада от максимального значения интенсивности в различных направлениях обозначен через  $S(|)$  и  $S(-)$ . В скобках приведены положения максимума, вычисленные по (П.35). Как следует из результатов моделирования, уменьшение радиуса внутренней зоны приводит к уменьшению размеров фокального пятна, которое сопровождается потерей энергии в фокусе и смещением его к плоскости элемента.

Таблица П.3. Распределение интенсивности в приближении тонкого элемента  
(П.40) для линейной у-поляризации

Параметры элемента (40)	Продольная интенсивность в плоскости YZ $y\sqrt{z}$ (размер $[4\lambda \times 10\lambda]$ )	Интенсивность в плоскости максимума $y\sqrt{x}$ (размер $[4\lambda \times 4\lambda]$ )	Параметры распределения
$r_1 = 2\lambda$ , $R = 2,91\lambda$			$z_{\max} = 4,1\lambda$ , ( $z_{\max} = 3,75\lambda$ ), $I_{\max} = 9,2$ , $S(-) = 0,88\lambda$ , $S() = 0,95\lambda$
$r_1 = \lambda$ , $R = 1,58\lambda$			$z_{\max} = 1,1\lambda$ , ( $z_{\max} = 0,75\lambda$ ), $I_{\max} = 3,5$ , $S(-) = 0,69\lambda$ , $S() = 0,81\lambda$
$r_1 = \lambda / 2$ , $R = \lambda$			$z_{\max} = 0,47\lambda$ , ( $z_{\max} = 0$ ), $I_{\max} = 0,48$ , $S(-) = 0,46\lambda$ , $S() = 0,89\lambda$
$r_1 = \lambda / 4$ , $R = 0,79\lambda$			$z_{\max} = 0,63\lambda$ , ( $z_{\max} = -0,19\lambda$ ), $I_{\max} = 0,72$ , $S(-) = 0,65\lambda$ , $S() = 0,89\lambda$

Теоретически уменьшение размеров центральной зоны имеет смысл только до  $r_1 = \lambda / 2$ , когда максимум по формуле (П.35) формируется на границе с элементом  $z_{mx} = 0$ . Однако теоретические оценки в пункте П.2.1 были получены в скалярном случае, и они не учитывают вклад продольной компоненты электрического поля. Численные расчёты в векторной модели показывают, что эти оценки оказываются несколько заниженными в случае субволновых размеров зон, когда продольная компонента становится сравнимой с поперечными.

Как видно из таблицы П.3, даже при  $r_1 = \lambda / 2$  (третья строка) максимум располагается на некотором расстоянии от элемента. Заметим, однако, что в этом случае достигается минимальный размер фокального пятна в направлении, перпендикулярном оси поляризации. В другом направлении происходит вытягивание пятна за счёт возникновения мощной продольной компоненты электрического поля [80\*, 97\*]. Таким образом, с помощью двухзонного бинарного элемента выполняется острая фокусировка лазерного излучения.

Дальнейшее уменьшение радиуса практически аннулирует вклад центральной зоны в картину дифракции. Причём в соответствии с аналитическими выводами предыдущего раздела (см. формулу (П.35)) фокус должен формироваться внутри оптического элемента при  $z_{mx} = -0,19\lambda$ .

### П.2.3 Численный расчёт для объёмного элемента

В случае субволновых размеров зон рельефа оптического элемента важную роль играет учет трёхмерной структуры, поэтому в данном пункте описаны расчёты с использованием более точной модели; о чём более подробно сказано в [142\*]. Расчёты для объёмного аксиального элемента (смотри рисунок П.7а) выполнялись на основе конечно-разностного временного метода (FDTD), реализованного в программном продукте МЕЕР [143].

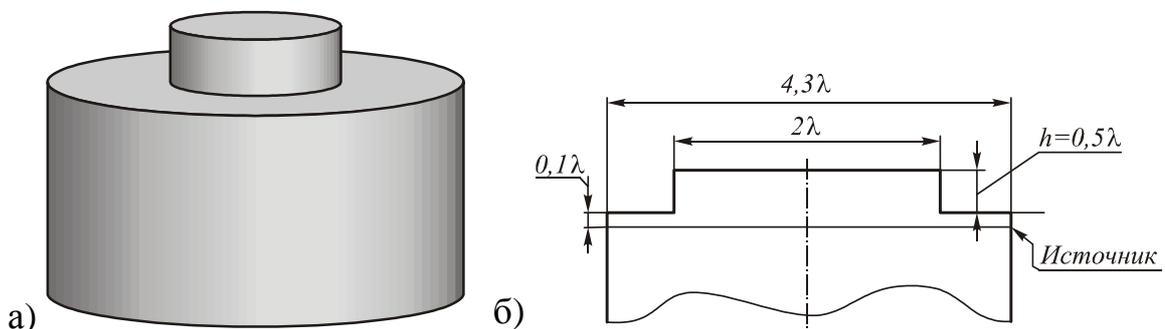


Рисунок П.7 – Вид моделируемого микроэлемента (а) и схема для расчета (б)

В работе [144] было проведено сравнение расчетов с использованием интегрального метода на основе разложения по плоским волнам и метода

FDTD. Сравнение показало качественное совпадение результатов при количественных различиях, вызванных учётом реальных оптических характеристик, таких как толщина подложки, материал элемента, расположение и форма источника излучения.

В расчётах использовались следующие параметры моделирования: длина волны  $\lambda = 0,532$  мкм, радиус подложки –  $1,5\lambda$  и  $2,15\lambda$ . Время моделирования – 10 периодов распространения волны. Показатель преломления элемента  $n = 2$ , высота рельефа, соответствующая фазовому скачку  $\pi$  радиан,  $0,5\lambda$ . Радиус центральной зоны микроэлемента варьировался в пределах от  $0,1\lambda$  до  $\lambda$ . Внешний радиус не выбирался из условия (П.36), а был зафиксирован радиусом подложки, чтобы исследовать влияние на картину дифракции только одного параметра – размера центрально зоны.

В качестве источника излучения выбран гауссов пучок радиусом  $\sigma = 0,6\lambda$ . Источник излучения располагался внутри подложки на расстоянии  $0,1\lambda$  от верхней плоскости подложки (смотри рисунок П.76). В таблице П.4 приведены результаты моделирования при фиксированном падающем пучке и внешнем радиусе оптического элемента. Полученные результаты качественно подтверждают моделирование, проведённое в предыдущем пункте, хотя рассматривается иной тип освещающего пучка. Качественное совпадение состоит в том факте, что с помощью двухзонного аксиального элемента можно осуществлять фокусировку падающего излучения, причём наиболее острая фокусировка (вне оптического элемента) достигается при радиусе центральной зоны  $r_1 = \lambda/2$ .

Таблица П.4 – Дифракция гауссова пучка ( $\sigma = 0,6\lambda$ ) на объемном элементе с различным размером центральной зоны при фиксированном внешнем радиусе  $R = 1,5\lambda$

$r_1$	Распространение в плоскости $[4,9\lambda \times 3,8\lambda]$		Поперечное сечение $[3\lambda \times 3\lambda]$	
	$x \nabla z$	$y \nabla z$	$y \nabla x$	
1,0 $\lambda$				$z_{\max} = 0,669\lambda$ , ( $z_{\text{mx}} = 0,75\lambda$ ), $S(-)=0,991\lambda$ , $S(l)=1,065\lambda$
0,9 $\lambda$				$z_{\max} = 0,655\lambda$ $S(-)=0,861\lambda$ , $S(l)=1,002\lambda$
0,8 $\lambda$				$z_{\max} = 0,514\lambda$ $S(-)=0,76\lambda$ , $S(l)=0,939\lambda$
0,7 $\lambda$				$z_{\max} = 0,401\lambda$ $S(-)=0,695\lambda$ , $S(l)=0,906\lambda$
0,6 $\lambda$				$z_{\max} = 0,232\lambda$ $S(-)=0,57\lambda$ , $S(l)=0,895\lambda$
0,5 $\lambda$				$z_{\max} = 0,021\lambda$ , ( $z_{\text{mx}} = 0$ ), $S(-)=0,386\lambda$ , $S(l)=0,802\lambda$
0,4 $\lambda$				$z_{\max} = -0,007\lambda$ (внутри элемента) $S(-)=0,346\lambda$ , $S(l)=0,409\lambda$
0,3 $\lambda$				$z_{\max} = -0,021\lambda$ (внутри элемента) $S(-)=0,336\lambda$ , $S(l)=0,395\lambda$

0,2 $\lambda$				$z_{\max} = -0,007\lambda$ (внутри элемента) $S(-)=0,35\lambda,$ $S(=)=0,492\lambda$
0,1 $\lambda$				$z_{\max} = 0,092\lambda$ $S(-)=1,048\lambda,$ $S(=)=1,214\lambda$

Заметим, что рассматриваемый нами простой оптический элемент обеспечивает степень фокусировки не хуже, чем дифракционный аксикон с периодом, близким к длине волны. В частности, в работе [145] было показано, что 5-зонный бинарный аксикон с числовой апертурой  $NA = 0,95$  обеспечивает фокусировку линейно-поляризованного излучения в вытянутое пятно с минимальным размером  $S(-) = 0,44\lambda$ . При этом радиус центральной зоны аксикона был существенно субволновый –  $0,26\lambda$ .

В работе [98] рассматривалась зонная пластинка с фокусом, равным длине волны (в этом случае числовая апертура имеет предельное для свободного пространства значение). Центральная зона такого элемента  $r_1 = 1,12\lambda$ , однако остальные 12 периферийных зон представляют собой кольца шириной менее  $\lambda/2$ . Минимальный размер светового пятна был  $S(-) = 0,42\lambda$ . Двухзонный же аксиальный элемент с  $r_1 = \lambda/2$  обеспечивает минимальный размер пятна  $S(-) = 0,386\lambda$ .

В работе [146] было показано, что можно получить ещё меньшие размеры светового пятна при использовании субволновых аксиконов (с  $NA > 1$ ). Однако в этом случае фокусировка происходит внутри оптического элемента и компактно сосредоточенная энергия имеет место непосредственно на границе между оптическим элементом и воздухом, то есть формируется затухающими волнами. Такие волны не распространяются далее, чем на треть длины волны. Результаты, приведённые в таблице П.4, показывают аналогичный эффект.

Уменьшение радиуса центральной зоны менее критической (смотри строки таблицы П.4, соответствующие  $r_1 = 0,4\lambda$ ,  $r_1 = 0,3\lambda$ ,  $r_1 = 0,2\lambda$ ) приводит к формированию фокуса внутри оптического элемента. А на границе между стеклом и воздухом возникают затухающие волны. При этом размеры светового пятна сразу за границей рельефа примерно такие же, как в стекле.

Дальнейшее уменьшение размеров центральной зоны (смотри последнюю строку таблицы П.4, соответствующую  $r_1 = 0,1\lambda$ ) аннулирует влияние этой зоны на картину дифракции. Всё это подтверждает результаты предыдущего раздела, за исключением того, что модель тонкого элемента не позволяет обнаружить фокусировку внутри объёмного элемента.

Заметим также, что оценки по формуле (П.35) в данном случае оказываются очень близки к расчётным, причём даже предсказывают фокусировку внутри оптического элемента.

В таблице П.5 приведены результаты моделирования дифракции на двухзонном цилиндре (при радиусе центральной зоны  $0,5\lambda$ , внешней –  $1,5\lambda$ ) для различных размеров освещающего пучка.

Как следует из приведённых в табл. П.5 результатов, изменение радиуса освещающего пучка (что практически соответствует изменению внешнего радиуса микроэлемента) существенно сказывается на картине дифракции. Хотя максимальное значение интенсивности независимо от размера источника излучения формируется на одном и том же расстоянии от оптического элемента –  $z_{\max} = 0,02\lambda$ , происходит перераспределение энергии во внеосевую область. При увеличении размеров освещающего пучка картина дифракции всё более напоминает «гантель». Это происходит из-за усиления продольной компоненты электрического поля, которая представляет собой два внеосевых световых пятна. При этом размер фокального пятна вдоль «перетяжки» уменьшается до  $S(-) = 0,36\lambda$ .

Таблица П.5 – Дифракция на объемном элементе с  $r_1 = \lambda/2$ ,  $R = 1,5\lambda$  при различных размерах освещающего пучка

Радиус пучка	Внешний вид пучка [ $3\lambda \times 3\lambda$ ]	Распространение в плоскости $YZ$ [ $4,9\lambda \times 3,8\lambda$ ]	Поперечное сечение $XY$ [ $3\lambda \times 3\lambda$ ]	
$\sigma = 0,42\lambda$				$S(-)=0,428\lambda,$ $S(l)=0,815\lambda$
$\sigma = 0,59\lambda$				$S(-)=0,385\lambda,$ $S(l)=0,815\lambda$
$\sigma = 0,73\lambda$				$S(-)=0,373\lambda,$ $S(l)=0,821\lambda$
$\sigma = 0,94\lambda$				$S(-)=0,363\lambda,$ $S(l)=0,830\lambda$
$\sigma = 1,11\lambda$				$S(-)=0,360\lambda,$ $S(l)=0,837\lambda$

Таким образом, увеличение размеров освещающего пучка приводит к более острой фокусировке. В случае линейной поляризации это приводит к ещё большей асимметрии фокального пятна. Так как во многих задачах требуется формирование симметричного пятна, рассмотрим также круговую поляризацию падающего излучения.

В таблице П.6 приведены результаты моделирования для объемного элемента с фиксированным внешним радиусом  $R = 2,15\lambda$  и различными размерами центральной зоны:  $r_1 = \lambda$ ,  $r_1 = 0,5\lambda$ ,  $r_1 = 0,25\lambda$ .

В таблице П.6 кроме распределения суммарной интенсивности, приведено распределение интенсивности для продольной компоненты электрического поля. Видно, что её энергия сосредоточена вне оптической оси.

Таблица П.6 – Моделирование дифракции гауссова пучка с радиусом  $\sigma = 0,73\lambda$  на элементе с внешним радиусом  $R = 2,15\lambda$ .

Поляризация	$r_1$	Распространение пучка, плоскость YZ [5,6 $\lambda$ × 5,17 $\lambda$ ]		Общая интенсивность, поперечное сечение, плоскость xy, [4,2 $\lambda$ × 4,2 $\lambda$ ]	
		Общая интенсивность	Компонента z	$y \nabla x$	
у-линейная	1,0 $\lambda$				$z_{\max} = 0,788\lambda$ $S(-) = 0,89\lambda$ , $S(l) = 0,987\lambda$ , $HMA = 0,69\lambda^2$
	0,5 $\lambda$				$z_{\max} = 0,01\lambda$ $S(-) = 0,355\lambda$ , $S(l) = 0,773\lambda$ , $HMA = 0,29\lambda^2$
	0,25 $\lambda$				$z_{\max} = -0,02\lambda$ (внутри элемента) $S(-) = 0,333\lambda$ , $S(l) = 0,379\lambda$ , $HMA = 0,1\lambda^2$
Круговая «+»	1,0 $\lambda$				$z_{\max} = 0,788\lambda$ $S = 0,943\lambda$ , $HMA = 0,7\lambda^2$
	0,5 $\lambda$				$z_{\max} = 0,01\lambda$ $S = 0,757\lambda$ , $HMA = 0,45\lambda^2$
	0,25 $\lambda$				$z_{\max} = -0,02\lambda$ (внутри элемента) $S = 0,346\lambda$ , $HMA = 0,09\lambda^2$

При линейной поляризации продольная компонента приводит к вытягиванию фокального пятна в направлении, параллельном оси поляризации. При

круговой поляризации формируется симметричное фокальное пятно, одинаково уширенное во всех направлениях за счёт продольной компоненты.

Площадь фокального пятна по уровню полуспада от максимальной интенсивности (half-maximum area – НМА) при линейной поляризации оказывается меньше, чем при круговой.

### **П.3 Выводы**

1. В рамках скалярной теории дифракции (как параксиальной, так и непараксиальной) выполнен анализ осевого распределения, формируемого бинарной линзой (зонной пластинкой). При этом эффективность амплитудной зонной пластинки в 4 раза ниже фазовой.

Аналитически показано, что для линз с невысокой числовой апертурой несколько локальных фокусов, следующих сразу за основным, имеют интенсивность, близкую к интенсивности основного фокуса. Это связано с пропорциональным номеру уменьшением поперечных размеров локальных фокусов. Таким образом, падение энергии, приходящейся на каждый локальный фокус, и пропорциональное квадрату номера, компенсируется соответствующим уменьшением площади локального фокуса.

Такое поведение характерно для зоны, соответствующей условиям параксиальности. Также выделены ещё две зоны – близкая к оптическому элементу, где поперечный размер фокального пятна перестаёт уменьшаться и, соответственно, интенсивность падает пропорционально квадрату номера фокуса, а также промежуточная зона, падение интенсивности в которой можно считать приблизительно линейным.

Результаты численного моделирования и эксперимент подтверждают аналитические исследования.

2. В скалярном непараксиальном приближении получены аналитические оценки для параметров двухзонного осесимметричного оптического элемен-

та, обеспечивающего максимальные значения интерференционных максимумов. Аналитически и численно показано, что оптический микроэлемент, состоящий всего из двух соосных кольцевых зон, можно использовать для острой фокусировки лазерного излучения. Причём наибольшая степень фокусировки достигается при радиусе центральной зоны  $\lambda/2$ .

Численные расчёты, выполненные в приближении тонкого элемента с использованием метода разложения по плоским волнам, показывают качественное согласование с аналитическими оценками при количественных погрешностях в положении максимального значения интенсивности.

Применение более точного метода расчета на основе конечных разностей во временной области показывает хорошее качественное и количественное согласование с аналитическими оценками. Причем было показано, что при радиусе центральной зоны  $0,1\lambda < r_1 < 0,5\lambda$  фокус формируется внутри элемента и за его границу попадает только энергия затухающих волн.

Показано, что при линейной поляризации освещающего пучка двухзонный аксиальный элемент с радиусом центральной зоны  $r_1 = \lambda/2$  обеспечивает вблизи элемента (на расстоянии  $z = 0,02\lambda$ ) фокусировку в вытянутое световое пятно, минимальный размер которого по уровню полуспада интенсивности равен  $0,386\lambda$ . Таким образом, обеспечивается результат лучше, чем при использовании бинарного высокоапертурного аксикона с центральной зоной радиусом  $0,26\lambda$ .

При круговой поляризации падающего излучения формируется круглое (осесимметричное) световое пятно, площадь которого по полуспаду интенсивности оказывается больше, чем при линейной поляризации.