

УДК 629.7.018.7

В.А.Вьжжанин, В.Д.Закаблукровский

ВЫЯВЛЕНИЕ СКРЫТЫХ ПЕРИОДИЧНОСТЕЙ ПРИ АНАЛИЗЕ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В ПОЛЕТЕ

При проектировании систем управления современными летательными аппаратами необходимо учитывать упругие свойства конструкции аппарата. Качество работы системы управления, стабилизация изгибных колебаний корпуса существенно зависят от точности, с которой рассчитаны собственные частоты и формы, а также декременты различных тонов упругих колебаний корпуса летательного аппарата. Ввиду того, что параметры этих колебаний зависят от многих факторов, каждый из которых учесть в расчетах или смоделировать в лабораторных условиях не всегда удается, наиболее достаточные результаты летных испытаний. Но в реальном полете невозможно поставить чистый эксперимент по определению параметров, например, упругих колебаний, так как на показания датчиков будут накладываться случайные сигналы, обусловленные турбулентностью атмосферы, пульсацией тяги двигателей, работой системы управления и другими причинами. Тем не менее в показаниях датчиков содержится информация об упругих колебаниях корпуса от перечисленных случайных воздействий, соизмеримая по уровню с наложенным шумом. Интервал времени, в течение которого параметры колебаний можно считать неизменными, составляет несколько периодов колебаний. В данной работе рассматривается задача определения частот, декрементов затухания, фазовых сдвигов и амплитуд для нескольких тонов слабодемпфированных (упругих) колебаний. В результате обработки записей сигналов с датчиков, например, перегрузок, на интересующем интервале времени полета.

Если составляющими сигнала $x(t)$ являются медленно изменяющийся тренд $F(t)$, колебания с переменной амплитудой и шум $f(t)$,

то такой сигнал можно описать аналитическим выражением:

$$x(t) = F(t) + \sum_{j=1}^m A_j e^{i\varphi_j} \sin(\omega_j t + \varphi_j) + f(t).$$

Аппроксимируя низкочастотную составляющую синусоидой с переменной амплитудой, получаем

$$x(t) = C + A_0 e^{i\omega_0 t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{j=1}^m A_j e^{i\varphi_j} \sin(\omega_j t + \varphi_j) + f(t) \quad (I)$$

В выражении (I) $\omega_0 \ll \omega_j$. Периодичности с постоянной амплитудой можно рассматривать как частный случай при $\beta_j = 0$.

Расчет параметров колебаний выполняется в два этапа. На первом этапе рассчитываются ориентировочные значения частот различных тонов колебаний, которые затем используются в качестве нулевого приближения. На втором этапе производится уточнение параметров колебаний и оценка точности полученных результатов.

Для слабодемпфированных колебаний ($\beta_j \approx 0$) частоты колебаний на первом этапе могут быть определены на основе периодограммно-го анализа с использованием селективных свойств функции [I]:

$$e^{-i\omega t} \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}.$$

Пики периодограммы $A(\omega)$ соответствуют частотам скрытых периодичностей, а их величины и фазы — амплитудам и фазам периодичностей.

Периодограмма рассчитывается по формулам:

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)};$$

$$a(\omega) = \frac{1,7}{T} \int_{-T}^T \dot{x}^*(t) \sin \omega t \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} dt;$$

$$b(\omega) = \frac{1,7}{T} \int_{-T}^T \dot{x}^*(t) \cos \omega t \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} dt;$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{a(\omega)}{b(\omega)};$$

$$\dot{x}^*(t) = x(t) - C; \quad C = \frac{0,85}{T} \int_{-T}^T x(t) \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} dt.$$

На периодограмме могут быть пики, порожденные случайной функцией $f(t)$. Высота пиков, обусловленных скрытыми периодичностями, практически не зависит от интервала наблюдения, в то время как высота случайных пиков существенно зависит от интервала наблюдения. С целью более надежного определения частот скрытых периодичностей периодо-

грамма рассчитывается для интервалов $[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}]$, $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, $[-T, T]$. Повторяющиеся пики соответствуют скрытым периодичностям. Максимальное значение частоты при расчете периодограммы

$$\omega_{max} = \frac{\pi}{\Delta t},$$

где Δt при дискретной записи сигнала - шаг дискретизации, а при непрерывной записи - минимальное время между двумя соседними экстремумами сигнала. Анализ периодограммы может выполняться визуально или же в процессе расчета, отсекая ту часть периодограммы, которая с большой вероятностью соответствует спектру случайной компоненты. Можно показать [1], что пики периодограммы, превышающие значение

$$A_{2p} = \frac{3,2 \sigma_x}{\sqrt{N}},$$

где σ_x^2 - дисперсия дискретно заданного $(2N+1)$ значениями сигнала $x(t_i)$, с вероятностью, большей 0,98, не принадлежат шуму $f(t)$ и обусловлены периодическими составляющими сигнала $x(t)$.

Если колебания имеют существенное демпфирование, то для определения нулевого приближения параметров периодичностей можно воспользоваться методом Крылова [2]. Выражение (1) для центрированного сигнала можно записать в более общем виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{2m+2} B_j e^{\alpha_j t} + f(t), \quad (2)$$

где B_j , α_j - комплексные числа, подлежащие определению.

Разработанный А.Н.Крыловым метод определения коэффициентов выражения (2) по дискретно заданному с равным интервалом сигналу $x(t)$ при наличии шума $f(t)$ не дает надежных результатов, так как в системе условных уравнений не только свободные члены, но и коэффициенты при неизвестных определяются со случайной ошибкой [2]. Решение системы методом наименьших квадратов в этом случае не дает ожидаемого эффекта. Если произвести суммирование условных уравнений по "K" уравнений, то случайная ошибка коэффициентов при неизвестных и свободных членах будет стремиться при увеличении "K" к нулю в том случае, когда математическое ожидание случайной ошибки равно нулю. Предлагается также для лучшей обусловленности системы уравнений коэффициенты при неизвестных брать с временным сдвигом $\kappa \Delta t$. Для модифицированного метода Крылова систему нормальных

уравнений можно записать в матричной форме:

$$AC = B,$$

где $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix}$ - вектор неизвестных

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad b_j = - \sum_{i=1}^{n^*} \left\{ \sum_{i=1+(e+j-1)\kappa}^{(e+j-1)\kappa} x(t_i) \sum_{i=1+(e+m-1)\kappa}^{(e+m)\kappa} x(t_i) \right\};$$

$A = [a_{jv}]$ - матрица коэффициентов размерностью $m \times m$;

$$a_{jv} = \sum_{i=1}^{n^*} \left\{ \sum_{i=1+(e+j-2)\kappa}^{(e+j-1)\kappa} x(t_i) \sum_{i=1+(e+v-2)\kappa}^{(e+v-1)\kappa} x(t_i) \right\}.$$

После определения неизвестных "C" можно рассчитать значения B_j , α_j , а следовательно и значения ω_j в качестве параметров нулевого приближения.

При выборе "κ" следует руководствоваться соотношением:

$$1 \leq \kappa \leq \frac{1}{4 \Delta t f_{\min}}.$$

На втором этапе производится уточнение параметров нулевого приближения, которое может выполняться путем последовательных приближений. Запишем выражение (I) в следующем виде (параметры, подлежащие уточнению, отмечены звездочкой):

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= A_0^* e^{i\omega_0 t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{j=1}^m A_j^* e^{i\omega_j^* t} \sin(\omega_j^* t + \varphi_j^*) = \\ &= a_0^* e^{i\omega_0 t} \sin \omega_0 t + b_0^* e^{i\omega_0 t} \cos \omega_0 t + \sum_{j=1}^m \left[a_j^* e^{i\omega_j^* t} \sin \omega_j^* t + b_j^* e^{i\omega_j^* t} \cos \omega_j^* t \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Линеаризуем (3) относительно поправок $\Delta \beta_j$ и $\Delta \omega_j$. Если поправки к параметрам первого приближения таковы, что позволяют при разложении нелинейных зависимостей в ряд в окрестностях параметров нулевого приближения ограничиться линейными членами разложения, т.е.:

$$\begin{aligned} \sin(\omega_j^* + \Delta \omega_j)t &\approx \sin \omega_j^* t + \Delta \omega_j t \cos \omega_j^* t; \\ \cos(\omega_j^* + \Delta \omega_j)t &\approx \cos \omega_j^* t - \Delta \omega_j t \sin \omega_j^* t; \\ e^{i(\beta_j^* + \Delta \beta_j)t} &\approx e^{i\beta_j^* t} + \Delta \beta_j t e^{i\beta_j^* t}, \end{aligned}$$

то линеаризованное уравнение (3) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) \approx & a_0 e^{\beta_0 t} \sin \omega_0 t + b_0 e^{\beta_0 t} \cos \omega_0 t + \\ & + \sum_{j=1}^m a_j e^{\beta_j t} \sin \omega_j t + \sum_{j=1}^m b_j e^{\beta_j t} \cos \omega_j t + \\ & + \sum_{j=1}^m c_j t e^{\beta_j t} \sin \omega_j t + \sum_{j=1}^m d_j t e^{\beta_j t} \cos \omega_j t, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} c_j &= a_j \Delta \beta_j - b_j \Delta \omega_j; \\ d_j &= b_j \Delta \beta_j - a_j \Delta \omega_j. \end{aligned}$$

Параметры тренда β_0, ω_0 не уточняются, иначе может нарушаться сходимость последовательных приближений.

Решая систему уравнений (4) методом наименьших квадратов относительно коэффициентов $a_0, b_0, a_j, b_j, c_j, d_j$ -

$$\begin{aligned} S = \sum_{i=-N}^N \left\{ \dot{x}^2(t_i) - a_0 f_{01}(t_i) - b_0 f_{02}(t_i) - \sum_{j=1}^m a_j f_{1j}(t_i) - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^m b_j f_{2j}(t_i) - \sum_{j=1}^m c_j f_{3j}(t_i) - \sum_{j=1}^m d_j f_{4j}(t_i) \right\}^2 \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f_{01}(t_i) &= e^{\beta_0 t_i} \sin \omega_0 t_i; \\ f_{02}(t_i) &= e^{\beta_0 t_i} \cos \omega_0 t_i; \\ f_{1j}(t_i) &= e^{\beta_j t_i} \sin \omega_j t_i; \\ f_{2j}(t_i) &= e^{\beta_j t_i} \cos \omega_j t_i; \\ f_{3j}(t_i) &= t_i f_{1j}(t_i); \\ f_{4j}(t_i) &= t_i f_{2j}(t_i), \end{aligned}$$

получаем систему нормальных уравнений

$$\frac{dS}{da_0} = \frac{dS}{db_0} = \frac{dS}{da_j} = \frac{dS}{db_j} = \frac{dS}{dc_j} = \frac{dS}{dd_j} = 0. \quad (6)$$

В матричной форме система (6) имеет вид:

$$C Y = H,$$

$$y = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_j \\ b_j \\ c_j \\ d_j \end{bmatrix}$$

- вектор неизвестных $(2+4m)$;

$$H = \begin{bmatrix} h_{01} \\ h_{02} \\ h_{1j} \\ h_{2j} \\ h_{3j} \\ h_{4j} \end{bmatrix};$$

$$h_{01} = \sum_{i=-N}^N x(t_i) f_{01}(t_i);$$

$$h_{02} = \sum_{i=-N}^N x(t_i) f_{02}(t_i);$$

$$h_{kj} = \sum_{i=-N}^N x(t_i) f_{kj}(t_i) \quad k=1,2,3,4.$$

$G = [g_{ij}]$ - матрица коэффициентов размерность $(2+4m)(2+4m)$:

$$g_{11} = g_{11};$$

$$g_{11} = \sum_{i=-N}^N f_{01}^2(t_i);$$

$$g_{12} = g_{21} = \sum_{i=-N}^N f_{01}(t_i) f_{02}(t_i);$$

$$g_{13} = \sum_{i=-N}^N f_{01}(t_i) f_{11}(t_i);$$

$$g_{14} = \sum_{i=-N}^N f_{01}(t_i) f_{12}(t_i);$$

$$\dots$$

$$g_{1(m+2)} = \sum_{i=-N}^N f_{01}(t_i) f_{1m}(t_i);$$

$$g_{1(m+3)} = \sum_{i=-N}^N f_{01}(t_i) f_{21}(t_i);$$

$$\dots$$

$$g_{1(2m+2)} = \sum_{i=-N}^N f_{01}(t_i) f_{2m}(t_i);$$

$$g_{1(2m+3)} = \sum_{i=-N}^N f_{01}(t_i) f_{31}(t_i);$$

$$g_{1(3m+3)} = \sum_{i=-N}^N f_{01}(t_i) f_{41}(t_i);$$

$$\dots$$

$$g_{1(4m+2)} = \sum_{i=-N}^N f_{01}(t_i) f_{4m}(t_i);$$

$$g_{22} = \sum_{i=-N}^N f_{02}^2(t_i);$$

$$g_{23} = \sum_{i=-N}^N f_{02}(t_i) f_{12}(t_i);$$

Получаем

$$\sigma_{y_k} = \sigma_0 \sqrt{\frac{|G_{kk}|}{|G|}} = \sigma_0 \sqrt{g'_{kk}},$$

где g'_{kk} — " k " диагональный элемент обратной матрицы G^{-1} , $G^{-1} = [g'_{ij}]$. На основе матрицы G^{-1} могут быть рассчитаны коэффициенты корреляции $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2+m}$. Обозначим через

$$z_{ij} = \frac{M\{(y_i - m_{y_i})(y_j - m_{y_j})\}}{\sigma_{y_i} \sigma_{y_j}}$$

— коэффициенты корреляции случайных величин y_i, y_j . Тогда оценка любого элемента корреляционной матрицы $R = [z_{ij}]$ находится по формуле [4]:

$$z_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g'_{ii} g'_{jj}}}$$

Близость z_{ij} к нулю в предположении нормального закона распределения ошибок говорит о статистической независимости параметров y_i и y_j . Определив σ_{y_k} , т.е. $\sigma_{a_j}, \sigma_{b_j}, \sigma_{c_j}, \sigma_{d_j}$ и рассчитав корреляционную матрицу R , можно найти среднеквадратичные ошибки β_j и ω_j с учетом корреляции параметров a_j, b_j, c_j, d_j по приближенным формулам:

$$\sigma_{\beta_j} = \frac{\sqrt{a_j^2 \sigma_{c_j}^2 + b_j^2 \sigma_{d_j}^2 + 2a_j b_j \sigma_{c_j} \sigma_{d_j} z_{c_j d_j}}}{a_j^2 + b_j^2};$$

$$\sigma_{\omega_j} = \frac{\sqrt{a_j^2 \sigma_{d_j}^2 + b_j^2 \sigma_{c_j}^2 - 2a_j b_j \sigma_{c_j} \sigma_{d_j} z_{c_j d_j}}}{a_j^2 + b_j^2}.$$

Соответственно для декремента затухания δ_j и частоты λ_j имеем

$$\lambda_j = \frac{\omega_j}{2\pi}; \quad \delta_j = -\frac{\beta_j}{\lambda_j}$$

$$\sigma_{\lambda_j} = \frac{\sigma_{\omega_j}}{2\pi}; \quad \sigma_{\delta_j} = \frac{\sigma_{\beta_j}}{\lambda_j}.$$

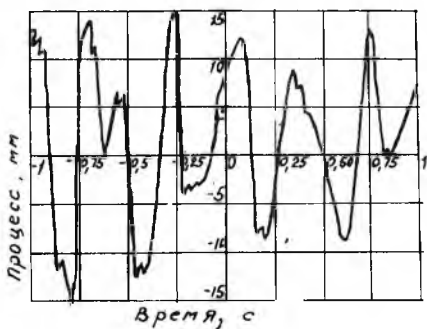
Доверительные интервалы параметров выделенных периодичностей определяются по формуле:

$$P\{\bar{y} - t\sigma_y < y < \bar{y} + t\sigma_y\} = P_t,$$

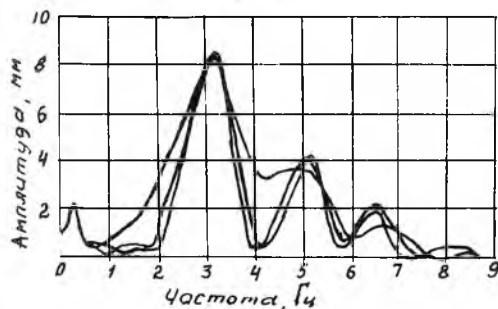
где \bar{y}_j - наиболее вероятные значения параметров a_j , β_j , ω_j , σ_j, λ_j ; σ_y - соответствующие им средне-квадратичные ошибки; t - квантиль нормального распределения, соответствующий выбранной доверительной вероятности P_t .

В качестве примера выполнялся расчет для сигнала, рассчитанного по выражению

$$x(t) = 2e^{0,3t} + 10e^{-0,05 \cdot 3t} \sin\left(2\pi \cdot 3t + \frac{\pi}{2}\right) + 7e^{-0,1 \cdot 5t} \sin 2\pi \cdot 5t + 5e^{-0,15 \cdot 6t} \sin(2\pi \cdot 6t + \pi) + f(t).$$



Р и с. 1



Р и с. 2

Шум $f(t)$ задавался с нормальным законом распределения $M[f(t)] = 0$, $\sigma_f = 1$. Величина $x(t_i)$ рассчитывалась на интервале $[-1, 1]$ с шагом 0,01 с. График сигнала $x(t_i)$ приведен на рис. 1. Анализ периодограммы, приведенной на рис. 2 позволил определить количество периодичностей, которое равняется трем, а также ориентировочные значения частот. Метод

Крылова дал грубые приближения. Модифицированный метод Крылова позволил получить более точные значения параметров периодичностей:

$$\lambda_1 = 2,98(3) \text{ Гц}; \quad \sigma_1 = 0,063(0,05);$$

$$\lambda_2 = 5,03(5) \text{ Гц}; \quad \sigma_2 = 0,076(0,1);$$

$$\lambda_3 = 6,2(6) \text{ Гц}; \quad \sigma_3 = 0,18(0,15)$$

(здесь и в дальнейшем в скобках приведены для сравнения точные значения параметров).

Расчеты по уточнению параметров нулевого приближения, которые выбирались при анализе периодограммы или определялись методом Кры-

лова. Проведено уточнение заведомо более грубых значений нулевого приближения, когда декременты затухания задавались равными нулю.

Для значений нулевого приближения, рассчитанных по методу Крылова,

$$\sigma_0 = -0,31; \quad \lambda_0 = 0,008 \text{ Гц};$$

$$\sigma_1 = 0,0503; \quad \lambda_1 = 2,86 \text{ Гц};$$

$$\sigma_2 = 0,102; \quad \lambda_2 = 4,8 \text{ Гц};$$

$$\sigma_3 = 0,152. \quad \lambda_3 = 5,7 \text{ Гц}$$

получены следующие значения первого приближения:

$$\sigma_1' = 0,059 (0,05); \quad \lambda_1 = 3 (3) \text{ Гц};$$

$$\sigma_2' = 0,093 (0,1); \quad \lambda_2 = 4,98 (5) \text{ Гц};$$

$$\sigma_3' = 0,165 (0,15); \quad \lambda_3 = 5,98 (6) \text{ Гц};$$

$$A_1 = 9,4 (10); \quad \varphi_1 = 1,537 (1,57);$$

$$A_2 = 6,6 (7); \quad \varphi_2 = -0,018 (0);$$

$$A_3 = 4,7 (5). \quad \varphi_3 = 3,026 (3,14).$$

Для более грубых значений нулевого приближения

$$\sigma_0 = -0,31; \quad \lambda_0 = 0,0016 \text{ Гц};$$

$$\sigma_1 = 0; \quad \lambda_1 = 2,9 \text{ Гц};$$

$$\sigma_2 = 0; \quad \lambda_2 = 4,94 \text{ Гц};$$

$$\sigma_3 = 0. \quad \lambda_3 = 5,95 \text{ Гц}$$

получены результаты первого приближения:

$$\sigma_1' = 0,066 (0,05); \quad \lambda_1 = 3 (3) \text{ Гц};$$

$$\sigma_2' = 0,084 (0,1); \quad \lambda_2 = 5 (5) \text{ Гц};$$

$$\sigma_3' = 0,18 (0,15); \quad \lambda_3 = 5,98 (6) \text{ Гц};$$

$$A_1 = 9,5 (10); \quad \varphi_1 = 1,51 (1,57);$$

$$A_2 = 6,75 (7); \quad \varphi_2 = -0,06 (0);$$

$$A_3 = 5,3 (5). \quad \varphi_3 = 2,96 (3).$$

В результате второго приближения

$$\sigma_1' = 0,0628 (0,05); \quad \lambda_1 = 3 (3) \text{ Гц};$$

$$\sigma_2' = 0,105 (0,1); \quad \lambda_2 = 5 (5) \text{ Гц};$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= 0,154 (0,15); & \lambda_3 &= 5,98 (6) \Gamma_4; \\ A_1 &= 9,8 (10); & \varphi_1 &= 1,544 (1,57); \\ A_2 &= 6,7 (7); & \varphi_2 &= -0,002 (0); \\ A_3 &= 4,9 (5); & \varphi_3 &= 3,02 (3,14). \end{aligned}$$

Отклонения параметров от точных значений в большинстве случаев не выходят за пределы рассчитанных доверительных интервалов $\pm 2\sigma$ что соответствует доверительной вероятности 95%.

Расчеты выполнялись на ЭЦВМ типа М-220 по составленным на языке Алгол-60 программам. Построение периодограммы и графика исходного сигнала выполнено по составленным программам автоматически с помощью графопостроителя.

Л и т е р а т у р а

1. Г е л ь ф а н д б е й н Я.А. Методы кибернетической диагностики динамических систем. "Знание", Рига, 1967.
2. К р ы л о в А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. М., Госиздат, ТТП, 1954.
3. Щ и г о л е в Б.М. Математическая обработка наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
4. Л и н н и к Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958.

