УДК 519.24:629.15

И.В.Белоконов

# ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ОЦЕНКИ В КОМБИНИРОВАННОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Во многих задачах оценки эффективности производства и качества продукции весьма затруднительным и дорогостоящим является проведение натурных испытаний, поэтому в качестве объекта исследования обычно используют составленную определенным образом полную математическую модель. Для облегчения практической оценки параметров таких моделей случайных процессов и полей В.Н.Пугачевым был разработан метод коррелированных процессов (МКП) [1], основывающийся на методе статистических испытаний (МСИ), но требующий проведения значительно меньшего числа реализаций. Это достигается за счет использования информации от исследования некоторой упрощенной системы, для которой вероятностные характеристики могут быть найдены в аналитическом виде.

В настоящей работе предлагается модификация МКП, направленная на повышение его эффективности и заключающаяся в применении более общей нелинейной оценки по сравнению с используемой ранее линейной оценкой.

Обозначим за $L$ и $G$ – $\ell$ и $m$ – мерные векторы, компоненты которых представляют собой некоторые функции от значений процессов соответственно в исходной и упрощенной системах, $\eta = M[L]$ и $\xi = M[G]$ – векторы вероятностных характеристик.

Пусть с исходной и упрощенной системами проведено в одинаковых условиях $N$ независимых между собой испытаний.

Задача состоит в определении оптимальной в некотором смысле оценки $\eta^\circ$ вектора $\eta$ по известным статистическим значениям характеристик $\eta^* = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} L_j$; $\xi^* = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} G_j$ и точным значениям вероятностных характеристик упрощенной системы $\xi$.

Принимая во внимание результаты, полученные в [I], и требование достаточной простоты нелинейной оценки, представим ее в следующем виде:

$$\eta^{\circ} = A\eta^{*} + B(\xi^{*}-\xi)(\xi^{*}-\xi)^{T}E + C(\xi^{*}-\xi), \qquad (\mathrm{I})$$

где $A$, $B$, $C$ – матрицы;

$E$ – вектор-столбец, все "$m$" компонент которого равны I.

Оптимальность оценки $\eta^{\circ}$ понимается как ее несмещенность и эффективность.

Так как компоненты векторов $\eta$ и $\xi$ могут быть любыми, то из условия $M[\eta_i^{\circ}] = \eta_i$ следует, что матрица $A$ должна быть единичной, а коэффициенты матрицы $B$ должны удовлетворять соотношениям

$$B_i M\left[(\xi^{*}-\xi)(\xi^{*}-\xi)^{T}\right]E = 0. \qquad (2)$$

Для того, чтобы определение коэффициентов матрицы $B$ не было связано с условием несмещенности, а проводилось бы только из условия минимума дисперсии, преобразуем соотношение (I) для оценки

$$\eta^{\circ} = \eta^{*} + B\left\{(\xi^{*}-\xi)(\xi^{*}-\xi)^{T} - \frac{K_{GG}}{N}\right\}E + C(\xi^{*}-\xi), \qquad (3)$$

где $K_{GG} = M\left[(G-\xi)(G-\xi)^{T}\right]$.

Найдем дисперсию $i$ – й компоненты оценки $\eta^{\circ}$:

$$D[\eta_i^{\circ}] = M\left[(\eta_i^{*}-\eta_i)^2\right] + B_i M\left[\left\{(\xi^{*}-\xi)(\xi^{*}-\xi)^{T} - \frac{K_{GG}}{N}\right\}EE^{T}\left\{(\xi^{*}-\xi)(\xi^{*}-\xi)^{T} - \frac{K_{GG}}{N}\right\}\right]B_i^{T} + C_i M\left[(\xi^{*}-\xi)(\xi^{*}-\xi)^{T}\right]C_i^{T} + 2M\left[(\eta_i^{*}-\eta_i)E^{T}\left\{(\xi^{*}-\xi)(\xi^{*}-\xi)^{T} - \frac{K_{GG}}{N}\right\}\right]B_i^{T} + 2M\left[(\eta_i^{*}-\eta_i)(\xi^{*}-\xi)^{T}\right]C_i^{T} + 2B_i M\left[\left\{(\xi^{*}-\xi)(\xi^{*}-\xi)^{T} - \frac{K_{GG}}{N}\right\}E(\xi^{*}-\xi)^{T}\right]C_i^{T}, \qquad (4)$$

где $B_i$ и $C_i$ – вектор-строки, являющиеся $i$ – ми строками матриц $B$ и $C$.

Введем следующие обозначения:

$$K_{G^2G^2} = M\left[\left\{(G-\xi)(G-\xi)^{T} - K_{GG}\right\}EE^{T}\left\{(G-\xi)(G-\xi)^{T} - K_{GG}\right\}\right]; \qquad (5)$$

$$K_{G^2G} = M\left[\left\{(G-\xi)(G-\xi)^{T} - K_{GG}\right\}E(G-\xi)^{T}\right]; \qquad (6)$$

$$K_{L_i G^2} = M\left[(L_i - \eta_i) E^T (G-\xi)(G-\xi)^T\right]; \tag{7}$$

$$K_{L_i G} = M\left[(L_i - \eta_i)(G-\xi)^T\right]; \tag{8}$$

$$K_{L_i L_i} = M\left[(L_i - \eta_i)^2\right]. \tag{9}$$

В таком случае, учитывая (5)-(9), выражение (4) для дисперсии $\eta^\circ$ после преобразований примет вид:

$$D\left[\eta_i^\circ\right] = \frac{K_{L_i L_i}}{N} + B_i \frac{K_{G^2G^2}}{N} B_i^T + C_i \frac{K_{GG}}{N} C_i^T + 2\frac{K_{L_iG^2}}{N} B_i^T + 2\frac{K_{L_iG}}{N} C_i^T + 2B_i \frac{K_{G^2G}}{N} C_i^T. \tag{10}$$

Требование эффективности оценки $\eta_i^o$ позволяет записать систему матричных уравнений для определения $B_i$ и $C_i$

$$\frac{\partial D[\eta_i^\circ]}{\partial B_i} = 0, \quad \frac{\partial D[\eta_i^\circ]}{\partial C_i} = 0. \tag{11}$$

Подставляя (I0) в (II), получаем

$$\left.\begin{aligned} B_i K_{G^2G} + K_{L_iG^2} + C_i K_{G^2G}^T = 0, \\ C_i K_{GG} + K_{L_iG} + B_i K_{G^2G} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Решение системы матричных уравнений (I2) целесообразно представить в следующем виде:

$$B_i = -\Sigma_{L_iG^2} \Sigma_{G^2G^2}^{-1}; \tag{13}$$

$$C_i = -\left(K_{L_iG} + B_i K_{G^2G}\right) K_{GG}^{-1};$$

где

$$\Sigma_{L_iG^2} = K_{L_iG^2} - K_{L_iG} K_{GG}^{-1} K_{G^2G}^T;$$

$$\Sigma_{G^2G^2} = \left(I - z_{G^2G} z_{GG^2}\right) K_{G^2G^2};$$

$z_{G^2G} z_{GG^2} = K_{G^2G} K_{GG}^{-1} K_{GG^2} K_{G^2G^2}^{-1}$ – квадрат множественного коэффициента корреляции между случайными векторами $(G-\xi)(G-\xi)^T E$ и $G$.

Используя (I3), получается окончательное выражение для нелинейной оценки $i$ – й компоненты вектора $\eta^\circ$:

$$\eta_i^\circ = \eta_i^* - \Sigma_{L_iG^2} \Sigma_{G^2G^2}^{-1} \left[(\xi^* - \xi)(\xi^* - \xi)^T E - \frac{K_{GG}}{N}\right] E - \left(K_{L_iG} - \Sigma_{L_iG^2} \Sigma_{G^2G^2}^{-1} K_{G^2G}\right) K_{GG}^{-1} (\xi^* - \xi). \tag{14}$$

Из сравнения (I4) и соотношения для определения линейной оценки из [I] видно, что нелинейная оценка полностью включает в себя линейную оценку и является ее обобщением. Выражение (I4) можно преобразовать и представить в следующем виде:

$$\overset{\circ}{\eta}_{(НЛ)i} = \overset{\circ}{\eta}_{(Л)i} - \Delta\eta_i ,$$

где $\overset{\circ}{\eta}_{(Л)i} = \eta_i^* - K_{L_i G} K_{GG}^{-1} (\varphi^* - \varphi)$ – уточненное значение в виде линейной оценки;

$$\Delta\eta_i = \Sigma_{L_i G^2} \Sigma_{G^2 G^2}^{-1} \left\{ \left[ (\varphi^* - \varphi)(\varphi^* - \varphi)^T - \frac{K_{GG}}{N} \right] E - K_{G^2 G} K_{GG}^{-1} (\varphi^* - \varphi) \right.$$

– добавочный член, обеспечивающий дополнительное уточнение при использовании нелинейной оценки.

Исследуем эффективность применения развитой модификации МКП по сравнению с использованием МСИ. Для этого подставим (I3) в (I4). После длительных преобразований получается следующее выражение для дисперсии оценки:

$$D\left[\overset{\circ}{\eta}_i\right] = \frac{1}{N} \left( \Sigma_{L_i L_i} - \Sigma_{L_i G^2} \Sigma_{G^2 G^2}^{-1} \Sigma_{L_i G^2}^T \right), \qquad (\text{I5})$$

где $\Sigma_{L_i L_i} = K_{L_i L_i} - K_{L_i G} K_{GG}^{-1} K_{L_i G}^T$ .

Дисперсия значения $\eta_i^*$ равна $D[\eta_i^*] = K_{L_i L_i}/N$ .
Тогда выигрыш в точности по дисперсии при применении нелинейной оценки в МКП по сравнению с использованием МСИ оценивается простым соотношением:

$$\varkappa_{(НЛ)i}^{D} = \frac{1}{(1 - z_{L_i G}\, z_{G L_i})(1 - \Delta_i)} , \qquad (\text{I6})$$

где $z_{L_i G}\, z_{G L_i} = K_{L_i G} K_{GG}^{-1} K_{L_i G}^T K_{L_i L_i}^{-1}$ – квадрат множественного коэффициента корреляции величины $L_i$ и вектора $G$ ;

$\Delta_i = \Sigma_{L_i G^2} \Sigma_{G^2 G^2}^{-1} \Sigma_{L_i G^2}^T \Sigma_{L_i L_i}^{-1}$ – аналог множественного коэффициента корреляции $(0 \leqslant \Delta_i \leqslant 1)$.

Из (I6) видно, что теоретическое значение выигрыша $\varkappa_{(НЛ)i}^{D}$ не менее I, т.е. применение МКП в этом случае, так же как и при использовании линейной оценки, обеспечивает улучшение результата.

Соотношение для выигрыша в числе экспериментов записывается следующим образом:

$$\varkappa_{(НЛ)i}^{N} = \frac{\max\limits_i (K_{L_i L_i}/D_i)}{\max\limits_i \left[ K_{L_i L_i} (1 - z_{L_i G}\, z_{G L_i})(1 - \Delta_i)/D_i \right]} , \qquad (\text{I7})$$

где $D_i$ – заданная дисперсия $i$-й вероятностной характеристики.

Сравним эффективность нелинейной и линейной оценок в МКП, для чего запишем соотношение выигрышей, например, в точности по дисперсии, получаемых в обоих случаях

$$\frac{\varkappa^D_{(HЛ)i}}{\varkappa^D_{(Л)i}} = \frac{1}{1-\Delta_i} . \qquad (18)$$

При $\Delta_i = 0$ $\varkappa^D_{(HЛ)i} = \varkappa^D_{(Л)i}$ и нелинейная оценка превращается в линейную, при $\Delta_i \to 1$ $\varkappa^D_{(HЛ)i} \gg \varkappa^D_{(Л)i}$ .

Таким образом, применение нелинейной оценки в МКП обеспечивает всегда получение выигрыша большего, чем при использовании линейной оценки. Однако в этом случае необходимо вычислять моменты третьего и четвертого, для определения которых с приемлемой степенью точности требуется достаточно представительная выборка реализаций.

Литература

1. Пугачев В.Н. Определение характеристик сложных систем методом статистических испытаний с использованием результатов аналитического исследования.-"Известия АН СССР". Техническая кибернетика, 1971, № 5.