

На правах рукописи

Курушина Светлана Евгеньевна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ
ТИПА «РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ» С ВНЕШНИМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Самара – 2010

Работа выполнена на кафедре физики государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)» (СГАУ)

Научный консультант доктор физико-математических наук, профессор
Завершинский Игорь Петрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Радченко Владимир Павлович,

доктор физико-математических наук, профессор
Романовский Юрий Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор
Храмов Александр Евгеньевич

Ведущая организация: государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится «17» декабря 2010 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.215.05 при государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)» по адресу: 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34, ауд.209.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СГАУ.

Автореферат разослан «___» _____ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.т.н., профессор

В.А.Фурсов

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Изучению систем типа «реакция-диффузия»

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = f_k(x_1, x_2, x_3, \dots, \vec{r}, t) + D_k \nabla^2 x_k, k = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

традиционно посвящается большое количество работ в силу широкой области ее приложений в активных физических, химических, экологических и экономических системах. Одним из важнейших направлений исследований систем типа (1) является изучение критических явлений (неустойчивостей и неравновесных фазовых переходов), а также условий возникновения и протекания автоволновых процессов, и, в частности, формирование диссипативных структур. Особенности поведения автономных систем типа (1) изучены аналитически и численно достаточно подробно (Turing A.M., 1952, Gierer A., Meinhardt H., 1972, Naken H., 1978, Белинцев Б.Н., 1979, Ebeling W, Feistel R., 1986, Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А., 1986, Meinhardt H., 1999, Романовский Ю.М., 1980, Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С., 2004, Murray J., 1983, 2002, Vaurmann M., Gross T, Feudel U., 2006, Ланда П.С., 2010 и др.).

Однако в реальной ситуации та или иная система, как правило, находится под действием внешних случайных полей. Поведение нелинейных систем во внешних флуктуирующих полях часто противоречит интуитивным представлениям о возможных путях их эволюции. Флуктуирующее окружение может индуцировать гораздо более богатое разнообразие режимов, чем те, которые возможны при соответствующих детерминированных условиях.

Случайные изменения параметров внешней среды, вызывают, прежде всего, появление флуктуаций в параметрах рассматриваемой системы (Хорстхемке В., Лефевр Р., 1987). Кроме того, флуктуации внешней среды могут вызывать в зависимости от конкретного вида системы изменение средних значений этих параметров и качественную перестройку поведения системы: приводить к исчезновению стационарных состояний или к появлению новых - неравновесных шумоиндуцированных фазовых (кинетических) переходов (Михайлов А.С., Упоров И.В., 1984, Landa, P.S., Zaikin A.A., Kurths, J. 2000, Malchow H., Hilker F.M., 2005).

Внешние шумы могут вызывать параметрическую неустойчивость, бистабильность систем, способствовать неограниченному росту высших моментов динамических переменных (Jung P., Mayer-Kress G., 1995, Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. 1999, Кляцкин В.И. 2001), приводить к возникновению незатухающих осцилляций, изменению размерности аттракторов и т.д.

Роль флуктуационных эффектов особенно велика, когда система находится вблизи точки бифуркации или имеет малое число степеней свободы. Флуктуации в неравновесной системе могут серьезно влиять на протекающие в ней процессы самоорганизации, а эти процессы из-за наличия обратной связи могут влиять на интенсивность и характерные временные и пространственные

масштабы флуктуаций, которые, в свою очередь, могут играть определяющую роль в процессе образования структур (Асташкина Е.В., Романовский Ю.М. 1980, Zaikin A. A., Schimansky-Geier L. 1998, Buceta J et al., 2003, Riaz S. S. et al., 2005). Процесс образования структур является существенно стохастическим. Даже незначительные флуктуации могут приводить к многочисленному ветвлению «древа эволюции» системы.

Теория эволюции распределенных систем во флуктуирующих средах еще далека от завершения. До настоящего времени не нашли разрешения многие вопросы формирования диссипативных структур (ДС) во внешних флуктуирующих полях. Как правило, аналитические методы исследования образования ДС развиваются с целью получения обобщенных уравнений Гинзбурга-Ландау, соответствующих исходной системе. Они описывают ее эволюцию в малой окрестности точки бифуркации. Построен метод получения уравнений Гинзбурга-Ландау для систем «реакция-диффузия», находящихся в поле внешних флуктуирующих во времени дельта - коррелированных сил (аддитивных шумов) (Н. Haken, 1978). Этот метод вновь приводит к уравнениям со случайными компонентами, что мало упрощает анализ поведения системы. Дальнейшее исследование основано на выводе соответствующего уравнения Фоккера-Планка. Однако весьма широкий класс задач требует анализа процессов формирования ДС в системах с мультипликативными флуктуациями параметров.

Сложность и ограниченная применимость аналитических методов делает актуальным построение численных моделей и разработку комплексов программ для исследования поведения систем типа (1) во внешних случайных полях.

Все вышеизложенное определяет актуальность темы исследования и позволяет сформулировать следующие цели и задачи исследования.

Целью работы является разработка методов исследования пространственно-временной динамики нелинейных распределенных систем типа «реакция-диффузия» во внешних флуктуирующих полях.

В соответствии с поставленной целью определены **основные задачи диссертации**:

1. Построение математических моделей, учитывающих влияние внешней флуктуирующей среды на системы типа «реакция-диффузия» и их исследование аналитическими и численными методами.

2. Разработка новых или модификация существующих приближенных аналитических методов исследования стохастических систем типа «реакция-диффузия».

3. Аналитическое и численное изучение закономерностей поведения систем типа «реакция-диффузия» во внешних флуктуирующих полях в окрестности точек бифуркации.

4. Изучение закономерностей образования пространственных и пространственно-временных диссипативных структур в поле аддитивных и мультипликативных флуктуаций.

5. Разработка методов определения характеристик процессов формирования пространственных диссипативных структур в случайном поле.

6. Разработка алгоритмов численного исследования конкретных систем «реакция-диффузия» и создание комплексов программ для проведения численных экспериментов, обработки и визуализации их результатов.

Научная новизна полученных результатов

1. Разработана обобщенная математическая модель систем типа «реакция-диффузия», учитывающая влияние флуктуирующей среды, которая моделируется как однородное изотропное гауссово поле с экспоненциальной функцией корреляции.

2. Установлен и описан новый шумоиндуцированный кинетический переход в трехуровневой стохастической модели конкуренции.

3. Разработан метод получения обобщенных уравнений Гинзбурга-Ландау для нелинейных систем типа «реакция-диффузия», находящихся во внешней флуктуирующей среде.

4. Предложены методы определения характеристик процессов образования пространственных диссипативных структур в случайном поле.

5. Разработан метод получения дисперсионных уравнений для усредненных по ансамблю реализаций амплитуд неустойчивых мод стохастических систем типа «реакция-диффузия». Аналитически найдены зависимости инкрементов усредненных по ансамблю реализаций амплитуд неустойчивых мод от волновых чисел, интенсивности и радиуса корреляции внешнего случайного поля.

6. Установлены правила отбора взаимодействующих мод, определяющие вид возникающих структур в поле мультипликативных флуктуаций.

7. Установлено и теоретически обосновано явление шумоиндуцированного параметрического возбуждения солитоноподобных пространственных структур в докритической области в системах «реакция-диффузия».

8. Найдена последовательность бифуркаций диссипативных структур Тьюринга в системах типа «реакция-диффузия» в поле внешних флуктуаций в зависимости от интенсивности мультипликативных флуктуаций параметров, входящих в нелинейную компоненту системы. Показано, что в системе возможен переход к сильно нерегулярному поведению.

9. Исследован дрейф точки обрыва волнового фронта спиральных волн в детерминированной системе типа «реакция-диффузия». Определены изменения, вносимые внешними шумами в дрейф точки обрыва волнового фронта.

10. Показано, что спиральные волны устойчивы в слабом флуктуационном фоне, слабый шум разрушает симметрию сложных автоволн. Внешние случайные поля большой интенсивности разрушают диссипативные структуры.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Обобщенная математическая модель системы «реакция-диффузия» в поле аддитивных и мультипликативных флуктуаций.

2. Результаты исследования трехуровневой стохастической модели конкуренции, включающие новый шумоиндуцированный кинетический переход.

3. Метод получения обобщенных уравнений Гинзбурга-Ландау для нелинейных систем типа «реакция-диффузия», находящихся во внешней флуктуирующей среде.

4. Метод получения дисперсионных уравнений для усредненных по ансамблю реализаций амплитуд неустойчивых мод стохастических систем типа «реакция-диффузия».

5. Алгоритмы и программные комплексы для анализа, моделирования эволюции и визуализации решений нелинейных многомерных систем типа «реакция-диффузия» в поле аддитивных и мультипликативных флуктуаций.

6. Результаты аналитического и численного исследования процесса формирования диссипативных структур Тьюринга в системах «реакция-диффузия» в поле внешних флуктуаций.

7. Результаты численного моделирования эволюции спиральных волн и сложных автоволн в поле внешних флуктуаций в модели «реакция-диффузия».

Связь с государственными программами.

Работы по теме диссертации выполнялись в соответствии с планами фундаментальных научно-исследовательских работ по программам: аналитическая ведомственная целевая программа «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)», проекты 1.2.08, 2.1.1/309, грант Российского фонда фундаментальных исследований 07-01-96608_р-поволжье - а. Работа поддержана Губернским грантом в области науки и техники 2010г.

Теоретическая и практическая ценность проведенных исследований заключается в том, что их результаты являются важным вкладом в теорию самоорганизации нелинейных неравновесных диссипативных систем, находящихся во внешней флуктуирующей среде, и могут найти практическое применение в соответствующих разделах науки.

Достоверность результатов диссертационной работы определяется их верификацией при разнообразном тестировании, включающем сравнение с точными решениями (при их наличии), сравнением с известными теоретическими результатами и расчетами по другим алгоритмам, адекватностью полученных результатов и согласованностью с современными представлениями о предмете исследования.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Самарского государственного аэрокосмического университета им. С.П. Королева, Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского и были представлены на следующих Всероссийских и Международных конференциях:

- I Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании» (Самара, 2005),
- II малом университетском форуме «Россия – великая держава» (Москва, 2005),

- II – VI Международных междисциплинарных научных конференциях «Курдюмовские чтения. Идеи синергетики в естественных науках» (Тверь, 2006-2010),
- VIII международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур» ХАОС-2007 (Саратов, 2007),
- XIV-XVI Международных конференциях по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС) (Алушта, 2007-2009),
- 50-52 научных конференциях МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук" (Москва, 2007-2009),
- XV Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна, 2008),
- I Международной конференции по математической физике и ее приложениям (Самара, 2008),
- IX Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Кисловодск, 2008),
- VII Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2010),
- XVII Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна, 2010),
- II Международной конференции по математической физике и ее приложениям (Самара, 2010),
- IX международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур» ХАОС-2010 (Саратов, 2010),
- II Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании» (Самара, 2010).

Основные публикации

По материалам диссертации опубликовано 45 печатных работ, в том числе 15 - в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией, и 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы (208 наименования), изложена на 190 страницах, содержит 67 рисунков.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы ее цель и задачи, дан краткий обзор работ по теме исследования, показана научная новизна, теоретическая и практическая ценность полученных результатов, приводятся положения, выносимые на защиту, описана структура и приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена исследованию шумоиндуцированных критических явлений, возникающих в двухкомпонентной системе хищник-жертва и трехкомпонентной модели конкуренции.

В разделе 1.1 исследуется влияние нелинейности на устойчивость положения равновесия в точечной системе хищник-жертва с мультипликативными флуктуациями параметров:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\alpha_0}{m_0}(1+z(t))x - \frac{\beta}{m_0}xy - \frac{\gamma}{m_0}x^2, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{k\beta}{m_0}xy - y, \quad (2)$$

где $x(t)$, $y(t)$ - численность жертв и хищников, соответственно; τ - безразмерное время, α_0 - среднее по времени значение коэффициента естественного прироста жертвы (средняя рождаемость); β - трофический коэффициент; k - КПД переработки биомассы жертв в новую биомассу хищников; γ - коэффициент внутривидовой конкуренции среди жертв; m_0 - среднее по времени значение коэффициента смертности хищников, $z(t)$ - гауссово случайное поле: $\langle z \rangle = 0$, $\langle z(t)z(t') \rangle = \sigma_0^2 \delta(t-t')$.

В работе (Свирижев Ю.М.,1987) аналитически исследована система, полученная линеаризацией детерминированной системы (2), в которой учитывались флуктуации параметра $\alpha/m = (\alpha_0/m_0)(1+z(t))$. Показано, что в такой системе, начиная с некоторой критической интенсивности флуктуаций, возникает стохастическая параметрическая раскачка положения равновесия, заключающаяся в неограниченном нарастании вторых моментов системы. Нелинейная стадия эволюции системы (2) ранее не рассматривалась.

В разделе 1.1 проведено численное исследование нелинейной системы (2) и системы (Свирижев Ю.М.,1987). Для моделирования использована схема Рунге-Кутты четвертого порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений. Обоснована возможность применения этой схемы для интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (2) в смысле Стратоновича. Результаты численного исследования вторых моментов динамической переменной x представлены на рис.1.

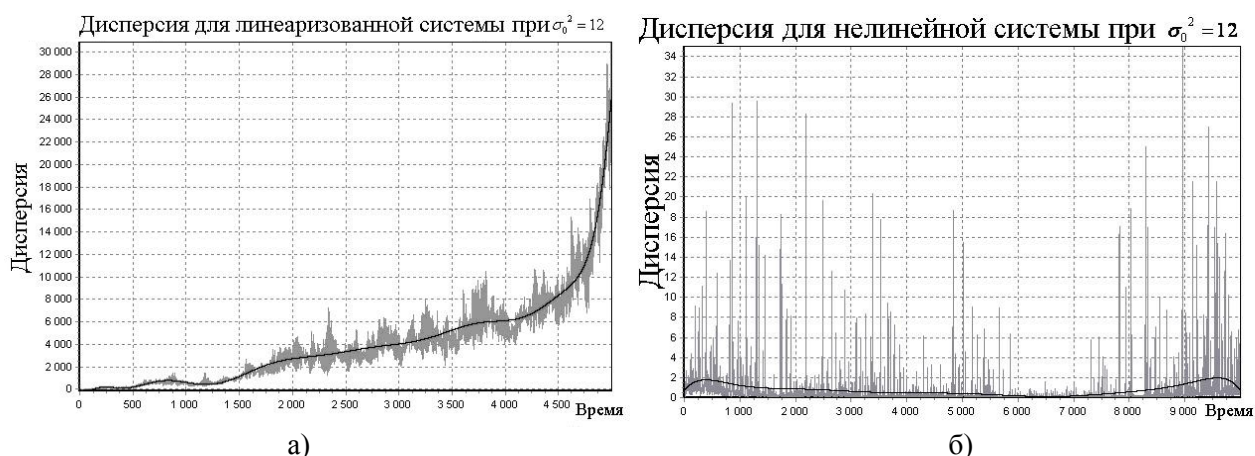


Рис. 1. Вторые моменты динамической переменной x : а) для линеаризованной системы (Свирижев Ю.М.,1987), б) для нелинейной системы (2).

Показано, что в системе, рассмотренной в (Свирижев Ю.М.,1987), возникает стохастическая параметрическая неустойчивость положения равновесия, что соответствует аналитическим результатам этой работы (рис. 1а)). Однако в нелинейной системе (2) неустойчивость стабилизируется и

формируется статистически устойчивое стационарное состояние системы (рис. 1б)).

Таким образом, нелинейность приводит к стабилизации корреляционной неустойчивости в системе типа хищник-жертва и ее положение равновесия становится статистически устойчивым.

В разделе 1.2 исследуются шумоиндуцированные кинетические переходы, возникающие в известной трехкомпонентной модели конкуренции:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = (BM - A)N, \frac{\partial n}{\partial t} = (bM - a)n + DV^2n, \frac{\partial M}{\partial t} = Q - GM - CN - cn + f(\vec{r}, t) \quad (3)$$

где N , n – плотности численности сильного и слабого вида, M – плотность ресурса; A, a (B, b) – коэффициенты естественного изменения численности видов; Q – скорость прироста ресурса; C, c – коэффициенты его потребления; G – коэффициент естественной убыли ресурса. Слагаемое DV^2n учитывает подвижность особей слабого вида. Случайное поле $f(\vec{r}, t)$ с функцией корреляции $\langle f(\vec{r}, t)f(\vec{r}', t') \rangle = 2G\theta \exp(-k_f|\vec{r} - \vec{r}'|) \exp(-k_t|t - t'|)$ задает пространственные и временные флуктуации плотности ресурса, где θ – интенсивность флуктуаций, k_f и k_t – определяют характерные пространственный и временной масштабы флуктуаций, соответственно.

В отсутствии внешнего флуктуирующего окружения и подвижности особей слабого вида единственное устойчивое решение системы (3) определяется теоремой Гаузе: невозможно сосуществование двух видов (Гаузе Г.Ф., 1938), опирающихся на один ресурс. В работе (Михайлов А.С., Упоров И.В., 1984) было показано, что ситуация становится отличной от классической, если скорость изменения плотности ресурса флуктуирует в пространстве и во времени. Начиная с некоторой критической интенсивности шума становится возможным статистически стационарное сосуществование двух видов («заселение среды»). Был использован ряд ограничений, сужающих область применимости полученных результатов.

Для комплексного решения поставленной задачи в отсутствие вышеуказанных ограничений в данной работе был проведен численный эксперимент. Разработан комплекс программ, структурная схема которого представлена на рис. 2.

В этом разделе подробно описана работа каждой подсистемы разработанного программного комплекса, представлены численные модели, предложен численный метод, используемый для моделирования решений, и обосновано его применение. Описана аппроксимация, сходимости, монотонность, устойчивость и асимптотическая устойчивость этого метода.

В результате проведения численного эксперимента показано, что система (3) допускает три различных типа стационарных решений: классическое решение, соответствующее исчезновению слабого вида (область 3 на рис. 4); решение, соответствующие явлению кинетического перехода типа «заселения среды», совпадающее с полученным в (Михайлов А.С., Упоров И.В., 1984) (рис. 3а, область 2 на рис. 4); и новый тип решений, соответствующий установлению стационарного состояния, при котором средняя по объему и

асимптотическая по времени плотность численности слабого вида больше средней по объему и асимптотической по времени плотности численности сильного вида (рис. 3б, область 1 на рис. 4).

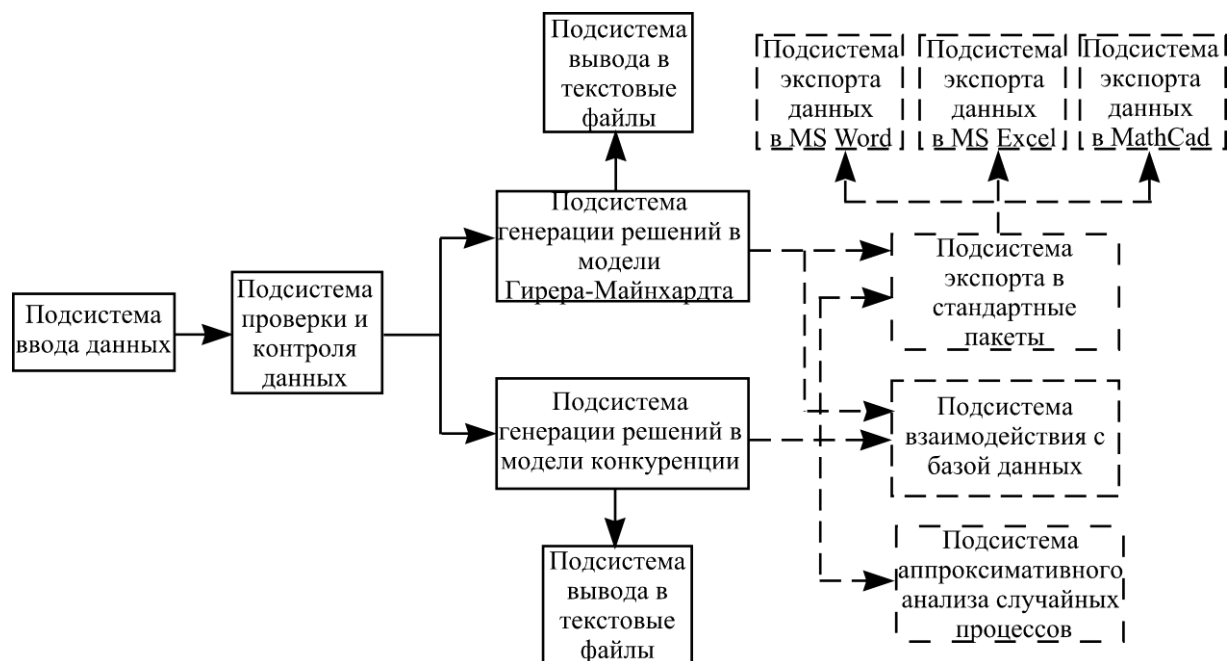


Рис.2 Структурная схема комплекса программ, разработанного для исследования кинетических переходов в трехкомпонентной модели конкуренции (2) и пространственной динамики модели Гирера – Майнхардта в поле аддитивных флуктуаций.

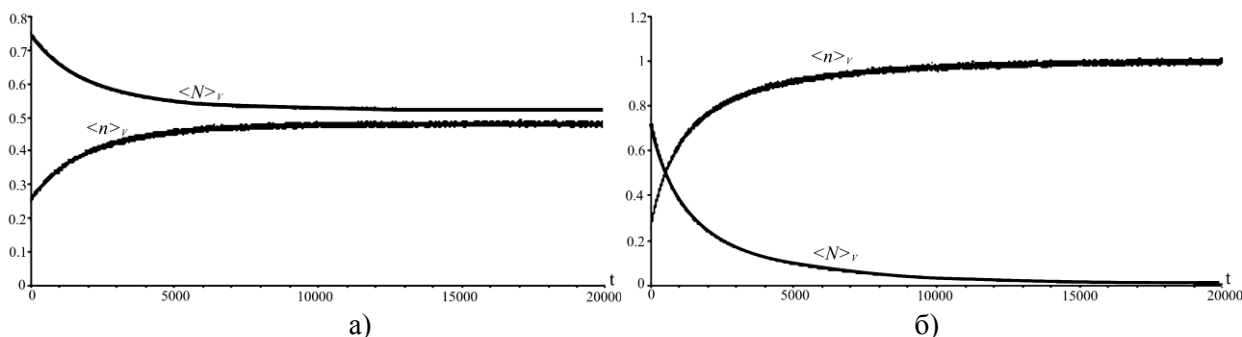


Рис. 3. Динамика изменения во времени средних по объему плотностей численности слабого $\langle n \rangle_v$ и сильного $\langle N \rangle_v$ видов для некоторой реализации: а) режим «заселения среды»; б) режим «инверсии».

Построены параметрические диаграммы на плоскостях (D, p_1) и (D, θ) , определяющие границы областей различных типов решений (рис. 4). Здесь $p_1 = a/b - A/B$ - дефицит ресурса в стационарном состоянии для размножения особей слабого вида. Исследованы зависимости асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого и сильного видов от параметров модели.

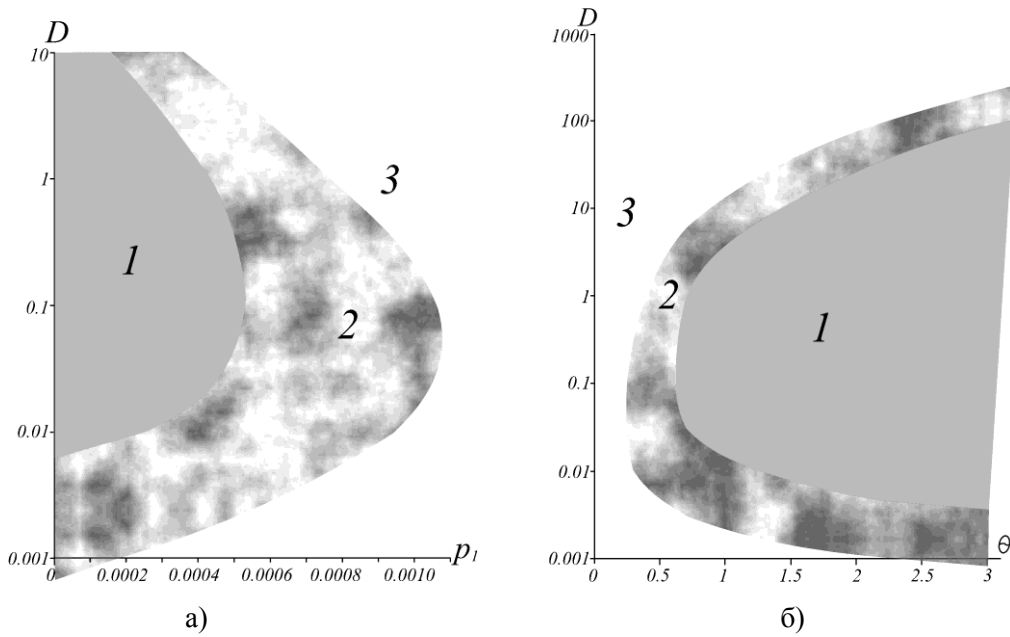


Рис.4 Параметрические диаграммы для системы (2): а) на плоскости (D, p_1) ; б) на плоскости (D, θ) . 1 - область режима «инверсии»; 2 - область режима «заселения среды»; 3 - область классических решений.

Во второй главе предложена общая модель двухкомпонентной системы типа «реакция-диффузия», учитывающая влияние реальной внешней флуктуирующей среды, приведено ее обоснование. Предложены методы получения обобщенных уравнений Гинзбурга-Ландау при возникновении неустойчивостей типа мягкой и жесткой моды и дисперсионного уравнения для усредненных по ансамблю реализаций амплитуд незатухающих мод (параметров порядка) этой модели. Описана эволюция предложенной модели в окрестности точки бифуркации Тьюринга в присутствии внешних флуктуаций. Разработаны методы определения характеристик процессов формирования пространственных диссипативных структур (ДС) в случайном поле.

В разделе **2.1** построена обобщенная математическая модель, учитывающая влияние флуктуирующей внешней среды, на двухкомпонентные системы типа «реакция-диффузия». В общем случае безразмерных переменных ее можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= P(x_1, x_2, \chi_0, \chi_{10}, \dots, \chi_n) + f_1(\bar{r}, \tau) P_2(x_1, x_2, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n) + F_1(\bar{r}, \tau) + \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= Q(x_1, x_2, \eta_0, \eta_{10}, \dots, \eta_n) + f_2(\bar{r}, \tau) Q_2(x_1, x_2, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n) + F_2(\bar{r}, \tau) + D \nabla^2 x_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь x_1, x_2 – динамические переменные, $\chi_0, \dots, \chi_n, \eta_0, \dots, \eta_n$ – параметры задачи, D , – отношение коэффициентов диффузии, P, Q, P_2 и Q_2 – нелинейные функции, описывающие взаимодействие подсистем, вид которых определяется конкретной задачей. Случайные поля $f_i(\bar{r}, t)$ определяют пространственно-временные гауссовы флуктуации параметров χ_1, η_1 с корреляционной функцией:

$$\langle f_i(\bar{r}', t') f_j(\bar{r}'', \tau) \rangle = \Phi_i(|\bar{r}' - \bar{r}''|) \exp(-k_i |t' - \tau|) \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (5)$$

и нулевыми средними значениями. Функция $\Phi_i(|\bar{r}' - \bar{r}''|)$ задает пространственную зависимость корреляций случайного поля. Время

корреляции $r_i = k_i^{-1}$ - характерный временной масштаб внешних флуктуаций. Случайные поля $F_i(\vec{r}, \tau)$ с функцией корреляции вида (5) и нулевыми средними значениями учитывают воздействие случайных сил.

Вид корреляционной функции (5) выбран в соответствии с результатами работы (W. Horsthemke, R. Lefever, 1984), где показано, что для большинства реальных систем, имеющих немарковское поведение, хорошим приближением для моделирования флуктуирующей окружающей среды является стационарное однородное изотропное гауссово поле с экспоненциальной функцией корреляции.

Показано, что модель (4) может быть легко модифицирована для случая произвольного числа флуктуирующих параметров.

Раздел 2.2 посвящен разработке методов получения обобщенных уравнений Гинзбурга-Ландау при возникновении неустойчивостей типа мягкой и жесткой мод и дисперсионного уравнения для усредненных по ансамблю реализаций параметров порядка модели (4).

Базовые математические модели самоорганизации едины для широкого класса физических, химических, биологических и экономических систем. К таким моделям относятся обобщенные уравнения Гинзбурга-Ландау, решения которых хорошо изучены. Линейные члены уравнений Гинзбурга-Ландау определяют положение точки бифуркации в пространстве параметров задачи. Нелинейные слагаемые определяют правила отбора взаимодействующих мод и, следовательно, вид возникающих структур, а также ограничивают секулярный рост амплитуд неустойчивых мод. Поэтому разработка новых или модификация существующих аналитических методов сведения исходной системы к базовым моделям представляется важной.

Метод получения обобщенных уравнений Гинзбурга-Ландау для систем, в правой части которых содержатся флуктуирующие во времени, но не в пространстве, дельта - коррелированные силы, обусловленные взаимодействием с внешними резервуарами и диссипацией внутри системы, описан в работе (H. Naken, 1978). В (H. Naken, 1978) не учтены пространственно-распределенные флуктуации и не исследован случай мультипликативных шумов.

В связи с этим в разделе 2.2 разработан метод получения обобщенных уравнений Гинзбурга-Ландау для системы (4).

Система (4) представляется в операторном виде:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial \tau} - K(\nabla^2) \vec{q} = \vec{g} + \vec{F}(\vec{r}, \tau). \quad (6)$$

Здесь вектор \vec{q} описывает отклонения динамических переменных от устойчивого положения равновесия x_{10} и x_{20} , возникающего при некоторых значениях параметра, выбранного в качестве бифуркационного. Линейный оператор $K(\nabla^2)$ и нелинейная часть \vec{g} получены разложением в ряд детерминированной части (4), $\vec{F}(\vec{r}, \tau)$ - случайная компонента уравнений, получающаяся в результате разложения в ряд функций $P_2(x_1, x_2, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n)$ и $Q_2(x_1, x_2, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$.

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{pmatrix}, \quad K(\nabla^2) = \begin{pmatrix} a_{11} + \nabla^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + D\nabla^2 \end{pmatrix}, \quad a_{1j} = \left. \frac{\partial P}{\partial x_j} \right|_{x_{10}, x_{20}}, \quad a_{2j} = \left. \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right|_{x_{10}, x_{20}},$$

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} \sum_{\mu, \nu=1}^2 g_{1, \mu \nu}^{(2)} q_\mu q_\nu + \sum_{\mu, \nu, \kappa=1}^2 g_{1, \mu \nu \kappa}^{(3)} q_\mu q_\nu q_\kappa \\ \sum_{\mu, \nu=1}^2 g_{2, \mu \nu}^{(2)} q_\mu q_\nu + \sum_{\mu, \nu, \kappa=1}^2 g_{2, \mu \nu \kappa}^{(3)} q_\mu q_\nu q_\kappa \end{pmatrix},$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_1(\bar{r}, \tau) + f_1(\bar{r}, t) \left[p_1^{(0)} + \sum_{\mu=1}^2 p_{1, \mu}^{(1)} q_\mu + \sum_{\mu, \nu=1}^2 p_{1, \mu \nu}^{(2)} q_\mu q_\nu \right] \\ F_2(\bar{r}, \tau) + f_2(\bar{r}, t) \left[p_2^{(0)} + \sum_{\mu=1}^2 p_{2, \mu}^{(1)} q_\mu + \sum_{\mu, \nu=1}^2 p_{2, \mu \nu}^{(2)} q_\mu q_\nu \right] \end{pmatrix}.$$

Здесь $g^{(n)}, p^{(m)}$ - коэффициенты разложения нелинейных функций (4) в ряд Тейлора.

Используя процедуру построения волновых пакетов и представляя решение задачи (6) в виде суперпозиции $\bar{q}(\bar{r}, \tau) = \sum_{\bar{k}, j} \bar{O}^{(j)}(\bar{k}) \xi_{\bar{k}}^{(j)}(\tau) e^{i\bar{k}\bar{r}}$, где $\bar{O}^{(j)}$ - собственные векторы линейного оператора $K(\nabla^2)$, получаются уравнения для амплитуд собственных мод:

$$\frac{d\xi_{\bar{k}}^{(j)}}{d\tau} - \lambda_j(\bar{k}) \xi_{\bar{k}}^{(j)} = \sum_{\substack{lm, \\ \bar{k}'\bar{k}''}} \sigma_{lm}^{(j)} \xi_{\bar{k}'}^{(l)} \xi_{\bar{k}''}^{(m)} + \sum_{\substack{lmn, \\ \bar{k}'\bar{k}''\bar{k}'''}} \sigma_{lmn}^{(j)} \xi_{\bar{k}'}^{(l)} \xi_{\bar{k}''}^{(m)} \xi_{\bar{k}'''}^{(n)} + F_{\bar{k}}(\xi, z), \quad (7)$$

где $\sigma_{lm}^{(j)} = \sigma_{lm}^{(j)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'') \delta(\bar{k}' + \bar{k}'' - \bar{k})$, $\sigma_{lmn}^{(j)} = \sigma_{lmn}^{(j)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'', \bar{k}''') \delta(\bar{k}' + \bar{k}'' + \bar{k}''' - \bar{k})$. Показано, что для аддитивных шумов функция $F_{\bar{k}}(\xi, z)$ совпадает с полученной в работе (Н.

Накен, 1978) и имеет вид $F_{\bar{k}}(\xi, z) = \sum_{\varepsilon=1}^2 O_{\varepsilon}^{*(j)}(\bar{k}) z_{\varepsilon, \bar{k}}$. При наличии

мультипликативного шума функция $F_{\bar{k}}(\xi, z)$ получена впервые и имеет вид

$$F_{\bar{k}}(\xi, z) = \sum_{\varphi=1}^2 O_{\varphi}^{*(j)} p_{\varphi}^{(0)} z_{\varphi, \bar{k}} + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{l, \bar{k}'} \varepsilon_{\varphi, l}^{(j)}(\bar{k}, \bar{k}') \xi_{\bar{k}'}^{(l)} z_{\varphi, \bar{k} - \bar{k}'} + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\substack{lm, \\ \bar{k}'\bar{k}''}} \varepsilon_{\varphi, lm}^{(j)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'') \xi_{\bar{k}'}^{(l)} \xi_{\bar{k}''}^{(m)} z_{\varphi, \bar{k} - \bar{k}' - \bar{k}''}.$$

Здесь $\lambda_j(\bar{k})$ - корни характеристического уравнения линеаризованной детерминированной системы. Функции $\sigma_{lm}^{(j)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'')$, $\sigma_{lmn}^{(j)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'', \bar{k}''')$, $\varepsilon_{\varphi, l}^{(j)}(\bar{k}, \bar{k}')$, $\varepsilon_{\varphi, lm}^{(j)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'')$ определяются собственными векторами оператора $K(\nabla^2)$, коэффициентами $g^{(n)}, p^{(m)}$ и $O_{\varphi}^{*(j)} = O_{\varphi}^{*(j)}(\bar{k})$ - компонентами собственных векторов оператора, сопряженного к $K(\nabla^2)$. $z_{j, \bar{k}} = z_{j, \bar{k}}(t) = \int e^{-i\bar{k}\bar{r}} f_j(\bar{r}, t) d\bar{r}$ - компоненты случайного векторного поля $\bar{z}(t)$. В предположении, что времена корреляций случайных полей гораздо меньше всех характерных времен задачи (4), корреляционные функции для компонент поля $\bar{z}(t)$ будут иметь вид: $\langle z_{j, \bar{k}}(t) z_{l, \bar{k}'}(\tau) \rangle = g_{jl}(|\bar{k}|) \delta(\bar{k} - \bar{k}') \delta(t - \tau) \delta_{jl}$.

Собственные моды с использованием дисперсионного соотношения детерминированной системы (4) разделяются на устойчивые $u_{\bar{k}}$ и

неустойчивые $\zeta_{\bar{k}}$. Считая, что изменения амплитуд происходят согласовано $\nu \sim \zeta^2$ и, полагая, что $|\nu| \ll |\zeta|$, проводится процедура адиабатического исключения устойчивых мод, в результате чего получаются обобщенные стохастические уравнения Гинзбурга-Ландау

$$\frac{d\zeta_{\bar{k}}}{d\tau} - \lambda_1(\bar{k})\zeta_{\bar{k}} = \Lambda_{\bar{k}}^{(0)} + \sum_{\bar{k}'} \Lambda_{\bar{k}\bar{k}'}^{(1)}\zeta_{\bar{k}'} + \sum_{\bar{k}'\bar{k}''} \Lambda_{\bar{k}\bar{k}'\bar{k}''}^{(2)}\zeta_{\bar{k}'}\zeta_{\bar{k}''} + \sum_{\bar{k}'\bar{k}''\bar{k}'''} \Lambda_{\bar{k}\bar{k}'\bar{k}''\bar{k}''' }^{(3)}\zeta_{\bar{k}'}\zeta_{\bar{k}''}\zeta_{\bar{k}'''} + \dots \quad (8)$$

В частном случае аддитивных шумов без учета пространственной корреляции (8) совпадает с системой, полученной в (Н. Naken, 1978).

Ниже приводятся выражения для операторов $\Lambda^{(n)}$ для случая мультипликативных шумов при наличии в исходной системе неустойчивости типа мягкой моды ($\text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$ и $\text{Re}(\lambda_1) \geq 0$). Оператор

$$\Lambda_{\bar{k}}^{(0)} = \sum_{\varphi=1}^2 O_{\varphi}^*(\bar{k}) p_{\varphi}^{(0)} z_{\varphi, \bar{k}} - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\bar{K}} \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\bar{k}, \bar{K}) \frac{O_{\varphi}^{*(\psi)}(\bar{K})}{\lambda_{\psi}(\bar{K})} p_{\varphi}^{(0)} z_{\varphi, \bar{k} - \bar{K}} z_{\varphi, \bar{K}}$$

приводит к смещению статистически стационарных состояний мод в поле мультипликативных флуктуаций, оператор

$$\begin{aligned} \Lambda_{\bar{k}}^{(1)} = & \sum_{\varphi=1}^2 \varepsilon_{\varphi, 1}^{(1)}(\bar{k}, \bar{k}') z_{\varphi, \bar{k} - \bar{k}'} - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\bar{K}} (\sigma_{1\psi}^{(1)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{K}) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\bar{k}, \bar{K}, \bar{k}')) \frac{O_{\varphi}^{*(\psi)}(\bar{K})}{\lambda_{\psi}(\bar{K})} p_{\varphi}^{(0)} \delta(\bar{k}' + \bar{K} - \bar{k}) z_{\varphi, \bar{K}} - \\ & - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\bar{K}} \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\bar{k}, \bar{K}) \frac{\varepsilon_{\varphi, 1}^{(\psi)}(\bar{K}, \bar{k}')}{\lambda_{\psi}(\bar{K})} z_{\varphi, \bar{k} - \bar{k}'}(\tau) z_{\varphi, \bar{k} - \bar{K}} - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\bar{K}} (\varepsilon_{\varphi, 1\psi}^{(1)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{K}) + \varepsilon_{\varphi, \psi 1}^{(1)}(\bar{k}, \bar{K}, \bar{k}')) \frac{O_{\varphi}^{*(\psi)}(\bar{K})}{\lambda_{\psi}(\bar{K})} p_{\varphi}^{(0)} z_{\varphi, \bar{k} - \bar{k}' - \bar{K}} z_{\varphi, \bar{K}}, \end{aligned}$$

определяет линейную по интенсивностям флуктуаций поправку к инкременту моды $\zeta_{\bar{k}}$, оператор

$$\begin{aligned} \Lambda_{\bar{k}\bar{k}''}^{(2)} = & \sigma_{11}^{(1)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'') \delta(\bar{k}' + \bar{k}'' - \bar{k}) + \sum_{\varphi=1}^2 \varepsilon_{\varphi, 11}^{(1)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'') z_{\varphi, \bar{k} - \bar{k}' - \bar{k}''} - \\ & - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\bar{K}} (\sigma_{1\psi}^{(1)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{K}) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\bar{k}, \bar{K}, \bar{k}')) \frac{\varepsilon_{\varphi, 1}^{(\psi)}(\bar{K}, \bar{k}'')}{\lambda_{\psi}(\bar{K})} \delta(\bar{k}' + \bar{K} - \bar{k}) z_{\varphi, \bar{K} - \bar{k}''} - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\bar{K}} \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\bar{k}, \bar{K}) \frac{\sigma_{11}^{(\psi)}(\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'')}{\lambda_{\psi}(\bar{K})} \delta(\bar{k}' + \bar{k}'' - \bar{K}) z_{\varphi, \bar{k} - \bar{K}} \end{aligned}$$

является оператором трехмодового взаимодействия неустойчивых мод (первое и второе слагаемые) и устойчивых мод с неустойчивыми (третье и четвертое слагаемые) и также определяет линейную поправку к инкременту моды $\zeta_{\bar{k}}$,

оператор $\Lambda_{\bar{k}\bar{k}''\bar{k}'''}^{(3)} = \delta(\bar{k}' + \bar{k}'' + \bar{k}''' - \bar{k}) \omega(\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'', \bar{k}''', \bar{K})$ является оператором четырехмодового взаимодействия.

Уравнения (8) усредняются по ансамблю реализаций с учетом их формальных решений и правил раскрытия моментов и расщепления корреляторов, описанных в работах (Стратонович Р.Л., 1985; Кляцкин В.И., 2001).

В результате впервые получена система уравнений для моментов параметров порядка, структура которой имеет вид

$$\frac{\partial \langle \zeta_{\bar{k}} \rangle}{\partial t} - \lambda_1(\bar{k}) \langle \zeta_{\bar{k}} \rangle = L_{\bar{k}}^{(0)} + L_{\bar{k}\bar{k}', \bar{k}'', \bar{K}}^{(1)} \langle \zeta_{\bar{k}'} \rangle + L_{\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'', \bar{k}''', \bar{K}}^{(2)} \langle \zeta_{\bar{k}'} \zeta_{\bar{k}''} \rangle + L_{\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'', \bar{k}''', \bar{K}, \bar{R}, \bar{R}'}^{(3)} \langle \zeta_{\bar{k}'} \zeta_{\bar{k}''} \zeta_{\bar{k}'''} \rangle. \quad (9)$$

Выражения для операторов $L_{\bar{k}}^{(0)}$, $L_{\bar{k}\bar{k}', \bar{k}'', \bar{K}}^{(1)}$, $L_{\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'', \bar{k}''', \bar{K}}^{(2)}$, $L_{\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'', \bar{k}''', \bar{K}, \bar{R}, \bar{R}'}^{(3)}$ приведены в диссертационной работе и здесь не представлены ввиду их громоздкости.

Полагая в (5) $\Phi_j(|\bar{r}' - \bar{r}''|) = \theta_j \varphi_j(|\bar{r}' - \bar{r}''|)$, при малых значениях интенсивностей флуктуаций θ_j , когда можно ограничиться членами, линейными по интенсивностям шума, из (9) следуют выражения для инкрементов незатухающих мод. Для частных случаев неустойчивостей типа мягкой моды ($\text{Im}(\lambda_{1,2})=0$ и $\text{Re}(\lambda_1) \geq 0$), типа жесткой моды ($\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$ и $\text{Re}(\lambda_{1,2}) \geq 0$) при аддитивном шуме и неустойчивости типа мягкой моды ($\text{Im}(\lambda_{1,2})=0$ и $\text{Re}(\lambda_1) \geq 0$) при мультипликативном шуме эти выражения приведены в диссертационной работе.

Анализ системы (9) позволил впервые выявить следующие особенности поведения системы типа «реакция-диффузия» во флуктуирующих полях вблизи точки бифуркации Тьюринга.

После усреднения возникают дополнительные детерминированные слагаемые, входящие в оператор $L_k^{(0)}$ и не зависящие от амплитуд параметров порядка. Наличие таких слагаемых в уравнениях типа (9) приводит к смещению статистически стационарного состояния каждой моды.

При малой интенсивности мультипликативных флуктуаций в процессе образования диссипативных структур изменяются условия резонансного взаимодействия неустойчивых мод: возникает дополнительное условие $2\bar{k}' - \bar{k}'' = \bar{k}$. При увеличении интенсивности шума взаимодействие становится многомодовым: условия отбора включают пять и более мод.

Наличие внешнего шума приводит к изменению инкремента нарастания каждой моды и изменению области неустойчивости. Это обуславливает зависимость скорости образования пространственных диссипативных структур от параметров случайного поля и смещение точки бифуркации Тьюринга (шумоиндуцированное параметрическое возбуждение системы).

Раздел 2.3 посвящен разработке методов определения характеристик процессов формирования диссипативных структур в случайном поле.

Известно, что в процессе структурообразования флуктуации динамических переменных возрастают до макроскопических значений. Кроме того, моменты резкого изменения уровня флуктуаций динамических переменных соответствуют моментам качественной перестройки в поведении системы. Чтобы выявить влияние внешних шумов на уровень флуктуаций динамических переменных, необходимо решить проблему определения характеристик процессов образования диссипативных структур.

Рассматриваемые системы являются эргодическими. Свойство эргодичности систем позволяет заменить усреднение по ансамблю реализаций на усреднение по пространству, что значительно упрощает исследование поставленного вопроса.

В работе предлагается численно исследовать усредненные по поверхности слоя (пространству) флуктуации динамических переменных $\sigma = \sqrt{\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2}$ в зависимости от времени. Характерная зависимость усредненных по поверхности слоя флуктуаций динамических переменных приведена на рис. 12.

Для проведения оценки времени переходного режима от однородного состояния к ДС предлагается следующая методика. Пусть U^∞ - распределение динамических переменных в ДС, $U^k \in R^{n \times n}$ - распределение динамических переменных в момент времени k , а $U_{i,j}^k \in R$, $i, j = 1, \dots, n$ - значения динамических переменных в точке с координатой (i, j) в момент времени k . Введем нормы $S^k = \|U^\infty - U^k\|_\infty$ и $C^k = \|U^{k+1} - U^k\|_\infty$. Зависимость S^k от времени определяет близость состояния системы к ДС, C^k показывает близость соседних состояний друг к другу. Здесь для любой матрицы A максимальная строковая матричная норма определена соотношением $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

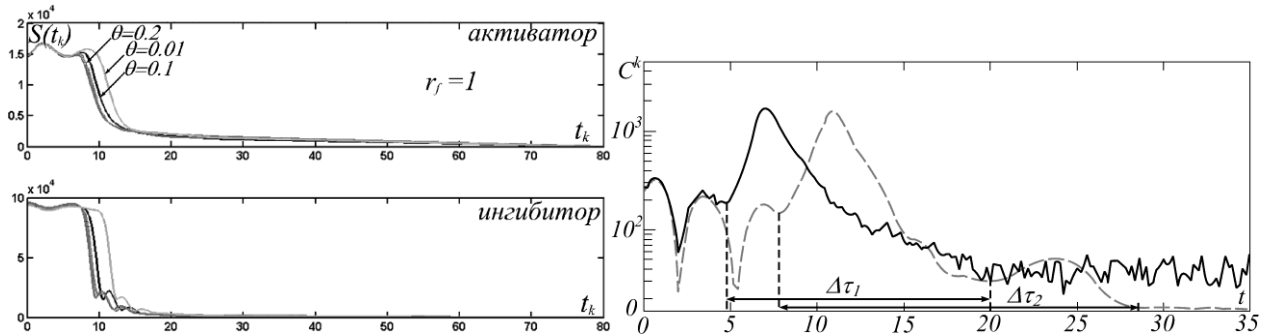


Рис. 5 Характерные зависимости норм матриц разностей распределений концентрации активатора (ингибитора) от времени для модифицированной системы Гирера-Майнхарта.

Время переходного режима отождествляется с интервалом $\Delta\tau$ в зависимости C^k от времени или интервалом между резкими изменениями в зависимости S^k (см. рис. 5).

В третьей главе разработанные выше аналитические методы применены для исследования пространственной динамики конкретных двухкомпонентных систем, существенно отличающихся видом нелинейных функций P, Q, P_2 и Q_2 , в поле аддитивных флуктуаций динамических переменных и мультипликативных флуктуаций параметров.

Раздел **3.1** посвящен изучению влияния аддитивных шумов на устойчивость системы Гирера – Майнхардта вблизи точки бифуркации Тьюринга. Эта система является базовой в понимании процессов биологического формообразования и дифференциации клеток. Скорости изменения концентраций автокаталитической и демпфирующей переменных (активатора и ингибитора, соответственно) в модифицированной модели Гирера - Майнхардта, учитывающей действие внешней случайной силы, описываются системой уравнений:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \rho + k \frac{a^2}{h} - \mu a + D_a \nabla^2 a + F_1(\vec{r}, t), \quad \frac{\partial h}{\partial t} = ca^2 - \nu h + D_h \nabla^2 h + F_2(\vec{r}, t). \quad (10)$$

Здесь ρ – скорость образования автокаталитической переменной, μ – ее постоянная распада, D_a – коэффициент диффузии активатора; ν – постоянная скорости распада демпфирующей переменной, член ca^2 задает скорость образования ингибитора, D_h – коэффициент диффузии ингибитора. Слагаемое ka^2/h учитывает, что увеличение концентрации ингибитора снижает скорость автокаталитического процесса. Случайные функции $F_i(\vec{r}, t)$ определяют

пространственные и временные гауссовы флуктуации скорости изменения концентраций активатора и ингибитора, соответственно, с корреляционными функциями $\langle F_i(\vec{r}, t) F_i(\vec{r}', \tau) \rangle = \theta_i f_i(|\vec{r} - \vec{r}'|) \delta(t - \tau)$ и нулевыми средними значениями. Взаимная корреляция случайных функций $F_i(\vec{r}, t)$ отсутствует.

Применение предложенного в разделе 2.2 метода получения обобщенных уравнений Гинзбурга-Ландау позволяет вывести следующие уравнения для амплитуд неустойчивых мод:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_{k_c, \varphi}}{dt} - \lambda_1(k_c) \zeta_{k_c, \varphi} = c(k_c) \zeta_{k_c, \varphi + \pi/3} \zeta_{k_c, \varphi - \pi/3} + \sum_{\varphi'} d(|\varphi - \varphi'|) \zeta_{k_c, \varphi} |\zeta_{k_c, \varphi'}|^2 + \\ + \sum_{\varphi'} \zeta_{k_c, \varphi'} z_{1, \vec{k}}(t) \omega_1(|\varphi - \varphi'|) + \sum_{\varphi'} \zeta_{k_c, \varphi'} z_{2, \vec{k}}(t) \omega_2(|\varphi - \varphi'|) + O_{1, k_c}^{*(1)} z_{1, \vec{k}_c}(t) + O_{2, k_c}^{*(1)} z_{2, \vec{k}_c}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11) получены для маргинального состояния, когда неустойчивость возникает для одной моды $\vec{k} = \vec{k}_c$. Вектор \vec{k}_c заменен его модулем k_c и углом φ , который этот вектор образует с фиксированной осью. Выражения для $\lambda_j(k)$, векторов $\vec{O}^{(j)}$ и $\vec{O}^{*(j)}$ и функций $c(k_c)$, $\chi(k_c, k)$, $\varepsilon(k_c, k)$, $d(k_c, k)$, $\omega_1(|\varphi - \varphi'|)$, $\omega_2(|\varphi - \varphi'|)$ не приводятся в силу громоздкости. Усреднение уравнений (11), позволяет получить зависимость инкремента критической моды от параметров внешней случайной силы:

$$\lambda = \lambda_1(k_c) + \theta_1 \omega_1^2(0) \Phi_1(0) + \theta_2 \omega_2^2(0) \Phi_2(0). \quad (12)$$

Численно исследована зависимость действительной части λ от волнового числа k при различных параметрах внешнего шума. Результаты этого расчета для двумерной среды приведены на рис. 6. Видно, что при увеличении интенсивности флуктуаций и радиусов корреляции область неустойчивых мод, для которых $\text{Re}(\lambda) > 0$, увеличивается.

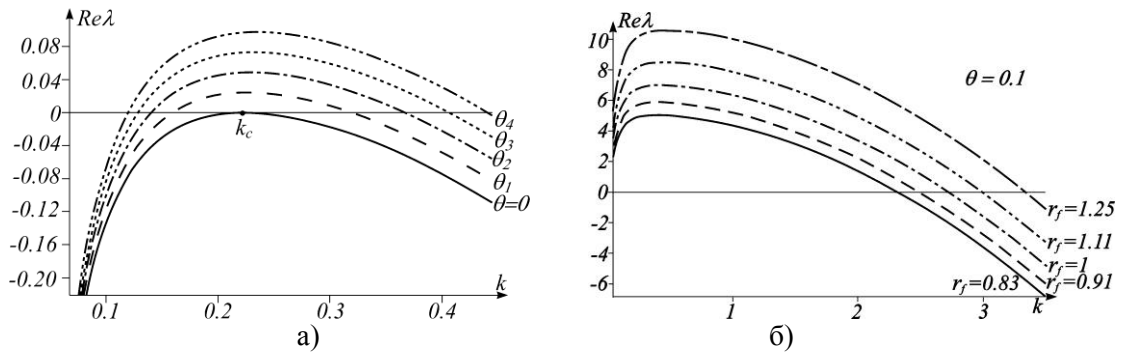


Рис. 6. Влияние параметров аддитивных флуктуаций на инкременты незатухающих мод в модели (10): а) при разных интенсивностях флуктуаций $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$ ($k_j = 1$); б) при различных радиусах корреляции ($\theta = 0.1$).

В разделе 3.2 рассматривается влияние мультипликативного шума на эволюцию системы Гирера - Майнхардта в окрестности точки бифуркации. Исследована модифицированная система:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \rho_0(1 + f_2(\vec{r}, \tau)) + \frac{a^2}{h} - \mu_0(1 + f_1(\vec{r}, t))a + \nabla^2 a; \quad \frac{\partial h}{\partial \tau} = a^2 - h + D \nabla^2 h. \quad (13)$$

где $\rho_0 = \rho c / \nu k$, $\mu_0 = \mu / \nu$.

С точностью до слагаемых, квадратичных по интенсивностям флуктуаций и кубических по амплитудам неустойчивых мод, получена система уравнений, описывающих взаимодействие этих мод, имеющих структуру (9). Показано, что инкременты незатухающих мод зависят от параметров случайного поля. Зависимости инкрементов неустойчивых мод от волнового числа, а также величины области неустойчивости Δk от интенсивности шума θ_1 поля $f_1(\vec{r}, t)$ при разных радиусах корреляции r_{fl} в закритической области $\rho_0 \leq \rho_{0c}$, приведены на рис 7.

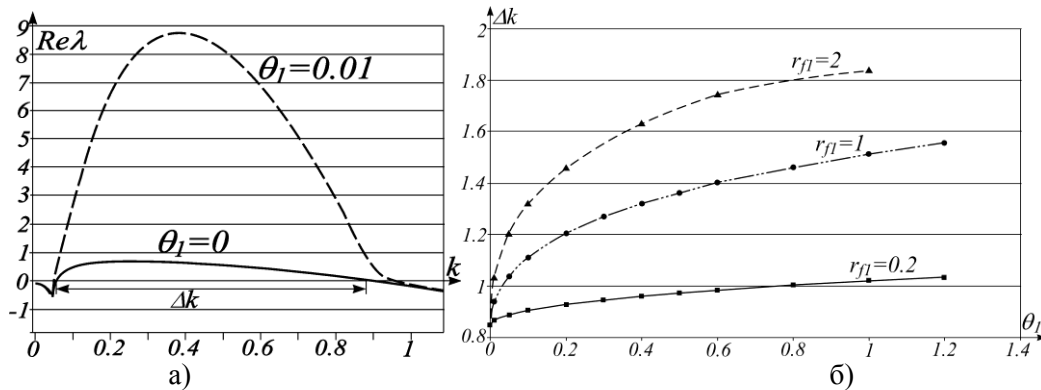


Рис. 7. а) Характерная зависимость действительной части собственного значения λ (инкремента) от волнового числа k в закритической области. Для сравнения значений $Re(\lambda)$ на рисунке приведена кривая при $\theta_1 = 0$. б) Зависимость величины области неустойчивости Δk от интенсивности шума θ_1 при разных радиусах корреляции r_{fl} . Параметры модели: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $\theta_2 = 0$. ($\rho_{0c} = 0.814$).

Впервые получены зависимости действительной части собственных значений от волнового числа в докритической области $\rho_0 \geq \rho_{0c}$ при различных интенсивностях шума θ_1 и разных радиусах корреляции r_{fl} , рис. 8.

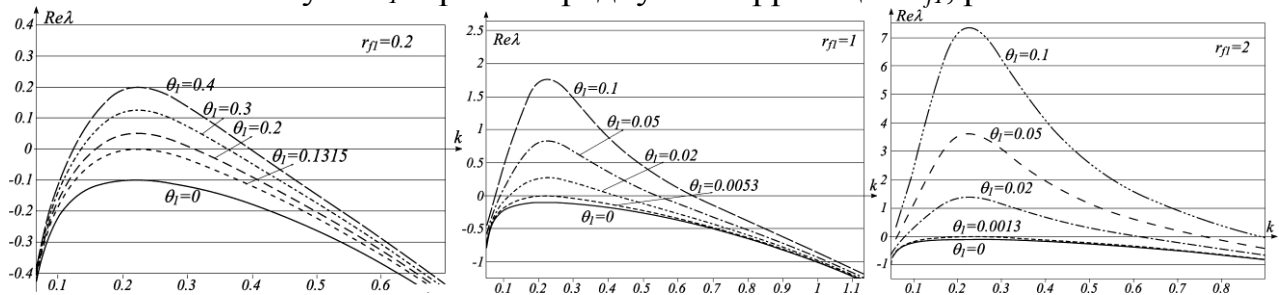


Рис. 8. Зависимость действительной части λ от волнового числа при $\rho_0 > \rho_{0c}$. Параметры модели: $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $\theta_2 = 0$. $\rho_0 = 1$.

Из приведенных на рис. 8 зависимостей видно, что в области $\rho_0 > \rho_{0c}$ для каждого ρ_0 при данном радиусе корреляции существует такая критическая интенсивность флуктуаций θ_c , начиная с которой возникает неустойчивость, т.е. шум индуцирует параметрическую неустойчивость в докритической области. Исследована зависимость критической интенсивности флуктуаций от постоянной компоненты скорости образования автокаталитической переменной при различных радиусах корреляции при параметрическом возбуждении.

В разделе 3.3 аналитически изучено влияние мультипликативных флуктуаций параметров на устойчивость в окрестности точки бифуркации стохастической системы Шеффера, которая описывает взаимодействие

популяций фитопланктона, зоопланктона и рыбы и имеет важное хозяйственное значение:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \tau} = x_1(1 - x_1) - \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\bar{r}, \tau)) \frac{x_1 x_2}{(1 + b x_1)} + \nabla^2 x_1; \quad (14)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \tau} = \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\bar{r}, \tau)) \frac{x_1 x_2}{(1 + b x_1)} - \frac{m_0}{r_0}(1 + f_1(\bar{r}, \tau)) x_2 - \frac{g^2 x_2^2}{r_0(1 + h^2 x_2^2)} f + \frac{d_2}{d_1} \nabla^2 x_2.$$

Здесь x_1 – плотность биомассы популяции фитопланктона, x_2 – плотность биомассы популяции зоопланктона, параметры $r_0, a_0, b, m_0, g, h, f, d_1$ и d_2 подробно описаны в (Scheffer M., 1991, Malchow H., 2000).

В соответствии с методом, изложенным в разделе 2.2, получено дисперсионное уравнение для неустойчивых мод:

$$\lambda = \lambda_1(k) + \theta_2 \left(\chi(k) / k_{f_2}^2 + k_{f_2} \varphi(k) / (k^2 + k_{f_2}^2)^{3/2} \right) + \theta_1 \left(\eta(k) / k_{f_1}^2 + k_{f_1} \rho(k) / (k^2 + k_{f_1}^2)^{3/2} \right). \quad (15)$$

Графики зависимости инкрементов неустойчивых мод от волнового числа стохастической системы Шеффера, рассчитанные на основании выражения (15) представлены на рис. 9.

Из рис. 9а видно, что в закритической области при увеличении интенсивности флуктуаций θ_1 поля $f_1(\bar{r}, \tau)$, входящего в линейную компоненту системы (14), область неустойчивых мод, для которых $Re(\lambda) > 0$, увеличивается. Кроме того, инкременты при наличии шума больше инкрементов при его отсутствии. Таким образом, при наличии мультипликативного шума амплитуды неустойчивых мод нарастают значительно быстрее, чем в его отсутствии, что ускоряет процесс разрушения однородного состояния и образования диссипативных структур. Важно отметить, что увеличение интенсивности θ_2 поля $f_2(\bar{r}, \tau)$, входящего в нелинейную компоненту системы (14), влияет на процесс образования диссипативных структур значительно сильнее.

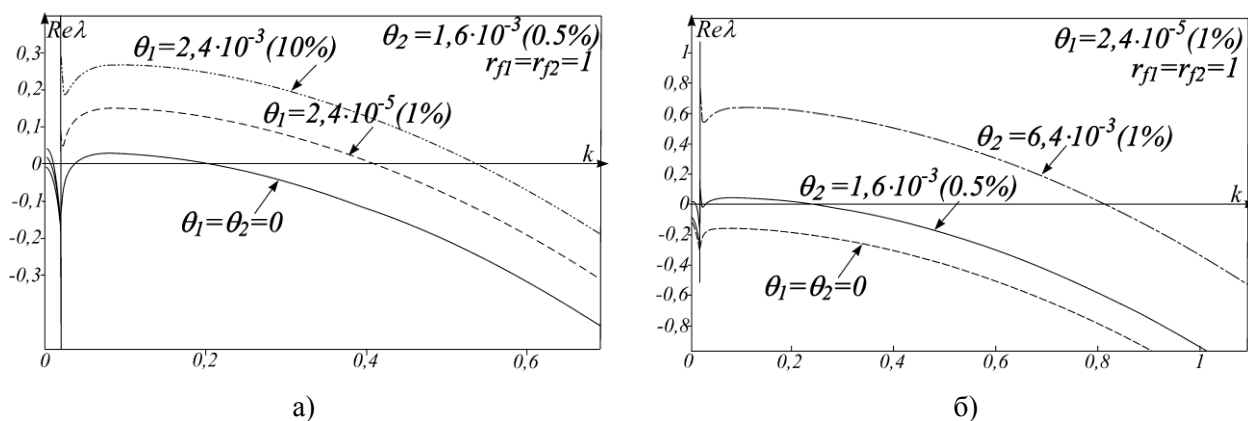


Рис. 9 Характерные зависимости действительных частей собственных значений $Re(\lambda)$ от волновых чисел k : а) в закритической области вдали от точки бифуркации Тьюринга при изменении $\theta_1, \theta_2 = 1,6 \cdot 10^{-3}$; б) в докритической области при изменении $\theta_2, \theta_1 = 2,4 \cdot 10^{-5}$. Пунктирной линией показана соответствующая зависимость при отсутствии флуктуаций

На рис. 9б приведены зависимости $Re(\lambda)$ от волнового числа в докритической области. Видно, что в отсутствие шума неустойчивость не возникает. При наличии мультипликативных флуктуаций (линии сплошная и пунктирная с точкой на рис. 9б) возникает область неустойчивых мод - шум индуцирует параметрическую неустойчивость системы (14).

Результаты исследований, представленных в разделах 3.2 и 3.3, демонстрируют качественное совпадение особенностей поведения различных систем типа реакция-диффузия в поле внешних флуктуаций.

Таким образом, аналитическое исследование поведения систем реакция-диффузия в окрестности точки бифуркации Тьюринга в поле внешних флуктуаций показало наличие следующих особенностей процесса образования пространственных диссипативных структур.

Расширяется область неустойчивости систем. Внешние шумы приводят к увеличению инкрементов неустойчивых мод, в результате чего амплитуды неустойчивых мод нарастают быстрее, чем в отсутствие шума, что ускоряет процесс разрушения однородного состояния и образования диссипативных структур.

Отмечены следующие особенности влияния мультипликативных флуктуаций параметров системы: происходит сдвиг стационарного состояния каждой моды, изменяются условия резонансного взаимодействия мод, возникает параметрическое возбуждение системы.

В четвертой главе представлены результаты численного моделирования пространственной динамики модифицированных систем Гирера – Майнхардта и Шеффера.

Для решения поставленных задач создан программный комплекс, позволяющий провести анализ дисперсионных уравнений для усредненных незатухающих мод, моделирование эволюции и визуализацию решений исследуемых систем. Структурная схема данного программного комплекса (ПК) показана на рис. 10.

В разделе 4.1 описана работа подсистем разработанного ПК, представлены численные модели, предложен численный метод, используемый для моделирования решений и обосновано его применение. Описана аппроксимация, сходимость и устойчивость этого метода. Разработана и описана методика моделирования случайного поля с функцией корреляции (4).

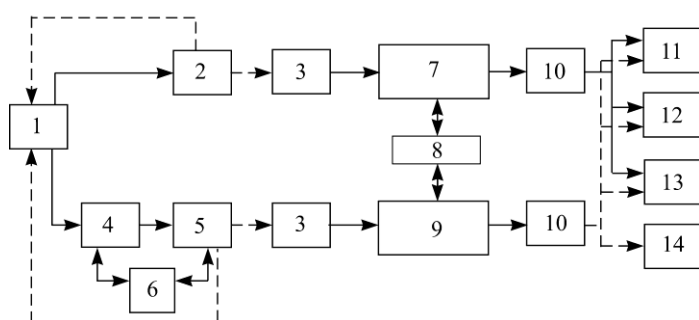


Рис. 10 Структурная схема комплекса программ, разработанного для исследования пространственно-временной динамики моделей Гирера – Майнхардта и Шеффера в поле мультипликативных флуктуаций параметров. 1. Подсистема ввода. 2. Подсистема анализа дисперсионного соотношения системы Гирера – Майнхардта. 3. Подсистема проверки и контроля данных. 4. Подсистема генерации решений

детерминированной локальной системы Шеффера и построение фазового портрета. 5. Подсистема анализа дисперсионного соотношения системы Шеффера. 6. Подсистема вычисления особых точек и определения их устойчивости. 7. Подсистема генерации решений в стохастической модели Гирера – Майнхардта. 8. Подсистема моделирования случайного поля. 9. Подсистема генерации решений в стохастической модели Шеффера. 10. Подсистема вывода в текстовые файлы. 11. Подсистема вычисления усредненных по поверхности слоя флуктуаций динамических переменных. 12. Подсистема вычисления норм матриц разностей распределений динамических переменных. 13. Подсистема генерации видеоизображений и графической визуализации. 14. Подсистема определения положения точки обрыва волнового фронта спиральной волны.

В разделе 4.2 представлены результаты моделирования эволюции структур Тьюринга, возникающих в стохастических моделях (10), (13) и (14) в закритической области. Проведено исследование, демонстрирующее изменение скорости эволюции систем в зависимости от изменения характеристик внешнего случайного поля. Определены усредненные по поверхности слоя интегрирования флуктуации динамических переменных в зависимости от времени. Проведено сравнение процессов образования ДС с помощью норм матриц разностей распределений динамических переменных. Проведено сравнение процессов структурообразования в поле внешних аддитивных и мультипликативных шумов. Проведено сравнение результатов численного эксперимента с аналитическими решениями главы 3. Показано хорошее совпадение результатов.

На рис. 11 – 16 представлены результаты моделирования.

Показано, что увеличение интенсивностей и радиусов корреляций внешнего шума приводит к ускорению разрушения однородного состояния и образования ДС, что демонстрируют рис. 11,13,15. Этот вывод качественно соответствует результатам аналитического исследования, представленного в главе 3. В процессе формирования ДС уровень флуктуаций динамических переменных возрастает до макроскопических значений, рис. 12,14. При увеличении интенсивности флуктуаций параметров, входящих в нелинейную компоненту системы, возможен переход к сильно нерегулярному поведению (см. рис. 16).

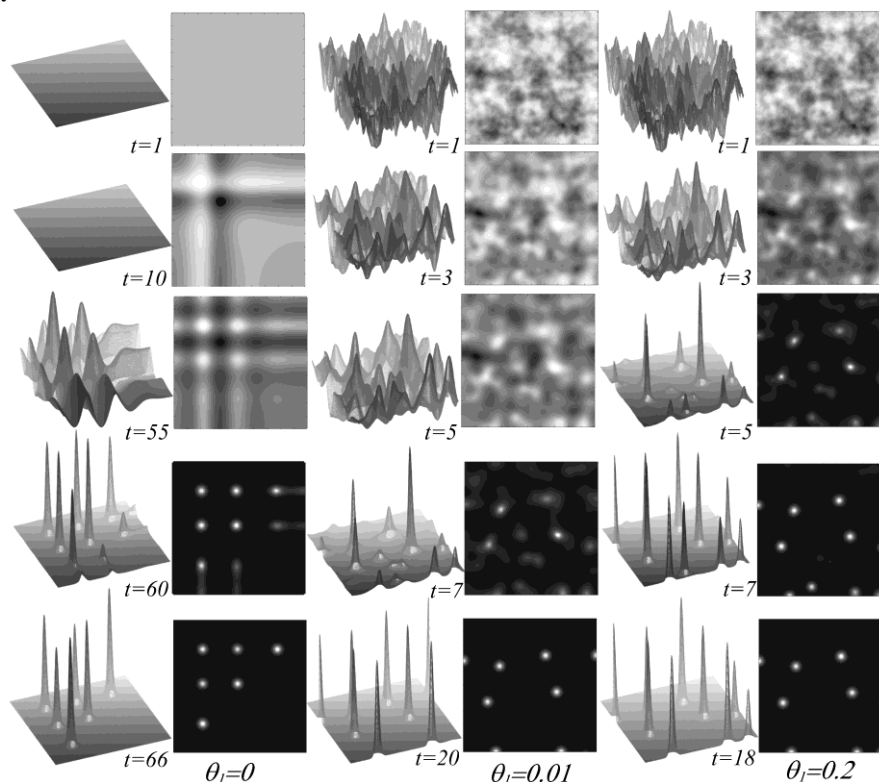


Рис. 11. Формирование контрастных ДС автокаталитической переменной. Для изображения сверху (2,4,6 вертикальные ряды) градиент цвета от черного к белому визуализирует изменение значений переменной от минимального до максимального соответственно. Слой 100×100 единиц. В середине указаны моменты модельного времени. Нижняя строка соответствует моментам установления статистически стационарного состояния. Изменение θ_1 указано снизу. Параметры модели: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $k_{f1} = k_{f2} = 1$. $\theta_2 = 0$.

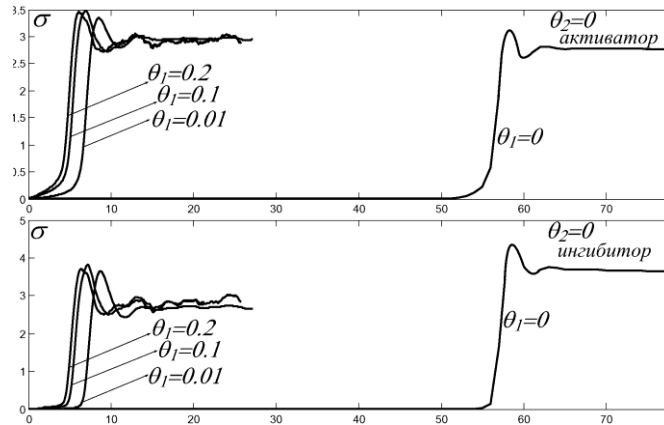


Рис 12. Усредненные по поверхности слоя флуктуации динамических переменных при различных интенсивностях мультипликативного шума. Параметры модели: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $k_{f1} = k_{f2} = 1$. $\theta_2 = 0$.

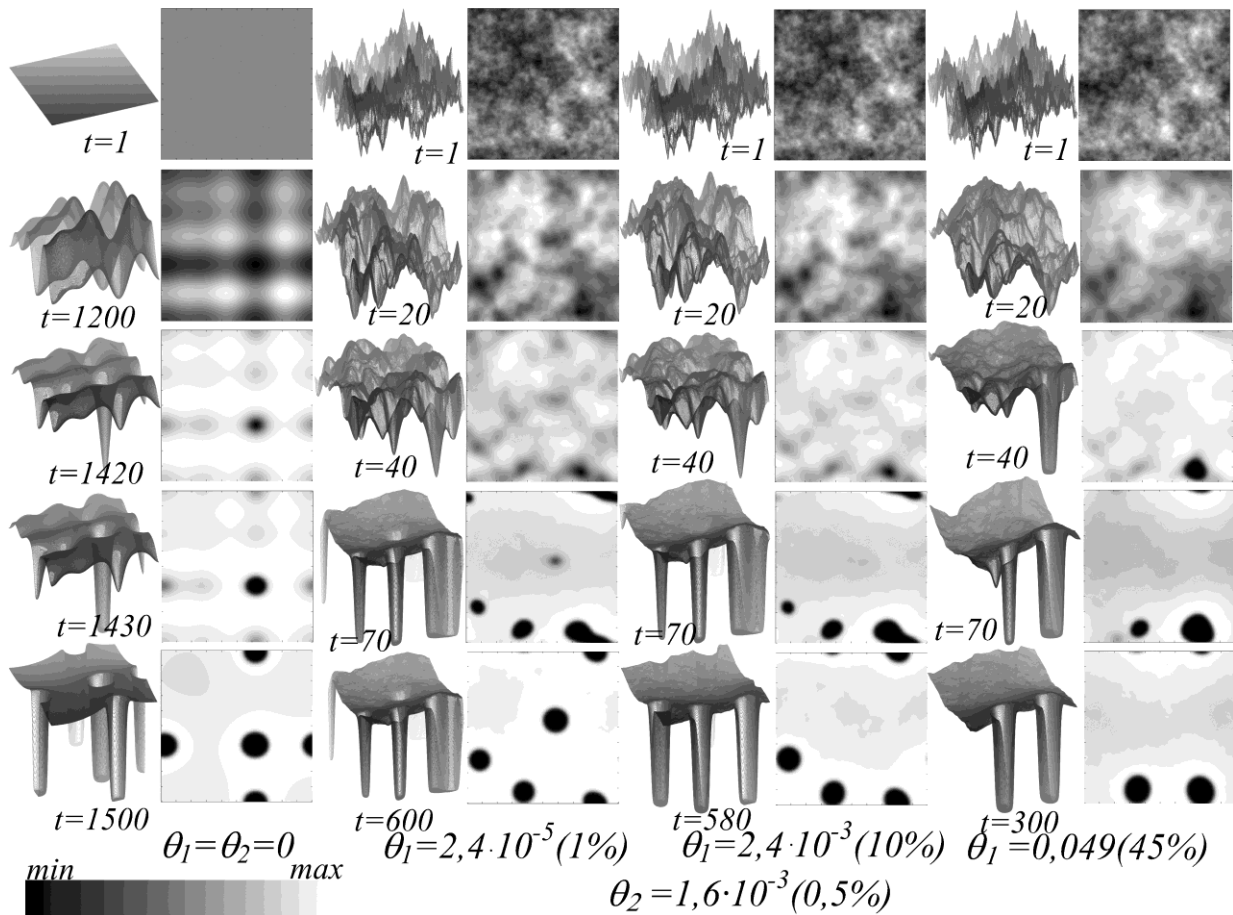


Рис.13 Формирование тьюринговских структур в распределении фитопланктона при увеличении интенсивности флуктуаций θ_1 параметра m/r (см. пояснения к рисунку в тексте). Для изображения сверху (2,4,6,8 вертикальные ряды) градиент цвета от черного к белому визуализирует изменение значений переменной от минимального до максимального соответственно. В середине указаны моменты модельного времени. Нижний ряд соответствует моментам установления статистически стационарного состояния при разных значениях θ_1 и $\theta_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$. $k_{f1} = k_{f2} = 1$.

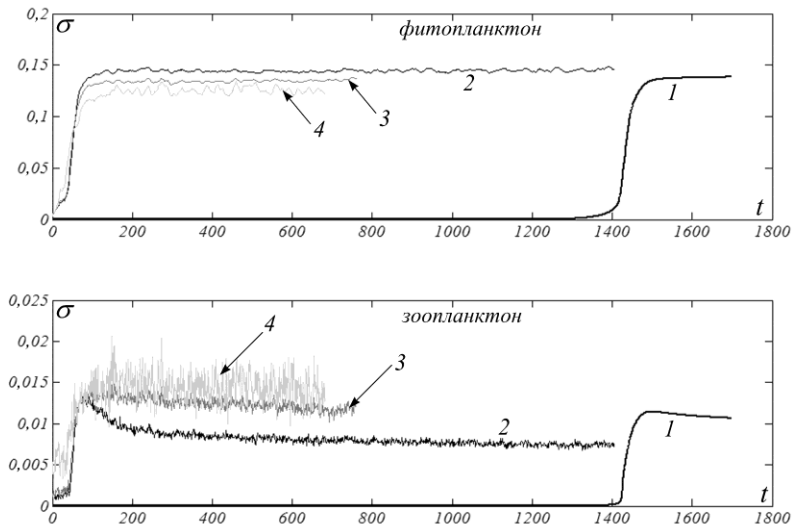


Рис. 14 Зависимости от времени усредненных по поверхности слоя флуктуаций плотности биомассы фитопланктона и зоопланктона. $k_{f1} = k_{f2} = 1$. 1: $\theta_1 = \theta_2 = 0$. 2: $\theta_1 = 2.401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$. 3: $\theta_1 = 2.401 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$. 4: $\theta_1 = 0.049$, $\theta_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$.

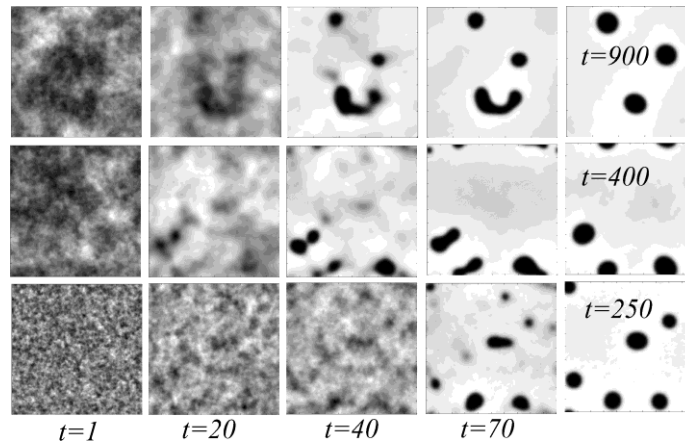


Рис.15 Формирование во времени ДС в распределении фитопланктона при увеличении радиусов корреляции при постоянной интенсивности шума. Вид сверху. $\theta_1 = 2.401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 6.4 \cdot 10^{-3}$. Внизу указаны соответствующие моменты времени. Моменты времени, указанные в правом вертикальном ряду соответствуют моментам установления статистически стационарного состояния. Верхний горизонтальный ряд: $r_{f1} = r_{f2} = 10$. Средний горизонтальный ряд: $r_{f1} = r_{f2} = 1$. Нижний горизонтальный ряд: $r_{f1} = r_{f2} = 0.1$.

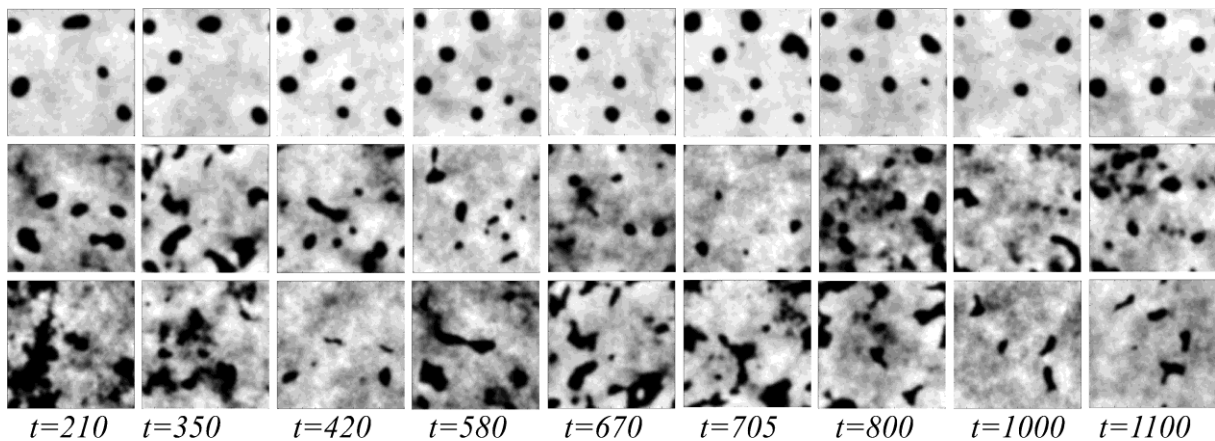


Рис.16 Эволюция системы (14) при больших интенсивностях шума θ_2 . Вид сверху. Верхний горизонтальный ряд: $\theta_1 = 2.401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 0.16$. Средний горизонтальный ряд: $\theta_1 = 2.401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 0.64$. Нижний горизонтальный ряд: $\theta_1 = 2.401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 1.44$. $k_{f1} = k_{f2} = 1$.

В разделе 4.3 представлены результаты моделирования эволюции ДС в системах (13), (14) в докритической области.

В результате численного исследования показано, что в докритической области возникает неустойчивость типа мягкой моды, вызванная флуктуациями параметров – параметрическая неустойчивость. Этот результат соответствует теоретическим исследованиям, проведенным в главе 3. Показано, что, как и при жестком возбуждении структур в докритической области, связанным с некоторым начальным возбуждением критической амплитуды, возникающая при параметрической неустойчивости ДС имеет солитоноподобный вид (см. рис. 17).

Показано, что при параметрической неустойчивости, в процессе образования уединенной ДС флуктуации возрастают до макроскопического уровня (рис. 18). Длительность процесса разрушения однородного состояния в докритической области значительно превосходит аналогичную длительность в закритической области. Это явление объяснено критическим замедлением всех процессов вблизи точки бифуркации.

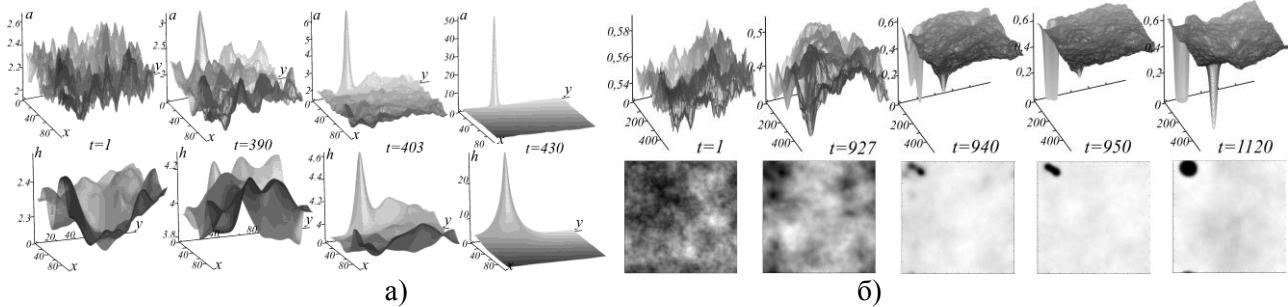


Рис 17. Формирование солитоноподобных ДС при параметрическом возбуждении в докритической области: а) в модели Гирера – Майнхардта, б) в модели Шеффера.

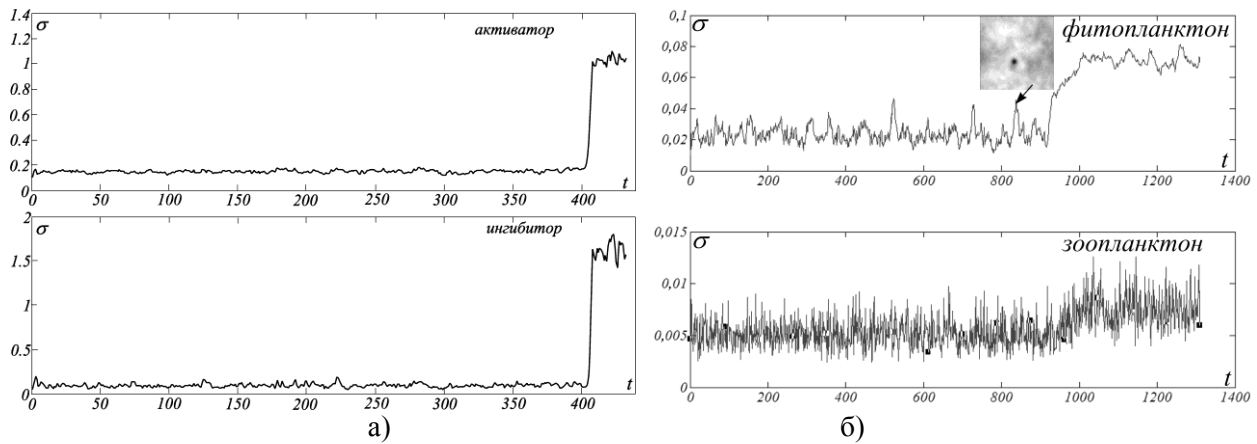


Рис. 18 Усредненные по поверхности слоя флуктуации динамических переменных при параметрическом возбуждении: а) в модели Гирера – Майнхардта, б) в модели Шеффера.

Пятая глава посвящена численному моделированию пространственно-временных структур в поле внешних флуктуаций. Исследуется эволюция спиральных волн и сложных автоволн, возникающих в системе (14).

В разделе 5.1 с помощью разработанного комплекса программ, описанного в разделе 4.1, проведено моделирование спиральных волн в отсутствие и при наличии внешнего шума. Исследованы траектории дрейфа точки обрыва волнового фронта.

Для моделирования выбран ряд параметров, обеспечивающих одновременное существование в системе (14) бифуркаций Хопфа и Тьюринга и беспотоковые граничные условия. Спиральные волны инициируются посредством пересечения полей распределения динамических переменных с постоянным градиентом, возмущающих соответствующее стационарное состояние.

Результаты моделирования процесса формирования спирали и траектории дрейфа ее точки обрыва волнового фронта в отсутствии шума представлены на рис. 19. Положение кончика спиральной волны определялось как точка пересечения изолиний динамических переменных.

В результате показано, что точка обрыва волнового фронта - кончик спирали совершает движение по эллиптической траектории, ориентация которой по отношению к некоторому выбранному направлению изменяется при каждом полном обороте, рис. 19. Обнаружено явление отрыва кончика спиральной волны, рис. 20.

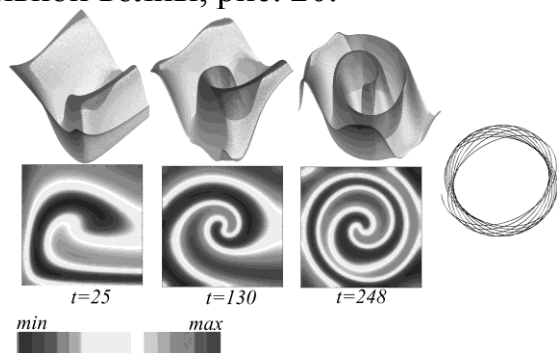


Рис. 19. Формирование спиральной волны и траектория дрейфа кончика спирали в отсутствии флуктуаций параметров.

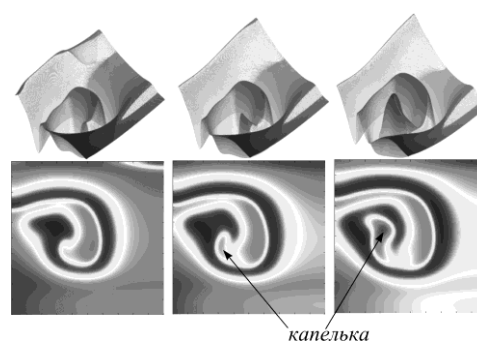


Рис. 20. Отрыв кончика спирали и образование «капельки» («voltage droplet»).

Результаты моделирования эволюции спиральных волн в поле внешних флуктуаций иллюстрируется на рис.21.

Показано, что спиральные волны устойчивы к слабому внешнему флуктуационному фону (две пары вертикальных рядов слева на рис. 21). Их конфигурация и скорость формирования не изменяются. Даже при малых внешних флуктуациях наблюдается размывание и искажение контуров спирали. Тип поведения кончика не изменяется, но в его дрейфе возникают элементы случайности: флуктуирует как сама траектория, так и ее ориентация в пространстве (см. четвертый горизонтальный ряд рис. 21). Увеличение θ_1 при неизменном θ_2 приводит к аналогичному эффекту, только теперь этот процесс замедляется в сравнении с вышеописанным экспериментом. При увеличении интенсивности флуктуаций внешнего случайного поля спиральная волна разрушается (две пары вертикальных рядов справа на рис. 21).

Раздел 5.2 посвящен моделированию сложных автоволн. Решалась смещенная задача, где в качестве начальных условий взят небольшой локализованный в центре участок с однородным распределением плотности биомассы планктона и выбраны периодические граничные условия. Рис. 22 демонстрирует эволюцию сложной автоволны.

Результаты моделирования при воздействии шума на описываемую выше пространственно-временную структуру приведены на рис. 23. Показано, что шум полностью разрушает ее симметрию. В случайном поле с малой интенсивностью образуются сложные автоволны с различными конфигурациями, быстро сменяющимися друг друга. При увеличении интенсивности внешних флуктуаций пространственно-временные структуры разрушаются, поведение системы становится сильно нерегулярным.

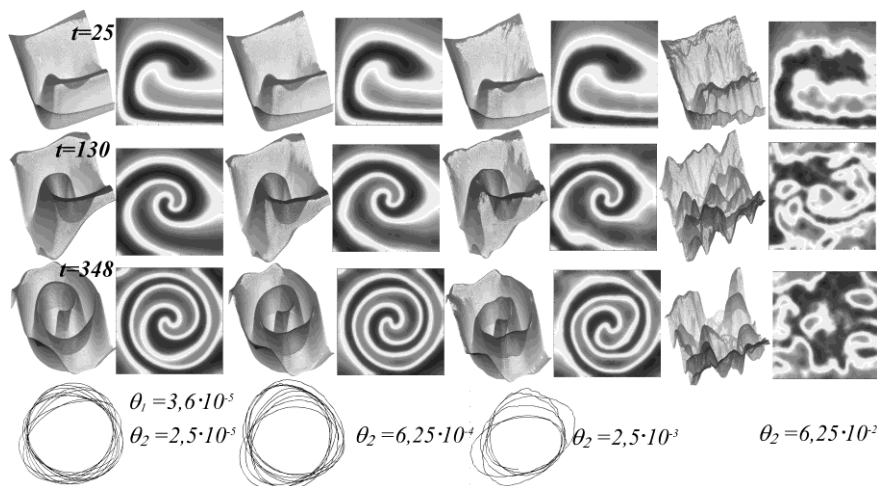


Рис. 21. Эволюция спиральных популяционных волн фитопланктона при увеличении интенсивности флуктуаций θ_2 . $\theta_1 = 3.6 \cdot 10^{-5}$. $k_{f1} = k_{f2} = 1$.

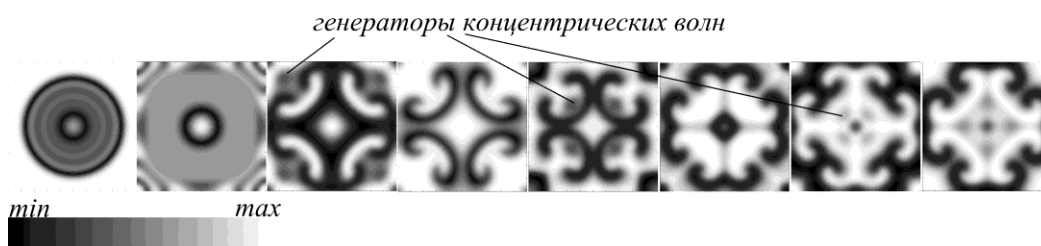


Рис. 22. Эволюция сложной пространственно-временной структуры в отсутствии шума.

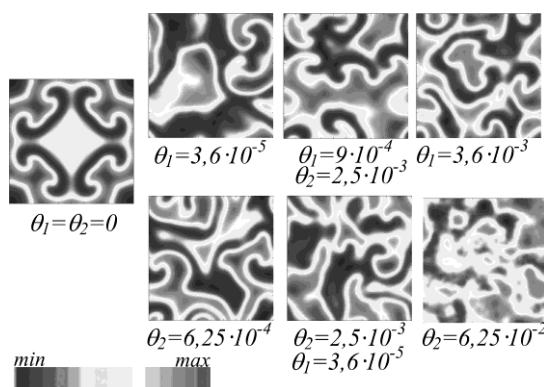


Рис. 23. Изменение конфигурации автоволны, изображенной на рис. 22, во внешнем случайном поле. Изображены кадры, соответствующие моменту времени $t=600$.

Таким образом, в работе на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения и проведены численные исследования, совокупность которых можно квалифицировать как важный

вклад в теорию самоорганизации нелинейных неравновесных диссипативных систем, находящихся во внешней флуктуирующей среде.

В **заключении** перечислены основные результаты, полученные при выполнении данной диссертационной работы:

1. Разработаны методы получения обобщенных уравнений Гинзбурга-Ландау и дисперсионных уравнений для усредненных по ансамблю реализаций амплитуд незатухающих мод нелинейных систем типа «реакция-диффузия» с учетом влияния внешних аддитивных шумов и мультипликативных флуктуаций параметров системы. С помощью разработанного метода аналитически описана эволюция системы в окрестности точки бифуркации в присутствии внешних флуктуаций.

2. Предложены методы определения характеристик процессов формирования диссипативных структур в поле аддитивных и мультипликативных флуктуаций, основанные на исследованиях усредненных по поверхности слоя флуктуаций и норм матриц разности распределений динамических переменных от времени.

3. Разработан вычислительный алгоритм, на базе которого создан программный комплекс для анализа, моделирования эволюции и визуализации решений нелинейных двухкомпонентных многомерных систем типа «реакция-диффузия» в поле флуктуаций. На основе разработанных аналитических методов и созданного комплекса программ получены следующие новые эффекты и закономерности:

- аналитически найдена зависимость инкрементов усредненных по ансамблю реализаций амплитуд неустойчивых мод от волнового числа, интенсивности и радиуса корреляции флуктуаций.
- Показано, что мультипликативные флуктуации параметров системы приводят к смещению стационарного состояния каждой моды, изменению собственных значений задачи, а также увеличению ширины области неустойчивости системы, изменению условий резонансного взаимодействия волн и смещению точки бифуркации Тьюринга.
- Дано теоретическое объяснение явлению уменьшения времени разрушения однородного состояния и спонтанного образования тьюринговых структур при увеличении интенсивности флуктуаций внешнего шума.
- Установлен и описан эффект шумоиндуцированного параметрического возбуждения солитоноподобных пространственных структур в докритической области в системах типа «реакция-диффузия». Дано теоретическое объяснение данного эффекта.

4. Исследована последовательность бифуркаций структур Тьюринга в системах типа «реакция-диффузия» в зависимости от интенсивности мультипликативных флуктуаций параметров, входящих в нелинейную компоненту системы. Показано, что в системе возможен переход к сильно нерегулярному поведению.

5. Проведено численное моделирование эволюции спиральных волн и сложных автоволн в поле внешних флуктуаций в модели «реакция-диффузия». Получены следующие новые эффекты и закономерности:

- исследован дрейф точки обрыва волнового фронта спиральной волны. Показано, что случайный фон приводит к размыванию контуров спирали и в дрейфе точки обрыва ее волнового фронта возникают флуктуации траектории и ее ориентации в пространстве.

- Показано, что спиральные волны устойчивы к слабому внешнему флуктуационному фону.

- Показано, что слабый шум разрушает симметрию сложных автоволн, а внешние случайные поля большой интенсивности приводят систему к сильно нерегулярному поведению.

6. Исследовано влияние внешней флуктуирующей среды на критические явления в системах «реакция-диффузия». В результате

- Разработан комплекс программ для исследования шумоиндуцированных бифуркаций в трехкомпонентной системе типа «реакция-диффузия».

- Установлен и описан новый кинетический переход, при котором происходит инверсия явления «заселения среды». Построены параметрические диаграммы, определяющие границы областей существования различных типов решений.

- Установлен механизм стабилизации корреляционной неустойчивости в стохастических системах типа хищник-жертва.

Публикации по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендуемых ВАК России

1. Курушина, С.Е. Численное моделирование процесса конкуренции во флуктуирующих средах на кластерных системах [Текст] / С.Е. Курушина, С.В. Востокин // Известия Самарского научного центра РАН. - 2005. - Т.7. - № 1(13). - С.143-148.

2. Курушина, С.Е. Математическое моделирование процесса конкуренции в системе ресурс-потребитель во флуктуирующей среде [Текст] / С.Е. Курушина, Л.В. Левченко, В.В. Максимов // Обзорение прикладной и промышленной математики. - 2006. - Т.13. - В.4. С. - 660-661.

3. Громова, Л.И. Уравнения взаимодействия незатухающих мод и численное моделирование диссипативных структур пикового типа в поле флуктуаций в модели Гирера – Майнхардта [Текст] / Л.И. Громова, С.Е. Курушина // Обзорение прикладной и промышленной математики. - 2008. - Т.15. - В. 6. - С. 1070-1071.

4. Курушина, С.Е. Конкуренция видов в стохастической среде [Текст] / С.Е. Курушина, В.В. Максимов // Обзорение прикладной и промышленной математики. - 2008. - Т.15. - В.6. - С. 1102-1103.

5. Курушина, С.Е. Условия существования диссипативных структур в поле флуктуаций динамических переменных в модели морфогенеза Гирера – Майнхардта [Текст] / С.Е. Курушина // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. - 2008. - №2(15). - С.156-166.

6. Курушина, С.Е. Аналитическое исследование и численное моделирование контрастных диссипативных структур в поле флуктуаций динамических переменных [Текст] / С.Е. Курушина // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. - 2009. - №6. - С. 125-138.

7. Громова, Л.И. Математическое моделирование контрастных диссипативных структур в поле флуктуаций динамических переменных [Текст] / Л.И. Громова, А.А.

Иванов, С.Е. Курушина // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. - 2009. - №6 (72). - С. 74-84.

8. Курушина, С.Е. Шумоиндуцированные фазовые переходы в процессах конкуренции во флуктуирующих средах [Текст] / С.Е. Курушина, В.В. Максимов // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. - 2010. - № 1. - С. 88-101.

9. Курушина, С.Е. Диссипативные структуры в системе «реакция-диффузия» в поле мультипликативных флуктуаций [Текст] / А.А. Иванов, С.Е. Курушина // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. - 2010. - №3. - С. 85-103.

10. Курушина, С.Е. Образование диссипативных структур в двухкомпонентных системах типа «реакция-диффузия» во флуктуирующей среде [Текст] / С.Е. Курушина, И.П. Завершинский, В.В. Максимов, Ю.В. Желнов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. - 2010. - № 1(20). - С. 143–153.

11. Курушина, С.Е. Численный анализ влияния флуктуаций параметров на образование пространственно-временных структур в системе фитопланктон-зоопланктон-рыба [Текст] / С.Е. Курушина, Л.И. Громова, В.В. Максимов // Обзорные прикладной и промышленной математики. - 2010. - Т.17. - В.4. 1169-1170.

12. Курушина, С.Е. Уравнения Гинзбурга-Ландау и дисперсионное соотношение для системы фитопланктон-зоопланктон-рыба с флуктуирующими параметрами [Текст] / С.Е. Курушина, И.П. Завершинский, В.В. Максимов, Ю.В. Желнов, А.А. Иванов // Обзорные прикладной и промышленной математики. - 2010. - Т.17. - В.4. С. 1123-1124.

13. Курушина, С.Е. Автоволновые структуры во внешней флуктуирующей среде [Текст] / С.Е. Курушина, А.А. Иванов, Ю.В. Желнов, И.П. Завершинский, В.В. Максимов // Известия Самарского научного центра РАН. - 2010. - Т.12(36). - №4. - С.41-50.

14. Курушина, С.Е. Моделирование пространственно-временных структур в системе хищник-жертва во внешней флуктуирующей среде [Текст] / С.Е. Курушина, И.П. Завершинский, В.В. Максимов, Ю.В. Желнов, А.А. Иванов // Математическое моделирование. - 2010. - Т.22. - №10. С. 3-17.

15. Курушина, С.Е. Анализ поведения пространственных диссипативных структур в системах реакция-диффузия в поле мультипликативных флуктуаций в окрестности точки бифуркации / С.Е. Курушина // Компьютерная оптика, 2010. – Т.34, № 3. - С. 341-351.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

16. Курушина, С.Е. Автоматизированная система моделирования и анализа эволюции систем типа «реакция-диффузия» во внешних флуктуирующих средах [Текст] / С.Е. Курушина, В.В. Максимов, П.С. Москаленко, С.А. Прохоров // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009616215 от 11.11 2009 г. 50 с.

17. Курушина, С.Е. Моделирование пространственных и пространственно-временных диссипативных структур в системах типа «реакция-диффузия» в поле мультипликативных флуктуаций [Текст] / С.Е. Курушина, А.А. Иванов, В.В. Максимов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010613948 от 18.06.2010г. 50 с.

В других изданиях

18. Курушина, С.Е. Взаимодействие связанных образовательных подсистем [Текст] / С.Е. Курушина, В.В. Максимов // Вестник СамГАПС. - 2005. - №3. - С.82-96.
19. Востокин, С.В. Применение вычислительного кластера для моделирования процесса конкуренции во флуктуирующих средах. [Текст] / С.В. Востокин, С.Е. Курушина // Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», Самара. - 2005. - С. 6–9.
20. Курушина, С.Е. Эффекты конкуренции в системе высшего образования [Текст] / С.Е. Курушина, Л.В. Левченко, В.В. Максимов // Труды Второго малого университетского форума «Россия–Великая держава», М.: МФТИ. - 2005. - С.101-105.
21. Курушина, С.Е. Об оптимизации стратегии финансирования высшей школы [Текст] / С.Е. Курушина, В.В. Максимов // Вестник ОГУ. - 2006. - №9. - С.270-274.
22. Курушина, С.Е. Моделирование процесса конкуренции в системах ресурс - потребитель [Текст] / С.Е. Курушина, Л.В. Левченко, В.В. Максимов // Вестник СГЭУ. - 2007. - №12(38). - С. 94-101.
23. Курушина, С.Е. Особенности процесса конкуренции в системе ресурс – потребитель со случайным фоном [Текст] / С.Е. Курушина, Л.В. Левченко, В.В. Максимов // Материалы международной междисциплинарной научной конференции «II Курдюмовские чтения. Идеи синергетики в естественных науках», Тверь. 2006. - С.137-141.
24. Абрамов, Е.И. Влияние флуктуаций динамических переменных на образование диссипативных структур в модели морфогенеза Гирера – Майнхардта [Текст] / Е.И. Абрамов, С.Е. Курушина // Материалы международной междисциплинарной научной конференции «III Курдюмовские чтения. Синергетика в естественных науках», Тверь. 2007. - С.48-52.
25. Курушина, С.Е. Иерархия шумовых фазовых переходов в модели конкуренции в распределенных средах с флуктуирующей компонентой скорости прироста ресурса [Текст] / С.Е. Курушина, В.В. Максимов // Материалы VIII международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур» ХАОС-2007, Саратов. 2007.- С.40.
26. Курушина, С.Е. Конкуренция мод в модели взаимодействия видов Лотки – Вольтерры с учетом диффузии и флуктуаций среды [Текст] / С.Е. Курушина, В.В. Максимов // Труды XV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам, М: Вузовская книга, типография «Знак почета» издательства МГУ. - 2007. - С.328-329.
27. Абрамов, Е.И. Влияние флуктуаций динамических переменных на образование диссипативных структур в модели морфогенеза Гирера – Майнхардта [Текст] / Е.И. Абрамов, С.Е. Курушина // Сб. Трудов 50-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Часть VII. Управление и прикладная математика. Т.1, М.: МФТИ. - 2007. - С. 101.
28. Абрамов, Е.И. Влияние флуктуаций динамических переменных на образование диссипативных структур в модели морфогенеза Гирера – Майнхардта [Текст] / Е.И. Абрамов, С.Е. Курушина // Труды XV Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Дубна. 2008. - В.15. - С.24.
29. Курушина, С.Е. Расширение области неустойчивых мод при формировании ДС в поле флуктуаций динамических переменных [Текст] / С.Е. Курушина // Тезисы докладов Международной конференции по математической физике и ее приложениям. Самара. - 2008. - С.109.

30. Курушина, С.Е. Кинетические переходы в одной нелинейной стохастической модели конкуренции [Текст] / С.Е. Курушина, В.В. Максимов // Тезисы докладов Международной конференции по математической физике и ее приложениям. Самара. - 2008. - С.110-111.
31. Курушина, С.Е. Численное исследование статистических характеристик системы хищник-жертва в случайной среде [Текст] / С.Е. Курушина, Ю.В. Желнов // Материалы Международной междисциплинарной научной конференции «Синергетика в естественных науках», Тверь. - 2009. – С.34-37.
32. Курушина, С.Е. Влияние параметров поля флуктуаций динамических переменных на время образования диссипативных структур пикового типа [Текст] / С.Е. Курушина, А.А. Иванов // Материалы Международной междисциплинарной научной конференции «Синергетика в естественных науках», Тверь. - 2009. – С.73-77.
33. Громова, Л.И. Зависимость времени образования контрастных диссипативных структур от интенсивности и радиуса корреляции поля флуктуаций динамических переменных [Текст] / Л.И. Громова, А.А. Иванов, С.Е. Курушина // Труды XVI Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам, М.: МАИ-Принт. - 2009. - С.245-246.
34. Курушина, С.Е. Влияние нелинейной трофической функции на устойчивость статистического положения равновесия системы хищник-жертва в случайной среде [Текст] / С.Е. Курушина, Ю.В. Желнов, В.В. Максимов // Труды XVI Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам, М.: МАИ-Принт. - 2009. - С.296-298.
35. Курушина, С.Е. Обобщенные уравнения Гинзбурга-Ландау и анализ собственных значений неустойчивых мод в системе «реакция-диффузия» с внешним цветным шумом [Текст] / С.Е. Курушина // Тезисы докладов XVII Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование», Дубна. - 2010. - В. 17. - С.147.
36. Громова, Л.И. Шумоиндуцированная параметрическая неустойчивость в системе «реакция-диффузия» [Текст] / Л.И. Громова, А.А. Иванов, С.Е. Курушина // Тезисы докладов XVII Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование», Дубна. - 2010. - В. 17. - С.148.
37. Курушина, С.Е. Эволюция пространственных и пространственно-временных диссипативных структур в системе хищник-жертва во внешней флуктуирующей среде [Текст] / С.Е. Курушина, А.А. Иванов, Ю.В. Желнов // Тезисы докладов XVII Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование», Дубна. - 2010. - В. 17. - С.149.
38. Курушина, С.Е. Моделирование тьюринговых структур и спиральных волн в системе фитопланктон-зоопланктон-рыба с флуктуирующим окружением [Текст] / С.Е. Курушина, Ю.В. Желнов, А.А. Иванов, В.В. Максимов // Материалы Международной междисциплинарной научной конференции «Синергетика в естественных науках», Тверь. - 2010. - С. 167-171.
39. Курушина, С.Е. Индуцированные шумом уединенные диссипативные структуры в системе фитопланктон-зоопланктон-рыба [Текст] / С.Е. Курушина, А.А. Иванов, Л.И. Громова, Ю.В. Желнов // Материалы Международной междисциплинарной научной конференции «Синергетика в естественных науках», Тверь. - 2010. - С. 99-103.
40. Курушина, С.Е. Шумоиндуцированное возбуждение структур Тьюринга в докритической области в системе фитопланктон-зоопланктон-рыба. [Текст] / С.Е. Курушина, А.А. Иванов, Л.И. Громова, Ю.В. Желнов // Труды VII Всероссийской

научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". Самара: СамГТУ. - 2010.- Ч.2. С. 156-158

41. Курушина, С.Е. Эволюция спиральных волн в системе фитопланктон-зоопланктон-рыба с флуктуирующим окружением [Текст] / С.Е. Курушина, А.А. Иванов, Л.И. Громова, Ю.В. Желнов, В.В. Максимов, И.П. Завершинский. //Труды VII Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". Самара: СамГТУ. - 2010.- Ч.2. С. 158-160.

42. Курушина, С.Е. Шумоиндуцированное возбуждение диссипативных структур в системах реакция-диффузия [Текст] / С.Е. Курушина, Л.И.Громова, И.П. Завершинский, В.В. Максимов // Труды IX Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов. - 2010. - С. 114.

43. Курушина, С.Е. Динамика пространственных диссипативных структур в системах реакция-диффузия во внешних флуктуирующих полях [Текст] /С.Е. Курушина // Труды IX Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов. - 2010. – С. 115.

44. Курушина, С.Е. Исследование эволюции стохастических систем типа «реакция-диффузия» в окрестности точки бифуркации Тьюринга [Текст] / С.Е. Курушина //Материалы Второй международной конференции «Математическая физика и ее приложения. Самара: Изд-во «Книга» - 2010. С.194.

45. Курушина, С.Е. Устойчивость стохастической системы Шеффера вблизи точки бифуркации Тьюринга [Текст] / С.Е. Курушина, В.В. Максимов // Материалы Второй международной конференции «Математическая физика и ее приложения. Самара: Изд-во «Книга». - 2010. С.195-196.