УДК 621.391

А.А.Дегтярев, С.И.Письменная

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ЛАЗЕРНЫХ СИСТЕМ

(г.Куйбышев)

Одним из важнейших параметров прозрачных оптических элементо лазерных систем большой мощности является коэффициент поглощения энергии лазерного излучения [1] . Для его определения проводят специальный эксперимент, в процессе которого измеряется температу ра нагреваемого лазером оптического элемента. Далее производится обработка полученных измерений на ЭВМ, в результате выдается оцен ка искомого параметра. Сложность применяемых алгоритмов обработки экспериментальных данных, а следовательно и длительность самой об работки, существенно зависят от размерности математической модели описывающей процесс нагревания образца. Поэтому при аттестации больших партий оптических элементов важно в целях экономии времен обеспечивать выбор наиболее простой модели из тех, которые согла суются с требованиями точности.

Рассмотрим вопрос об условиях выбора размерности математичес кой модели, описывающей взаимодействие прозрачного оптического элемента с лазерным излучением. Элементы, о которых идет речь, имеют форму диска радиусом R и толщиной ℓ .

Пусть лазерный пучок, обладающий круговой симметрией, падает нормально на поверхность элемента, причем оси пучка и элемента совпадают (рис.1). Закон распределения интенсивности излучения имеет вид

$$I(r)=\frac{P}{\pi a^2}\exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right],$$

где P - мощность излучения;

a - эффективный радиус пучка $(a \simeq 0.1R)$;

r - радиальная координата полярной системы.

При прохождении пучка через элемент происходит поглощение части излучения, в результате чего элемент нагревается. В типичны условиях эксперимента увеличение температуры нагреваемого образца не превосходит нескольких градусов, что вызывает пренебрежимо ма-

Р и с. I. Схема воздействия лазерного пучка на прозрачный оптический элемент

ные изменения таких параметров элемента, как объемная теплоемкость c , коэффициент теплопроводности K . По этой же причине будем считать независящим от температуры и коэффициент теплоотдачи h , характеризующий теплообмен между основаниями образца и внешней средой.

Для получения динамики нагрева образца на нерабочую боковую поверхность $r=R$ устанавливают тепловые датчики. Затем боковую поверхность теплоизолируют. Тогда тепловой процесс в образце будет описываться следующей двумерной (по числу пространственных переменных) моделью [2] :

$$\left.\begin{aligned} & c\frac{\partial u}{\partial t}=K\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big)+\beta I(r); \\ & u(r,z,0)=0; \quad \Big(\frac{\partial u}{\partial r}\Big)_{r=R}=0; \\ & \Big(K\frac{\partial u}{\partial z}-hu\Big)_{z=0}=0; \quad \Big(K\frac{\partial u}{\partial z}+hu\Big)_{z=l}=0 \end{aligned}\right\}, \tag{I}$$

где $u(r,z,t)$ - приращение температуры в точке (r , z) за время t по сравнению с температурой окружающей среды, которая считается постоянной; β - коэффициент поглощения.

Если пренебречь неравномерностью распределения температуры по толщине образца, то модель (I) можно легко привести к одномерной:

$$\left.\begin{aligned} & c\frac{\partial v}{\partial t}=K\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\Big)-\frac{2h}{l}v+\beta I(r); \\ & v(r,0)=0; \quad \Big(\frac{\partial v}{\partial r}\Big)_{r=R}=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Найдем условия, при которых разница между решениями двумерной и одномерной задач в течение всего процесса нагревания не превзойдет величины допустимой погрешности. Нас интересует погрешность, возникающая в области размещения датчиков (т.е. при $r=R$), поскольку именно она сказывается на точности вычисления искомого параметра образца.

Рассмотрим сначала случай, когда в эксперименте используются датчики, усредняющие температуру по толщине образца. Введем обозначение

$$\varepsilon(r,t)=\bar{u}(r,t)-v(r,t), \tag{3}$$

где $\bar{u}(r,t)$ - средняя по z температура образца. Функция $\varepsilon(r,t)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\left.\begin{aligned} &c\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=K\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right)-\frac{2h}{\ell}\varepsilon+\frac{2h}{\ell}\left[\bar{u}(r,t)-u(r,0,t)\right]\\ &\varepsilon(r,0)=0; \quad \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right)_{r=R}=0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Так как разность $\bar{u}(r,t)-u(r,0,t)$ положительна и монотонно возрастает на промежутке $0<t<+\infty$, то функция $\varepsilon(r,t)$ будет обладать такими же свойствами на том же промежутке. Следовательно, в любой момент времени справедливо неравенство

$$\varepsilon(r,t)<\varepsilon_{уст}(r), \tag{5}$$

где $\varepsilon_{уст}(r)$ - установившееся значение погрешности, $\varepsilon_{уст}(r)=\lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(r,t)$.

Найдем среднее по r от $\varepsilon_{уст}(r)$. Для этого усредним по r уравнение модели (4) и учтем, что в установившемся режиме $\partial\varepsilon/\partial t=0$. В результате получим

$$\tilde{\varepsilon}_{уст}=\tilde{\bar{u}}_{уст}-\tilde{u}_{уст}\big|_{z=0}, \tag{6}$$

где символ " $\sim$ " означает усреднение по r. Чтобы найти выражение правой части равенства (6) через физические и геометрические параметры образца и лазерного пучка, усредним по r уравнение модели (1). Тогда для установившегося режима получим уравнение

$$\frac{d^2\tilde{u}_{уст}}{dz^2}=-\frac{\beta P}{\pi K R^2}\left[1-exp\left(-\frac{R^2}{a^2}\right)\right]. \tag{7}$$

Поскольку в реальном эксперименте $a\simeq 0{,}1R$, величина $exp(-R^2/a^2)$ будет ничтожно мала по сравнению с единицей. С учетом последнего решение уравнения (7) будет следующим:

$$\tilde{u}_{уст}(z)=\frac{\beta P}{2\pi K R^2}\left(-z^2+\ell z+\frac{\ell K}{h}\right). \tag{8}$$

На основании (6) и (8) получаем выражение для средней ошибки:

$$\tilde{\varepsilon}_{уст}=\frac{\beta P}{12\pi K}\left(\frac{\ell}{R}\right)^2. \tag{9}$$

Нетрудно показать, что функция $\varepsilon_{уст}(r)$ монотонно убывает на отрезке $0\leqslant r\leqslant R$, следовательно имеет место неравенство

$$\varepsilon_{уст}(R)<\tilde{\varepsilon}_{уст}. \tag{10}$$

Из соотношений (5), (9) и (10) вытекает искомая оценка

$$\varepsilon(R,t)<\frac{\beta P}{12\pi K}\left(\frac{\ell}{R}\right)^2. \tag{11}$$

Если в эксперименте используются точечные измерители, то оценка интересующей нас погрешности $\varepsilon_1(R,z,t)=u(R,z,t)-v(R,t)$ будет вытекать из следующей цепочки неравенств:

$$|\varepsilon_1(R,z,t)|\leqslant|u(R,z,t)-\bar{u}(R,t)|+\varepsilon(R,t)<|(\tilde{u}_{уст})_{z=\ell/2}-$$
$$-(\tilde{u}_{уст})_{z=0}|+\tilde{\varepsilon}_{уст}<\frac{5\beta P}{24\pi K}\left(\frac{\ell}{R}\right)^2.$$

В итоге имеем

$$|\varepsilon_1(R,z,t)|<\frac{5\beta P}{24\pi K}\left(\frac{\ell}{R}\right)^2. \tag{12}$$

Для частного случая, когда измерители устанавливаются в точках с координатой $z=\ell/2$, легко получить более точную оценку

$$\varepsilon_1(R,\ell/2,t)<\frac{7\beta P}{48\pi K}\left(\frac{\ell}{R}\right)^2. \tag{13}$$

Оценки (11), (12) и (13) характеризуют абсолютную погрешность решения одномерной задачи при $r=R$, возникающую вследствие неучета распределения температуры по толщине. Поскольку эти оценки зависят от коэффициента поглощения β, подлежащего определению, то их практическое использование возможно лишь тогда, когда известно хотя бы грубое значение β.

Теперь рассмотрим вопрос о вычислении оценок для относительных погрешностей. Эти оценки не будут зависеть от β

Решение задачи (2), полученное методом разделения переменных [2], будет следующим:

$$v(r,t)=\beta A(r,t)=\beta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_n}{K\lambda_n^2+2h/\ell}\left[1-e^{-\left(\frac{K\lambda_n^2}{c}+\frac{2h}{c\ell}\right)t}\right]J_0(\lambda_n r), \qquad (14)$$

где I_n – коэффициенты разложения функции $I(r)$ в ряд Фурье-Бесселя;

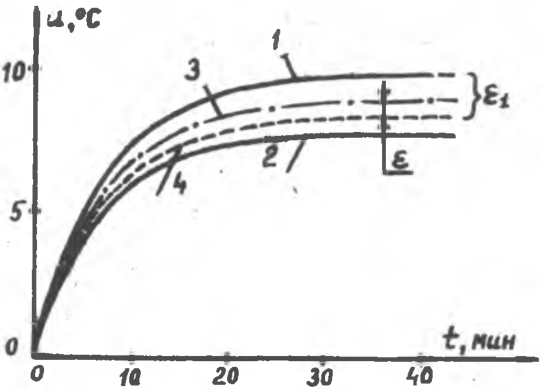
λ_n – неотрицательные корни уравнения $J_0'(\lambda R)=0$.

Используя последнюю формулу, получаем оценку для относительной погрешности $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{v}\right)_{r=R}$:

$$\delta<\frac{p}{12\pi KA(R,t)}\left(\frac{\ell}{R}\right)^2. \qquad (15)$$

Аналогично можно записать оценку для погрешности $\delta_1=(\varepsilon_1/v)_{r=R}$.

С целью проверки качества полученных оценок были проведены расчеты тепловых полей для различных образцов при использовании как одномерной, так и двумерной моделей. Типичные результаты представлены на рис.2 и соответствуют образцу, выполненному из $KRS-6$



Р и с. 2. Графики решений одномерной и двумерной задач: I,2 – решение двумерной задачи при $z=\frac{\ell}{2}$ и $z=0$ соответственно; 3 – решение двумерной задачи, усредненное по z; 4 – решение одномерной задачи; ε и ε_1 – погрешности

При расчетах были использованы следующие параметры:

$\beta = 3\cdot10^{-3}\frac{1}{см}$; $K = 5\cdot10^{-3}\frac{Вт}{см\,град}$; $C = 1.5\frac{Дж}{см^3\,град}$; $R = 2см$;
$\ell = 1см$; $h = 1{,}3\cdot10^{-3}\frac{Вт}{см^2\,град}$; $P = 320$ Вт.

На рисунке кривые I,2 и 3 соответствуют функциям $u(R,\ell/2,t)$, $u(R,0,t)$ и $\bar{u}(R,t)$, а кривая 4 является решением одномерной задачи $v(R,t)$. Погрешность $\varepsilon(R,t)$ монотонно возрастает с течением времени и к моменту t = 30 мин практически устанавливается, достигая величины 0,8°С, что не противоречит неравенству (II):

$0{,}8°C < 1{,}2°C = \frac{\beta P}{12\pi K}\left(\frac{\ell}{R}\right)^2$. Погрешность $\varepsilon_1(R,\ell/2,t)$ достигает к этому моменту величины $1{,}7°C < 2{,}2°C = \frac{7\beta P}{48\pi K}\left(\frac{\ell}{R}\right)^2$. Соответствующие неравенства выполняются и для величин относительных погрешностей δ и δ_1.

Этот и другие рассмотренные нами примеры подтверждают справедливость полученных оценок и указывают на возможность их практического применения.

Для образцов, обладающих высокой теплопроводностью или малыми габаритами, может оказаться излишним учет распределения температуры не только по толщине, но и по радиусу. Иными словами, при отыскании коэффициента поглощения достаточно пользоваться нераспределенной моделью. Принятие решения относительно целесообразности использования последней зависит от величины возникающей при этом погрешности. Так, в случае применения усредняющих датчиков интересующая нас погрешность определяется следующим образом:

$$v(t) = \bar{u}(R,t) - \tilde{v}(t) = \left[v(R,t) - \tilde{v}(t)\right] + \varepsilon(R,t).$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой ряд (II) без слагаемого с номером $n = 0$, и, следовательно, может быть посчитано одновременно с вычислением δ без дополнительных временных затрат. Аналогичным образом можно рассчитать интересующую погрешность при использовании точечных измерителей.

В заключение отметим, что рассматриваемый здесь вопрос о рациональном выборе модели теплового процесса возник в связи с разработкой математического обеспечения автоматизированной системы сбора и обработки результатов эксперимента для оценивания параметров оптических элементов. Его решение позволит не только избежать лишних временных затрат при обработке результатов измерений, но и получить дополнительный выигрыш во времени за счет более рационального планирования последовательности экспериментов при аттестации больших партий образцов.

Литература

1. Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С., Сапецкий А.Н., Сисакян Е.В. К вопросу об измерении малых поглощений лазерного излучения в ИК прозрачных материалах /Квантовая электроника, 1982, № 10, т.9, с.2121-2122.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.-М.:Наука, 1966.

УДК 681.3:744

В.В.Кравчук

ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ В МАШИННОЙ ГРАФИКЕ

(г.Куйбышев)

Эффективность использования вычислительных систем во многом зависит от наличия в них средств вывода графической информации. Одним из наиболее распространенных является шаговый чертежно-графический автомат (ЧГА). С его помощью получают твердые копии чертежей на бумажном и других носителях. Однако производительность ЧГА существенно ниже производительности ЭВМ, что приводит к снижению производительности всей системы и неоправданным задержкам в получении чертежно-графической документации. Последние, в свою очередь, снижают производительность программистов, так как заставляют программировать оптимальные траектории пишущего узла (ПУ) ЧГА.

Рассмотрим шаговый ЧГА, изображение на котором формируется путем перемещения ПУ по рабочему полю. Обозначим через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ параметрическое представление траектории ПУ в системе координат ЧГА. Здесь

$$t\in[0,1],\ x(t)\in[0,A],\ y[t]\in[0,B],$$

t = 0 соответствует началу формирования изображения;

t = 1 - окончанию;

$z(t)$ = 1 соответствует опущенному положению ПУ, $z(t)$ = 0 - поднятому;

A, B - линейные размеры листа.