Однако в практически важном случае оценивания температурных полей описанная процедура восстановления должна оказаться эффективной.

Литература

1. Tzafestas S.G., Nightengale J.M. Optimal filtering, smoothing and prediction in linear distributed-parameter systems. Proc. Inst. elect. Engrs., 1968, 115, pp. 1207-1212.

2. Aidarous S.E., Gevers M.R., Installe M.J. Optimal sensors' allocation strategies for a class of stochastic distributed systems. Intern. jour. Control, 1975, vol. 22, no 2, pp. 197-213.

3. Bayless J.W., Brigham E.O. Application of the Kalman filter to continuous signal restoration. Geophysics, 1970, vol. 35, no 1, pp. 2-23.

В.И.Орищенко

ХАРАКТЕРИСТИКИ УСЛОВНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

1. Гауссовские случайные процессы составляют один из важнейших классов математических моделей процессов стохастической природы в задачах статистической радиотехники и радиофизики, теории автоматического управления и в других. При этом часто возникает необходимость в определении характеристик условных (апостериорных) случайных процессов по заданным характеристикам безусловных (априорных) гауссовских процессов при условии, что в определенные моменты времени стали известны значения самих априорных гауссовских процессов или значения их некоторых преобразований.

В работе [I] определены характеристики условного процесса $X_y(t)$ по заданным характеристикам априорного гауссовского процесса $X(t)$ при условии, что известны значения последнего. Если известно N значений $\{X(T_n)\}_{n=1}^{N}$ гауссовского процесса $X(t)$ в моменты времени $\{T_n\}_{n=1}^{N}$, то среднее и корреляционная функция условного процесса $X_y(t)=X(t/\{X(T_n)\}_{n=1}^N)$ определятся следующим образом :

$$A_y(t)=A(t)+\sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N B(t,T_m)c_{mn}\left[X(T_n)-A(T_n)\right]; \qquad (I)$$

$$B_y(t,t')=B(t,t')-\sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N B(t,T_m)c_{mn}B(T_n,t'), \qquad (2)$$

где $A(t)$ и $B(t,t')$ - соответственно, среднее и корреляционна функция априорного гауссовского процесса $X(t)$; c_{mn} - элемен ты матрицы, обратной корреляционной матрице $\|B(T_m,T_n)\|, 1\leqslant m,n\leqslant$ При этом условный случайный процесс $X_y(t)=X(t/\{X(T_n)\}_{n=1}^N)$ является также гауссовским и, следовательно, полностью определяет ся средним $A_y(t)$ и корреляционной функцией $B_y(t,t')$.

В настоящей работе характеристики условных гауссовских про цессов получены для случаев, когда известны значения некоторых преобразований априорного гауссовского процесса.

2. Пусть случайные процессы $\{Y_n(t)=f_n(X(t))\}_{n=1}^N$ есть резул тат безынерционных преобразований гауссовского процесса $X(t)$. Полагаем, что все функции $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^N$ - различные. Определим ха рактеристики условного процесса $X_y(t)=X(t/\{Y_n(T_n)\}_{n=1}^N)$ при известных значениях $\{Y_n(T_n)\}_{n=1}^N$ случайных процессов $\{Y_n(t)\}_{n=}^N$ в моменты времени $\{T_n\}_{n=1}^N$. . Допустим, что обратные функции $\{f_n^{-1}(\cdot)\}$ являются однозначными, по крайней мере, при значен ниях аргументов, равных $\{Y_n(T_n)\}_{n=1}^N$. Тогда событиям $\{Y_n(T_n)=$ $=\alpha_n\}_{n=1}^N$, где $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$ - некоторые числа, соответствуют события $\{X(T_n)=f_n^{-1}(\alpha_n)\}_{n=1}^N$. Таким образом, приходим к рас - смотренному выше случаю определения характеристик условного гаус совского процесса при известных значениях $\{X(T_n)=f_n^{-1}(Y_n(T_n))\}_{n=1}^N$ самого процесса. Следовательно, условный процесс $X(t/\{Y_n(T_n)\}_{n=1}^N)$ является гауссовским и для определения его среднего $A_y(t)$ и коррел ционной функции $B_y(t,t')$ могут быть использованы соотношения (I), (2), где следует принять $\{X(T_n)=f_n^{-1}(Y_n(T_n))\}_{n=1}^N$. Тогда из выражения (I) среднее условного процесса

$$A_y(t)=A(t)+\sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N B(t,T_m)c_{mn}\left[f_n^{-1}(Y_n(T_n))-A(T_n)\right],$$

где $A(t)$, $B(t,t')$ и c_{mn} имеют тот же смысл, что и в выраж нии (I). Согласно выражению (2), $B_y(t,t')$ не зависит от величи

$\{X(T_n)\}_{n=1}^{N}$, а определяется только числом N и моментами $\{T_n\}_{n=1}^{N}$. Тогда, во-первых, при определении только корреляционной функции $B_y(t,t')$ условного процесса $X(t/\{Y_n(T_n)\}_{n=1}^{N})$ требование однозначности $\{f_n^{-1}(\cdot)\}_{n=1}^{N}$ может быть снято; во-вторых, корреляционная функция условного процесса $X(t/\{Y_n(T_n)\}_{n=1}^{N})$ равна корреляционной функции условного процесса $X(t/\{X(T_n)\}_{n=1}^{N})$, у которого известны значения $\{X(T_n)\}_{n=1}^{N}$ произвольной величины в те же моменты $\{T_n\}_{n=1}^{N}$, и определяется из выражения (2).

3. Пусть случайные процессы $\{Z_n(t)=L_n X(t)\}_{n=1}^{N}$ есть результат линейных инерционных преобразований гауссовского процесса $X(t)$. Полагаем, что все операторы $\{L_n\}_{n=1}^{N}$ - различные. Определим характеристики условного процесса $X_y(t)=X(t/\{Z_n(T_n)\}_{n=1}^{N})$ при известных значениях $\{Z_n(T_n)=L_n X(T_n)\}_{n=1}^{N}$ случайных процессов $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{N}$ в моменты $\{T_n\}_{n=1}^{N}$. Известно, что любое число линейных преобразований гауссовских случайных величин имеет совместный гауссовский закон распределения [2]. Следовательно, при любом K и N система случайных величин $\{X(t_k)\}_{k=1}^{K}$ и $\{Z_n(T_n)\}_{n=1}^{N}$ -распределена по гауссовскому закону тогда и условное распределение случайных величин $\{X(t_k)\}_{k=1}^{K}$ при фиксированных $\{Z_n(T_n)\}_{n=1}^{N}$ будет гауссовским [2], т.е. условный процесс $X_y(t)=X(t/\{Z_n(T_n)\}_{n=1}^{N})$ - гауссовский. Этот вывод дает основание для определения характеристик последнего воспользоваться методикой, изложенной в §3.2 работы [I]. Следуя ей, можно показать, что среднее и корреляционная функция условного процесса $X_y(t)=X(t/\{Z_n(T_n)\}_{n=1}^{N})$

$$A_y(t)=A(t)+\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} B(t,T_m)c_{mn}\left[Z_n(T_n)-L_n A(T_n)\right]; \qquad (3)$$

$$B_y(t,t')=B(t,t')-\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} B(t,T_M)\,c_{mn}\,B(T_n,t'), \qquad (4)$$

где $A(t)$ и $B(t,t')$ - соответственно, среднее и корреляционная функция гауссовского процесса $X(t)$; c_{mn} - элементы матрицы, обратной корреляционной матрице $\|B(T_m,T_n)\|$, $1\leqslant m,n\leqslant N$;

$B(t,T_m)=M\left[X(t)-A(t)\right]\left[Z_m(T_m)-L_m A(T_m)\right]$;

$B(T_n,t')=M\left[Z_n(T_n)-L_n A(T_n)\right]\left[X(t)-A(t)\right]$;

10-3465

$$B(T_m, T_n) = M\left[Z_m(T_m) - L_m A(T_m)\right]\left[Z_n(T_n) - L_n A(T_n)\right].$$

4. Пусть случайные процессы $\{S_n(t) = f_n(L_n X(t))\}_{n=1}^N$ есть результат последовательных преобразований : во-первых, гауссовского процесса $X(t)$ линейными операторами $\{L_n\}_{n=1}^N$ в процессы $\{Z_n(t) = L_n X(t)\}_{n=1}^N$; во-вторых, процессов $\{Z_n(t)\}_{n=1}^N$ безынерционными преобразованиями $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^N$. Полагаем, что все операторы $\{L_n\}_{n=1}^N$ и функции $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^N$ - различные. Определим характеристики условного процесса $X_y(t) = X(t/\{S_n(T_n)\}_{n=1}^N)$ при известных значениях $\{S_n(T_n)\}_{n=1}^N$. Допустим, что обратные функции $\{f_n^{-1}(\cdot)\}_{n=1}^N$ являются однозначными, по крайней мере, при значениях аргументов, равных $\{S_n(T_n)\}_{n=1}^N$. Тогда по аналогии с п.п. 2, 3 нетрудно показать, что условный процесс $X(t/\{S_n(T_n)\}_{n=1}^N) = X(t/\{Z_n(T_n) = f_n^{-1}(S_n(T_n))\}_{n=1}^N)$ является гауссовским, и его среднее

$$A_y(t) = A(t) + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N B(t, T_m) c_{mn} \left[f_n^{-1}(S_n(T_n)) - L_n A(T_n)\right],$$

где $A(t)$, $B(t, T_m)$, c_{mn} имеют тот же смысл, что и в выражени (3), (4); а корреляционная функция $B_y(t, t')$ может быть опред лена из выражения (4). Относительно корреляционной функции $B_y(t,$ здесь справедливы замечания, аналогичные сделанным в заключении п.2.

На основе полученных результатов нетрудно сделать обобщение на случай определения характеристик условного гауссовского процес са при известных одновременно значениях самого априорного гауссов ского процесса и значениях его преобразований, рассмотренного выш вида. Для этого необходимо ввести систему случайных величин $\{\varsigma(T_n)\}_{n=1}^N$, отождествляемых с известными значениями самого апри орного гауссовского процесса и его преобразований в соответствующие моменты времени $\{T_n\}_{n=1}^N$, , а затем применить методику, приведенную в §3.2 работы [I].

Отметим, что во всех рассмотренных случаях корреляционная функция условного гауссовского процесса не зависит от величин фиксированных значений процесса и значений его преобразований.

Литература

1. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., "Советское радио", 1961.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. М., "Мир", 1975.

Я.Е. Тахтаров, А.Г. Храмов

АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ МАССИВОВ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Для решения широкого круга задач цифровой фильтрации изображений, цифрового анализа и синтеза голограмм возникает проблема вычисления двумерных спектров большой размерности. Размерность двумерных массивов определяется количеством отсчетов на изображении или голограмм и достигает величины порядка $10^3 \times 10^3$. Ограниченный объем оперативной памяти большинства современных ЭВМ (например, 128 К байт для ЭВМ М-4030) дает возможность работать лишь с небольшими фрагментами изображения или голограммы (~ 100 x 100 отсчетов). Эффективность работы многих алгоритмов обработки двумерных массивов определяется оптимальностью выбора структуры размещения данных на внешних запоминающих устройствах ЭВМ, способа кодировки комплексных чисел и метода доступа к информации на внешнем носителе [1].

Для реализации алгоритма двумерного быстрого преобразования Фурье в качестве внешнего носителя информации были выбраны магнитные диски, что позволило обеспечить прямой доступ к данным.

Двумерное дискретное преобразование Фурье (двумерное ДПФ) размерности $N \times N$ вычисляется по формуле

$$r(m,n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} exp\left[-j\frac{2\pi}{N}c(km+\ell n)\right]x(k,\ell),\quad m,n=\overline{0,N-1}. \quad (1)$$