

МАЗУ . Это может быть сделано, исходя из предварительной оценки энергетического спектра исследуемого сигнала.

Л и т е р а т у р а

1. Х а н т Б.Р. Структура данных и организация вычислений при цифровом улучшении качества изображений. В сб.: Обработка изображений при помощи ЦВМ. М., "Мир", 1973, с. 189-193.
2. С о р о к о Л.М., С т р и ж Т.А. Спектральные преобразования на ЦВМ. Дубна. ОИЯИ, 1972.

М.А. Голуб

АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ НА ЭВМ ИЗОБРАЖЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

1. При построении систем оптической обработки и хранения изображений используются диффузоры с заданными рассеивающими свойствами [1]. Широкий класс диффузоров образуют изображения, функции амплитудного пропускания которых является реализацией случайного поля $\varphi(x, y)$ заданного в области

$$D = \{(x, y) \mid |x| \leq A_x, |y| \leq A_y\} \quad (1)$$

с автоматическим ожиданием

$$m(x, y) = M\varphi(x, y), \quad (x, y) \in D$$

и корреляционной функцией

$$A(x, y; u, v) = M[\varphi(x, y) - m(x, y)][\varphi(u, v) - m(u, v)]^* \quad (2)$$

(M - оператор математического ожидания;

$*$ - символ комплексного сопряжения).

Рекуррентные алгоритмы генерации двумерных случайных полей [2] характеризуются большими погрешностями на краях генерируемого поля, связанными с неполнотой граничных условий. Известен метод генерации двумерного случайного поля, использующий разложение:

$$\varphi(x, y) \cong \varphi_{(u)}(x, y) = m(x, y) + \sum_{k=1}^L \varphi_k \varphi_k^*(x, y); \quad (3)$$

$$\varphi_k = \int_G [\varphi(x, y) - m(x, y)] \psi_k^*(x, y) dx dy \quad (4)$$

по базисным функциям $\{\psi_k(x, y)\}_1^\infty$ Карунена-Лоэва [3]. Функции $\{\psi_k(x, y)\}_1^\infty$ удовлетворяют уравнениям:

$$\int_G \mathcal{B}(x, y; u, v) \psi_k(u, v) dudv = \lambda_k \psi_k(x, y); \quad k = 1, 2, \dots; \quad (5)$$

$$\int_G \psi_i(x, y) \psi_k^*(x, y) dx dy = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}; \quad (6)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{L-1} \geq \lambda_L \geq \dots \geq 0 \quad (7)$$

и обеспечивают некоррелированные коэффициенты (4):

$$M \varphi_i \varphi_k = 0; \quad i \neq k; \quad i, k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

с дисперсией

$$M |\varphi_k|^2 = \lambda_k. \quad (9)$$

Разложение (3) при $L \rightarrow \infty$ сходится к полю $\varphi(x, y)$ равномерно по $x \in G$ [4], а соответствующий алгоритм [3] обеспечивает равномерную по области G точность генерации двумерного случайного поля. Среднеквадратическая погрешность генерации случайного поля определяется формулой

$$\varepsilon_d^2(L) = M \int_G |\varphi(x, y) - \varphi_{(L)}(x, y)|^2 dx dy = \sum_{k=L+1}^{\infty} \lambda_k. \quad (10)$$

Видно, что погрешность $\varepsilon_d^2(L)$ монотонно убывает с ростом числа членов разложения и $\lim_{L \rightarrow \infty} \varepsilon_d^2(L) = 0$. Равенство (10) можно переписать в виде

$$\varepsilon_d^2(L) = W(0) - W(L), \quad (11)$$

где $W(0) = \int_G \mathcal{B}(x, y; x, y) dx dy$ - средняя энергия случайного поля: (12)

$$W(L) = \sum_{k=1}^L \lambda_k. \quad (13)$$

2. Алгоритм генерации (3) может быть реализован на ЭВМ, сопряженной с устройством вывода и регистрации изображений. ЭВМ рассчитывает набор отсчетов поля $\varphi_{(L)}(x, y)$ на равномерном растре, преобразуемый устройством вывода и регистрации изображений в оптический транспарант. Рассмотрим устройство вывода изображений

со следующими характеристиками:

число отсчетов N_x, N_y по осям x, y , соответственно;
растр имеет прямоугольную форму;

число уровней квантования велико так, что шумами квантования по уровням можно пренебречь.

В силу конечности числа отсчетов N_x, N_y вместо разложения (3) реализуется "возмущенное" разложение:

$$\varphi(x, y) \cong \eta^{(0)}(x, y) = m(x, y) + \sum_{\kappa=1}^L \varphi_{\kappa} \psi_{\kappa}(x, y) \quad (14)$$

с "возмущенными" базисными функциями

$$\psi_{\kappa}(x, y) = \varphi_{\kappa}(x, y) + h_{\kappa}(x, y); \quad \kappa = 1, \dots, L, \quad (15)$$

что увеличивает погрешность генерации случайного поля до величины

$$v^2(L, 0) = M \int_G |\varphi(x, y) - \eta^{(0)}(x, y)|^2 dx dy. \quad (16)$$

При достаточно большом числе отсчетов выполняется условие малости возмущений вида

$$\|H_L\| < 1, \quad (17)$$

где матрица возмущений H_L определяется уравнениями:

$$H_L = [H_{\kappa i}], \quad H_{\kappa i} = \int_G h_{\kappa}(x, y) \psi_i^*(x, y) dx dy \quad (18)$$

($\| \cdot \|$ - символ нормы матрицы). Заметим, что для величины $\|H_L\|$ имеет место оценка

$$\|H_L\| \leq \alpha(H_L) \leq \alpha(H), \quad (19)$$

$$\text{где } \alpha(H_L) = \left(\sum_{\kappa=1}^L \sum_{i=1}^L |H_{\kappa i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (20)$$

$$\alpha(H) = \left(\sum_{\kappa=1}^L \sum_{i=1}^{\infty} |H_{\kappa i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cong \left(\sum_{\kappa=1}^L \int_G |h_{\kappa}(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

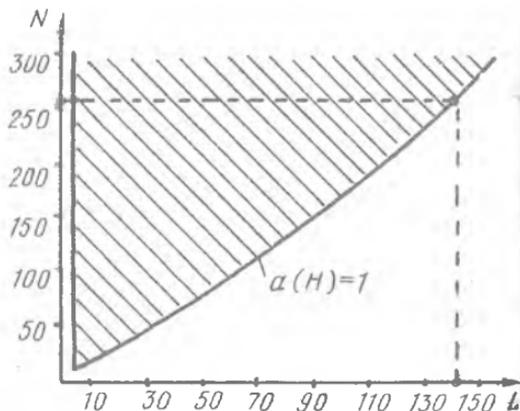
Для удовлетворения условию малости (17) достаточно выполнить неравенство $\alpha(H_L) < 1$ или неравенство $\alpha(H) < 1$. На рис. I штриховкой отмечена область значений параметров L и $N - N_x = N_y$, соответствующая выполнению условия $\alpha(H) < 1$ для рассматриваемого ниже примера.

Пользуясь методами би-ортогональных разложений [5], можно получить оценку

$$\varepsilon^2(L, 0) \leq \varepsilon_h^2(L, 0) + \varepsilon_d^2(L) + \varepsilon_o^2, \quad (22)$$

где величина $\varepsilon_h^2(L, 0)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\varepsilon_h^2(L, 0) \leq \|H_L\|^2 W(L); \quad (23)$$



Р и с. 1. Область выполнения условия малости возмущений

$$\varepsilon_o^2(L, 0) \leq \alpha^2(H_L) W(1) \leq \alpha^2(H) W(1). \quad (24)$$

Величина ε_o^2 слабо зависит от L , а величины $\varepsilon_d^2(L)$ и $W(L)$ определяются уравнениями (II) и (I3), соответственно.

Из оценки (22) - (24) видно, что с ростом числа членов L существенный вклад вносит погрешность $\varepsilon_h^2(L, 0)$, связанная с наличием возмущений базисных функций. Начиная с некоторого числа $L = L_o(0)$ суммарная погрешность генерации случайного поля $\varepsilon^2(L, 0)$ перестает заметно уменьшаться (см. например, график $\rho = 0$ на рис. 2), достигнув некоторой предельной для данных возмущений величины $\varepsilon^2(L_o(0), 0)$. При достаточно больших возмущениях (т.е. при $\|H_L\| \approx 1$) достигнутая предельная точность генерации может оказаться неудовлетворительной. Для повышения точности генерации предлагается производить компенсацию возмущений путем применения линейной коррекции ("перемешивания") вектора коэффициентов

$$\mathcal{E}_L = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_L \end{pmatrix} \quad (25)$$

Коррекция осуществляется по формулам:

$$\mathcal{K}_L^{(p)} = \mathcal{E}_L + \left[\sum_{r=1}^F (-H_L^T)^r \right] \mathcal{E}_L; \quad (26)$$

$$\eta_{L_i}^{(p)} = \begin{pmatrix} \eta_{\Gamma}^{(p)} \\ \vdots \\ \eta_L^{(p)} \end{pmatrix}; \quad (27)$$

$$\Psi(x, y) \cong \eta_{(L)}^{(p)}(x, y) = \sum_{k=1}^L \eta_k^{(p)} \varphi_k(x, y) + m(x, y), \quad (28)$$

где $p \geq 1$ - порядок коррекции;

T - символ транспонирования матрицы.

Погрешность генерации при проведении коррекции порядка $p \geq 1$ определяется формулой

$$\varepsilon^p(L, p) = M \int_D \left| \varphi(x, y) - \eta_{(L)}^{(p)}(x, y) \right|^2 dx dy \quad (29)$$

и допускает оценку

$$\varepsilon^p(L, p) \leq \varepsilon_h^2(L, p) + \varepsilon_d^2(L) + \varepsilon_0^2, \quad (30)$$

где погрешность $\varepsilon_d^2(L)$ определена формулой (II), а величина $\varepsilon_h^2(L, p)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\varepsilon_h^2(L, p) \leq \|H_L\|^{2p+2} W(L); \quad (31)$$

$$\varepsilon_h^2(L, p) \leq a^{2p+2}(H_L) W(1) \leq a^{2p+2}(H) W(1). \quad (32)$$

Заметим, что использование для генерации поля возмущенного разложения (I4) без коррекции коэффициентов формально соответствует случаю $p=0$.

Из формул (30) - (32) и условия (I7) очевидны следующие свойства линейной коррекции:

1) при фиксированном числе членов L точность генерации повышается:

$$\varepsilon^p(L, p) < \varepsilon^2(L, 0); \quad p \geq 1, \quad L=1, 2, \dots \quad (33)$$

Удобно ввести коэффициент эффективности коррекции:

$$\lambda(L, p) = \frac{\varepsilon^2(L, 0)}{\varepsilon^2(L, p)}; \quad (34)$$

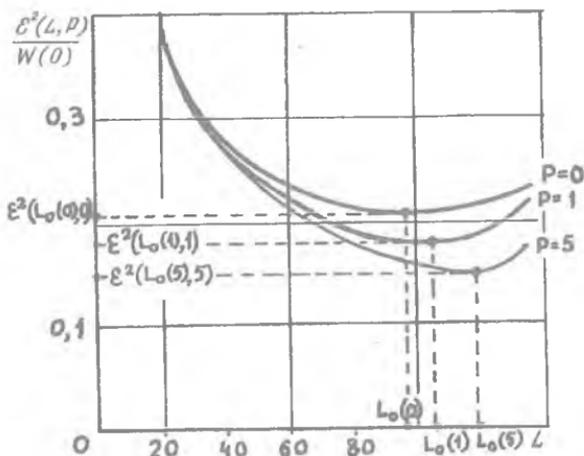
2) при заданных возмущениях предельно достижимая точность генерации повышается:

$$\varepsilon^p(L_0(p), p) < \varepsilon^2(L_0(0), 0), \quad p \geq 1 \quad (35)$$

где $L_0(\rho) > L_0(0)$ - число членов возмущенного разложения, начиная с которых погрешность $\varepsilon^2(L, \rho)$ перестает заметно уменьшаться с ростом L . Введем также коэффициент предельной эффективности коррекции:

$$\alpha(\rho) = \frac{\varepsilon^2(L_0(0), 0)}{\varepsilon^2(L_0(\rho), \rho)} \quad (36)$$

Перечисленные свойства погрешностей поясняются графиком, приведенным на рис. 2.



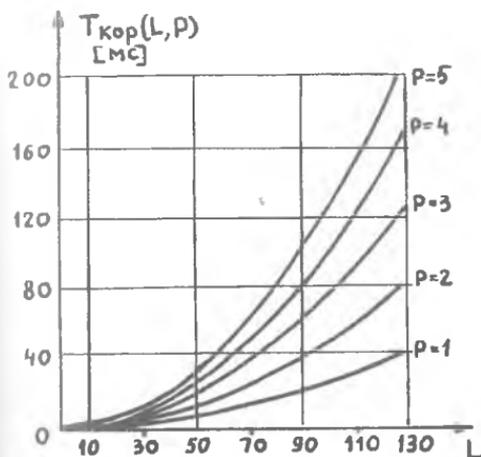
Р и с. 2. Погрешность генерации случайного поля при проведении линейной коррекции

Сложность проведения коррекции порядка ρ для генерации одной реализации случайного поля определяется формулой

$$T_{кор}(L, \rho) = \rho \{ L^2 (t_c + t_y) + L t_c \}, \quad (37)$$

где t_c, t_y - время выполнения одной операции сложения и умножения, соответственно, с.

На рис. 3 приведен график зависимости $T_{кор}(L, \rho)$ от числа членов L при различных порядках коррекции ρ



Р и с. 3. Сложность линейной коррекции алгоритма генерации случайного поля

$$\text{для } t_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ с;} \\ t_y = 19 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

3) Алгоритм генерации случайного поля по разложению Карунена-Лоэва с возмущенными базисными функциями включает следующие этапы. По заданной корреляционной функции (2) из уравнений (5) - (7) находятся $N_x N_y$ отсчетов каждой из собственных функций $\{\psi_k(x, y)\}_1^L$, а также собственные числа $\{\lambda_k\}_1^L$. Генерируется L некоррелированных случайных чисел $\{\omega_k\}_1^L$ с единичной дисперсией.

Вычисляются коэффициенты

$$\gamma_k = \sqrt{\lambda_k} \omega_k; \quad k=1, \dots, L. \quad (38)$$

Производится линейная коррекция коэффициентов по рекуррентным формулам:

$$\mathcal{X}_L^{(0)} = \mathcal{E}_L; \quad \mathcal{X}_L^{(r)} = (-H_L^T) \mathcal{X}_L^{(r-1)} + \mathcal{E}_L, \quad r=1, \dots, P. \quad (39)$$

Вычисляются $N_x N_y$ отсчетов поля $\gamma_{(u)}^{(0)}(x, y)$ (28), преобразуемые устройством вывода изображений в изображение случайного поля.

Заметим, что решения уравнения (5) находятся лишь один раз, но используются при генерации множества реализаций случайного поля.

Эффективность предложенного алгоритма определяется среднеквадратическим критерием точности (29), а трудоемкость проведения линейной коррекции порядка P оценивается по формуле (37) (рис. 3).

4) Рассмотрим пример. Пусть корреляционная функция является биэкспоненциальной:

$$B(x, y; u, v) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\nu_x}{A_x} |x-u| - \frac{\nu_y}{A_y} |y-v|\right). \quad (40)$$

Собственные функции и собственные числа для ядра (40) могут быть найдены аналитически [2]. Элементы матрицы H_k и величины $\alpha^2(H)$ вычисляются по формулам, приведенным в работе [5]. Выберем значения $A_x = A_y = 12,8$ мм, $\nu_x = 3$, $\nu_y = 2$. На рис. 1 штриховкой изображена область значений величин L и $N=N_x=N_y$ соответствующая выполнению условия малости возмущений. Графики погрешности $\varepsilon^2(L, \rho)$ при $N_x = N_y = 256$ приведены на рис. 2. Значения погрешности нормированы средней энергией поля $W(0)$ (12). В табл. 1 приведены значения коэффициента $K(L, \rho)$ (34), а в табл. 2 - коэффициента $x(\rho)$ (36).

Т а б л и ц а 1

$\rho \backslash L$	1	20	40	80	100	120	130
1	1,00	1,02	1,03	1,12	1,15	1,14	1,09
5	1,00	1,02	1,03	1,16	1,30	1,43	1,37

Т а б л и ц а 2

ρ	1	2	3	4	5
$x(\rho)$	1,16	1,25	1,30	1,34	1,39
$L_0(\rho)$	105	109	112	115	118

Видно, что уже при применении коррекции первого порядка удается повысить предельно достижимую точность генерации случайного поля по возмущенным базисным функциям в 1,16 раза при трудоемкости коррекции 28 мс. машинного времени ЭВМ типа М-4030.

Л и т е р а т у р а

1. *Tsunoda Y, Takeda Y. High density image-stozadge holograms by a zandom phase-sampling method. Applied Optics. 1974, September, v. 13, No. 9, p. 2046-2051.*
2. К л о в с к и й Д.Д., С о й ф е р В.А. Обработка пространственно-временных сигналов. М., "Связь", 1976.
3. Е р м а к о в С.М., М и х а й л о в Г.А. Курс статистического моделирования. М., "Наука", 1976.
4. Г и х м а н И.И., С к о р о х о д А.В. Теория случайных процессов. М., "Наука", 1971, т.1.
5. Г о л у б М.А., С о й ф е р В.А. Конструктивный подход к использованию разложения Карунена-Лозва в устройствах оптимальной обработки сигналов. Четвертый международный симпозиум по теории информации. Тезисы докладов, ч.1., М.-Л., 1976, с. 31-33.

3.В. Пшеничников

СИНТЕЗ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА, РЕАЛИЗУЮЩЕГО МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

При обработке измерительных сигналов, полученных в системе, помимо динамические искажения, необходимо решать задачу восстановления входного сигнала. В автоматизированных системах обработки данных эта задача сводится к синтезу цифрового фильтра, обратного характеристике измерительного тракта. Как известно, задача восстановления входного сигнала линейной инерционной системой является некорректной и требует для своего решения применения методов регуляризации [1].

В работе [2] предложен алгоритм восстановления с использованием метода регуляризации А.Н. Тихонова в частотной области. При этом входной сигнал может быть получен по формуле