

С. В. Мрыкин

Введение

Одна из важнейших задач конструктора заключается в определении геометрических параметров формы и размера объекта проектирования. Традиционная технология разработки геометрии объекта проектирования основывается на последовательном построении семейств продольных и поперечных линий, принадлежащих этому объекту. Линии могут быть как плоскими так и пространственными. Каждая линия задается множеством своих точек. По этим точкам проводится либо лекальная кривая, либо кривая, вычисленная одним из методов одномерной интерполяции. Линии строятся до тех пор, пока закон формообразования участка поверхности между ними, не станет доступен для материального воплощения при промышленном изготовлении. Набор таких линий представляет собой дискретный каркас поверхности.

Промежутки между линиями каркаса заполняются либо графически по проекциям, как в методе батоксов и горизонталей в авиа- и судостроении, либо при помощи методов двумерной интерполяции. В системах геометрического моделирования реализуется заполнение ячеек дискретного каркаса методами двумерной интерполяции. Для применения этих методов необходима информация о принадлежности линий той или иной ячейке поверхности. В существующих системах геометрического моделирования эта информация задается непосредственно конструктором.

При построении конечно-элементных моделей (КЭМ) также необходимо решать вопросы, связанные с описанием геометрии объектов проектирования. При этом наиболее трудоемким и порождающим большое количество ошибок этапом подготовки исходных данных о геометрии КЭМ, является этап вычисления координат узлов и установления связи между элементами и узлами. Для многосвязных конструкций ограниченных поверхностями двойной кривизны, трудности подготовки геометрии существенно возрастают. Соответственно возрастает число ошибок в координатах и связях.

Большим достижением в области генерации сеток стал блочный принцип [5]. Его сущность заключается в том, что сложная поверхность расчленяется на простые участки гомеоморфные квадрату. Квадрат вручную или автоматически покрывается сетью, а затем эта сеть отображается на участок поверхности.

В процессе отображения необходимо уметь вычислять координаты, касательные и другие геометрические характеристики в любых точках внутри участков поверхности. Этому требованию наиболее полно удовлетворяют модели, состоящие из множества кусочных поверхностей [1, 3, 4].

Блочный принцип нашел широкое применение на практике. Он стал точкой соприкосновения усилий разработчиков методов генерации сеток как в области конечно-элементного анализа, так и в области геометрического моделирования. Однако, несмотря на многократное уменьшение объема исходной информации, блочный принцип требует определения не только геометрии границ участков, но и задания принадлежности граничных линий тем или иным участкам.

Анализ содержания работы конструктора позволяет свести задачу определения формы и размера объекта проектирования к следующему:

- построение дискретного каркаса;
- указание принадлежности границ (линий каркаса) ячейкам поверхности;
- задание в узлах ячеек геометрических параметров, необходимых для применения методов двумерной интерполяции.

В дальнейшем изложении два последних пункта выделены в отдельную задачу, которую будем называть задачей преобразования дискретного каркаса в модель непрерывной поверхности.

1. Формулировка задачи преобразования

Пусть дискретный каркас определен набором неупорядоченных плоских и пространственных линий, заданных в параметрической форме:

$$R(t) = \begin{cases} x = X_l(t) \\ y = Y_l(t), \quad l = 1, 2, \dots, L; t \in [0, 1], \\ z = Z_l(t) \end{cases} \quad (1)$$

где L — число линий дискретного каркаса, t — параметр, при изменении которого от 0 до 1, точка (x, y, z) — пробегает по l -ой линии от начала к концу. Ориентация линии от начала к концу определяется последовательностью точек, которыми задана эта линия. Линии каркаса образуют сеть, а точки пересечения — узлы сети.

Задача заключается в том, чтобы получить описание сети в форме координат узлов $(x, y, z)_n, n = 1, 2, \dots, N$, где N — число узлов; и связей ячеек с узлами

$(n_1, n_2, n_3, n_4)_c, c = 1, 2, \dots, C$, где C — число ячеек, а n_1, \dots, n_4 — номера обрамляющих ячейку узлов. Ячейки сети могут иметь форму треугольников и четырехугольников (в общем случае неплоских). Если ячейка имеет треугольную форму, то $n_1 = n_4$.

На рис. 1а показан пример плоского дискретного каркаса. Узлы нумеруются в порядке появления точек пересечения. Например узлы с 1 по 5 образованы пересечением линии 1 с линиями со 2 по 6 и т.д. Положение узла на линии однозначно определяется значением его параметрической координаты. Например: $t_{1,5}$ и $t_{6,5}$ определяют положение узла 5 на линиях 1 и 6 соответственно, при этом $R(t_{1,5}) = R(t_{6,5})$. В принятом обозначении первый индекс определяет номер линии, второй — номер узла.

Линии каркаса могут быть замкнуты, а также могут пересекаться с другими линиями в нескольких точках. Например линии 1-3 и 4-6 имеют по две точки пересечения 1, 2 и 12, 13 соответственно. В этом примере для простоты предполагается, что точки пересечения разных линий, но с одинаковыми координатами объединяются в один узел. Так узел 1 соответствует двум точкам пересечения: линии 1 с линиями 2 и 3.

Для решения этой задачи поставим в соответствие сети на рис. 1а помеченный граф $G(V, E)$, как показано на рис. 1б. Множество вершин V графа соответствует множеству узлов сети или, что то же самое, множеству точек пересечения линий каркаса. Множество ребер E графа соответствует множеству границ ячеек.

Задачу преобразования будем решать в два этапа.

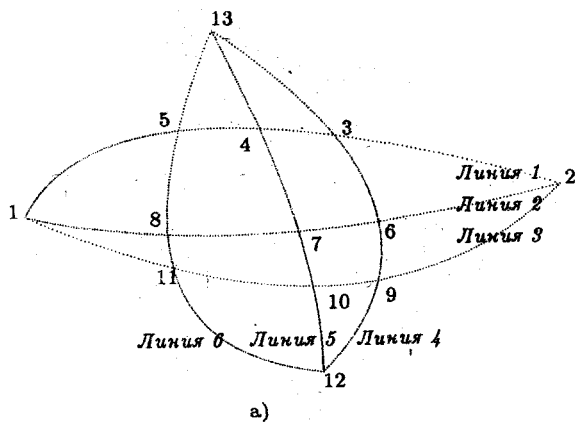
На первом этапе выполняется анализ дискретного каркаса. Для этого проводится поиск точек пересечения линий каркаса и составляется список инцидентности «линии каркаса — точки пересечения».

На втором этапе синтезируется непрерывная поверхность. Для этого устанавливаются связи ячеек поверхности с границами и узлами, и по геометрии заданных линий каркаса вычисляются требуемые узловые параметры (координаты, касательные и т.п.).

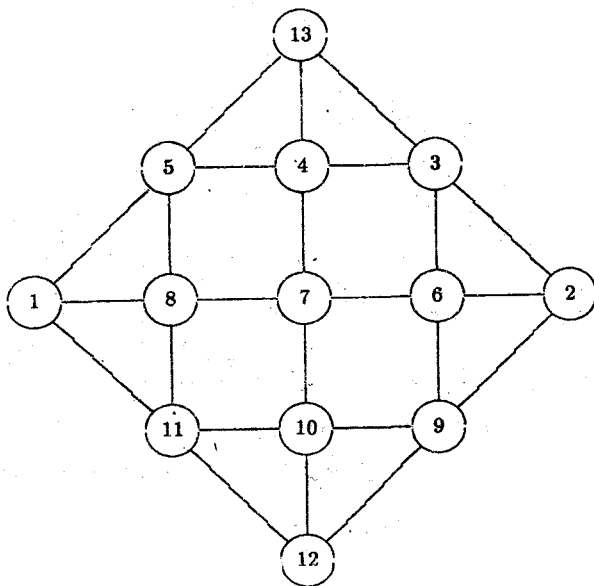
2. Анализ дискретного каркаса

2.1. Поиск точек пересечения

Задачу поиска точек пересечения линий сформулируем в терминах математического программирования:



а)



б)

Рис. 1. Анализ дискретного каркаса
 а) дискретный каркас; б) граф

для пары линий i и j дискретного каркаса найдем вектор $X^* = (t_i, t_j)$ такой, чтобы $F(X^*) \leq \varepsilon$, где ε —наперед заданное малое число, а

$$F(X) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$$

целевая функция, равная квадрату расстояния между линиями при заданных параметрах t_i и t_j , которые, в соответствии с (1), ограничены условием: $0 \leq t_i, t_j \leq 1$.

Выполнение условия $F(X^*) \leq \varepsilon$ означает, что линии пересекаются. В этом случае выполняется пункт 2.2.

Две линии могут иметь несколько точек пересечения, поэтому задача оптимизации решается как многоэкстремальная. Для этого выбирается множество начальных точек, равномерно распределенных в допустимой области поиска. Для каждой из них иницируется алгоритм поиска пересечения. Количество и размещение начальных точек можно отрегулировать.

Затем выбирается следующая пара линий. Поиск пересечения линий выполняется циклически по принципу «каждая с каждой последующей», то есть потребуются решить не более $L(L-1)/2$ многоэкстремальных задач оптимизации.

2.2. Составление списка инцидентности

Точки пересечения нумеруются по мере появления и запоминаются в списке инцидентности «линии каркаса — точки пересечения». Этот список представляет собой объединение списков номеров узлов, инцидентных линиям дискретного каркаса $\bigcup_{l=1}^L \mathcal{N}_l$, и списков параметрических координат, задающих положение этих узлов на линиях $\bigcup_{l=1}^L T_l$. Например списки линии 3 для рис. 1а:

$$\mathcal{N}_3 = \{1, 2, 9, 10, 11\}, \quad T_3 = \{t_{3,1}, t_{3,2}, t_{3,9}, t_{3,10}, t_{3,11}\}.$$

Результат $\bigcup_{l=1}^L \mathcal{N}_l$ приведен в табл. 1 (столбцы 1-6).

Списки номеров узлов \mathcal{N}_l и координат T_l связаны между собой следующими отношениями:

$$\mathcal{P}_n(l, t_{l,k}) = k, \quad \mathcal{P}_l(l, k) = t_{l,k}.$$

Эти отношения необходимы для проверки правил нумерации узлов и формирования списков отдельных линий:

Таблица 1. Список инцидентности

Линии каркаса	Точки пересечения линий									
	до сортировки					после сортировки				
1	1	2	3	4	5	1	5	4	3	2
2	1	2	6	7	8	1	8	7	6	2
3	1	2	9	10	11	1	11	10	9	2
4	3	6	9	12	13	12	9	6	3	13
5	4	7	10	12	13	12	10	7	4	3
6	5	8	11	12	13	12	11	8	5	13

- Узел считается новым для обеих линий, если $\mathcal{P}_n(i, t_i) = \emptyset$ и $\mathcal{P}_n(j, t_j) = \emptyset$. В этом случае узел получает новый номер, а его параметрические координаты включаются в списки обеих линий.
- Узел считается новым для одной линии (например линии j), если $\mathcal{P}_n(j, t_j) = \emptyset$, а $\mathcal{P}_n(i, t_i) = k$. В этом случае параметры узла k запоминаются в списках линии j : $k \rightarrow N_j$ и $t_j \rightarrow T_j$.
- Узел считается старым для обеих линий, если его параметрические координаты есть в списках обеих линий и относятся к одному и тому же узлу. В этом случае узел повторно в список не включается.

3. Синтез модели непрерывной поверхности

3.1. Сортировка списка инцидентности

Синтез начнем с сортировки списка инцидентности по возрастанию значений параметров t , найденных на предыдущем этапе. Например для линии 3: $t_{3,1} < t_{3,11} < t_{3,10} < t_{3,9} < t_{3,2}$.

После сортировки этот список содержит информацию не только об узлах сети, но и о соединяющих их ребрах. Например из табл. 1 (столбцы 7–11) видно, что узел номер 1 соединяется ребрами с узлами-соседями 5 по линии 1, 8 — по линии 2 и 11 — по линии 3, узел номер 10 соединяется ребрами с узлами-соседями 11 и 9 по линии 3, 12 и 7 — по линии 5 и т.д.

3.2. Список ребер графа

Затем по списку инцидентности (табл. 1) составляется список ребер графа (табл. 2).

Таблица 2. Список ребер графа

Ребро	Начальный узел	Конечный узел
1	1	5
2	5	4
3	4	3
4	3	2
5	1	8
6	8	7
...

3.3. Установление связи ячеек с узлами

Далее выполняется комбинаторный поиск циклов на графе. Сущность поиска заключается в нумерации ячеек сети и установлении связи этих номеров с границами (ребрами) ячеек или, что то же самое, с номерами обрамляющих их узлов. Примерами таких циклов могут служить 1-5-8-1, 5-4-7-8-5, 5-13-4-5 (рис. 1а и 1б).

Эта задача тесно связана с задачей отыскания фундаментального множества циклов на графе. Однако разработанные методы [2] не совсем подходят для решения сформулированной выше задачи. Дело в том, что эти методы в ряде случаев порождают циклы такой структуры, которая недопустима для ячеек поверхности. Для построения циклов подходящей структуры (треугольных или четырехугольных, без внутренних ребер, с нумерацией против или по часовой стрелке) предлагается следующий алгоритм.

1. Выбирается очередное ребро из списка (далее оно именуется первым ребром цикла), показанного в табл. 2.
2. Выбирается второе ребро цикла инцидентное одной из вершин первого ребра.
3. Делается попытка замкнуть цикл третьим ребром, вершины которого инцидентны свободным вершинам первого и второго ребер (т.е. пытаемся получить треугольную ячейку).
4. Если попытка удалась, то запоминаются связи полученной треугольной ячейки с узлами сети, затем выбирается новое второе ребро и повторяется п. 3.
5. Иначе выбирается третье ребро, инцидентное свободной вершине первого ребра.

6. Делается попытка замкнуть цикл четвертым ребром, вершины которого инцидентны свободным вершинам второго и третьего ребер (т.е. пытаемся получить четырехугольную ячейку).
7. Если попытка удалась, то запоминаются связи полученной четырехугольной ячейки с узлами сети, затем выбирается новое второе ребро и повторяется п. 3.
8. Если при выборе второго ребра список ребер оказался исчерпан, то это означает, что на первом ребре построены все возможные циклы и оно исключается из дальнейшего рассмотрения.

При использовании линейного списка для хранения ребер графа, алгоритм этого шага в худшем случае выполняет порядка $O(m^2)$ операций сравнения и пересылки, где m — число ребер графа. Использование более сложных структур данных, например дерева отрезков, позволяет уменьшить трудоемкость до $O(\log_2^2 m)$.

3.4. Тестирование и применение

На рис. 2 приведены тестовые примеры и результаты работы предлагаемых алгоритмов. В качестве тестовых примеров были выбраны: однолобастый гиперболоид, сфера и тор. На рис. 2 дискретные каркасы показаны слева. Тестированию был подвергнут алгоритм автоматического определения границ участков поверхности. В результате были получены модели непрерывной поверхности, состоящие из множества треугольных и четырехугольных граней (на рис. 2 справа). Чтобы подчеркнуть качественное различие моделей, каждая грань перед показом была слегка уменьшена относительно своего геометрического центра.

На рис. 3 приведены результаты применения разработанных алгоритмов. Слева показан фюзеляж самолета с несущим корпусом и крылом большого удлинения. Справа, в увеличенном виде, показана структура крыла с элементами продольного (лоажероны и панели обшивки) и поперечного (нервюры и диафрагмы) набора.

4. Вычисление узловых параметров

В этом разделе обсуждается вычисление геометрических параметров в точке пересечения двух линий, задающих окрестность синтезируемой поверхности. Предполагается, что линии дискретного каркаса заданы в виде (1), имеют непрерывные

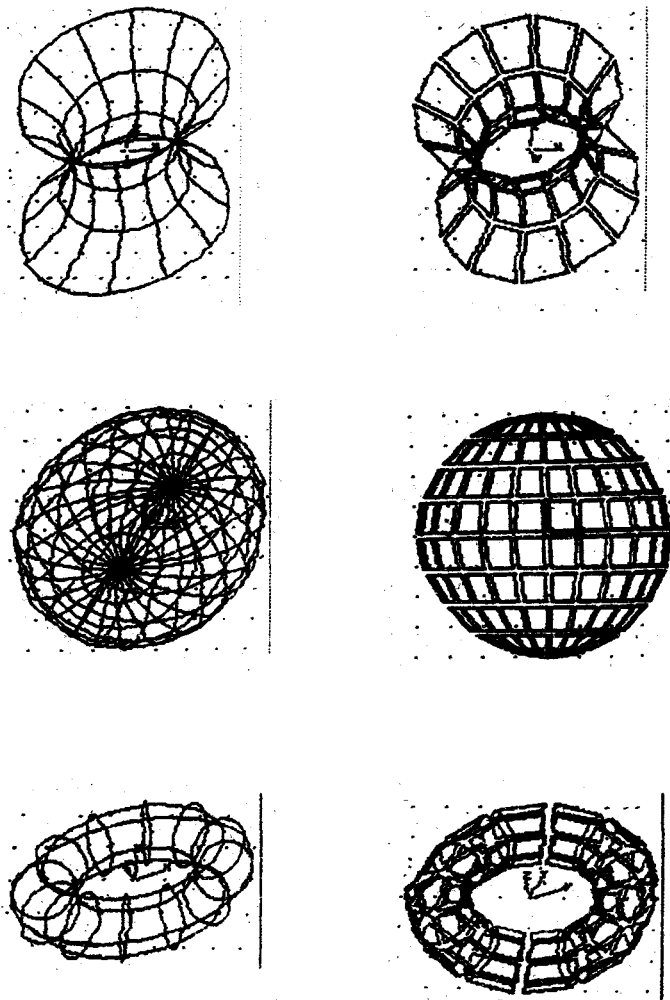


Рис. 2. Результаты тестирования

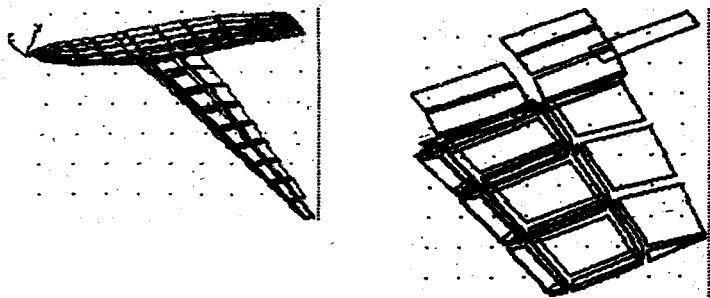


Рис. 3.

производные 2-го порядка, и эти линии задают местную криволинейную систему координат $u-v$ ячейки поверхности. Для определенности предположим, что линия i задает u — направление, а линия j задает v —направление, как показано на рис. 4.

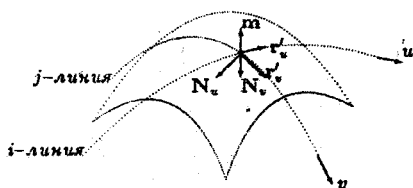


Рис. 4.

Координаты узлов сети вычисляются непосредственно из (1) при известных значениях t , найденных в процессе поиска точек пересечения, как описано в разделе 2. Возможно вычисление дополнительных узлов для элементов с квадратичными и кубическими функциями формы.

Производные для каждой линии также вычисляются непосредственно из математической модели (1) в форме векторов:

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right), \quad (2)$$

где $s = i, j$.

Вектор m представляет собой единичный вектор нормали к поверхности и вычисляется по известным из (2) значениям касательных в виде:

$$m = \frac{r'_u \times r'_v}{\|r'_u \times r'_v\|}, \quad (3)$$

где $r'_u = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$, $r'_v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$, а обозначение вида $\|\dots\|$ представляет собой норму вектора.

Имея узловые параметры (2) и (3) уже можно построить эффективные алгоритмы для исследования поверхностей двойной кривизны. Однако потенциал линий дискретного каркаса не исчерпывается первыми производными. Поэтому можно попытаться применить вторые производные для более точного описания геометрии поверхности, основанного на применении смешанных производных:

$$r''_{uv} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right), \quad (4)$$

появляющихся в геометрических матрицах вида:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & (r'_u)_1 & (r'_v)_1 \\ r_3 & r_4 & (r'_u)_2 & (r'_v)_2 \\ (r''_{uv})_1 & (r''_{uv})_2 & (r''_{uv})_1 & (r''_{uv})_2 \\ (r''_{uv})_3 & (r''_{uv})_4 & (r''_{uv})_3 & (r''_{uv})_4 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

которые нашли широкое применение при описании поверхностей двойной кривизны [1, 3, 4].

Геометрический смысл смешанных производных (4) заключается в том, что они показывают скорость изменения в u -направлении касательной к поверхности в v -направлении. Поэтому их называют векторами закрутки поверхности или просто векторами кручения.

Для определения (4) используются несколько способов [4]:

1. Условие $r''_{uv} = 0$ во всех узлах сети. Однако это приводит к местным уплотнениям синтезируемой поверхности вблизи углов. Это условие выполняется точно только тогда, когда линии каркаса представляют собой линии кривизны.
2. Вычисление (4) интерполяцией u -касательных в v -направлении. Однако известные алгоритмы требуют задания дополнительных точек внутри ячейки поверхности по типу Гауссовских точек для численного интегрирования.

3. Упрощенный подход, основанный на использовании только координат узловых точек, что приводит к появлению непредусмотренных "складок" поверхности.

В общем виде для применения (4) необходимо иметь уравнения поверхности:

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v) \quad (6)$$

в окрестности каждого узла сети.

Однако, поскольку этих уравнений нет, можно попытаться оценить (4) по числовым значениям первых и вторых производных пары линий, пересекающихся в данном узле. Основанием такой оценки служит предположение, что в окрестности узла линии дискретного каркаса незначительно отличаются от соответствующих нормальных сечений поверхности, которую необходимо построить.

Если через r'_s обозначить любую из касательных к линии вида r'_u или r'_v , то можно записать:

$$r'_s m = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя это соотношение по длине дуги s выбранной кривой, получим:

$$r''_s m + r'_s m' = 0. \quad (8)$$

Учитывая, что $r''_s = N_s$ — главная нормаль к кривой в заданной точке и выполнив подстановку по координатным направлениям, получим:

$$m'_u = -\frac{N_u m}{r'_u}, \quad m'_v = -\frac{N_v m}{r'_v}. \quad (9)$$

Из выражения коэффициентов второй дифференциальной формы Гаусса, можно записать:

$$r''_{uv} m = -\frac{r'_u m'_v + r'_v m'_u}{2}. \quad (10)$$

Подставляя выражения (9) в (10), умножая справа на m и учитывая, что $m^2 = 1$, получим:

$$r''_{uv} = \frac{1}{2} \left[N_v \frac{r'_u r'_v}{(r'_v)^2} + N_u \frac{r'_u r'_v}{(r'_u)^2} \right]. \quad (11)$$

Из (11) видно, что смешанная производная представляет собой некоторое средневзвешенное значение главных нормалей к координатным линиям в точке их пересечения. Весовые коэффициенты представляют собой комплексы из касательных векторов. Причем, если координатные линии ортогональны, то эти коэффициенты обращаются в нуль.

Вообще говоря через произвольную точку поверхности можно провести бесконечное множество ортогональных линий, только две из которых являются линиями кривизны, что удовлетворяет условию $\Gamma_{uv}'' = 0$. Однако на практике при построении дискретного каркаса конструктор стремится к определению одного из семейств линий кривизны. Как правило это набор поперечных сечений. Другое семейство линий определяется либо по проекциям, как в методе батоксов и горизонталей, и тогда это чаще всего второе семейство линий кривизны, либо эти линии определяются кинематически как семейство равнодолевых линий. Второй способ удобен для автоматизации, поскольку существенно сокращает трудоемкость построения каркаса. При этом часть полученных линий будет линиями кривизны и тогда выполняется условие $\Gamma_{uv}'' = 0$, а часть линий не будет ортогональна базовому семейству. В последнем случае формула (11) дает ненулевые значения, зависящие от угла между касательными к линиям обоих семейств.

Заключение

Предлагаемые алгоритмы реализованы в виде пакета программ на Фортране-4 и могут быть использованы в составе систем геометрического моделирования на этапах проектирования и технологической подготовки производства. Результаты тестирования и экспериментальной эксплуатации показали:

1. Для всех тестовых примеров модель непрерывной поверхности соответствует исходному дискретному каркасу.
2. Методы нелинейного программирования в многоэкстремальной постановке представляют собой универсальный и надежный инструмент для поиска точек пересечения линий дискретного каркаса.
3. Предлагаемые алгоритмы позволяют полностью автоматизировать процесс установления принадлежности границ и ячеек поверхности.
4. Предлагаемые алгоритмы позволяют в высокой степени автоматизировать процесс вычисления узловых параметров необходимых для применения методов двумерной интерполяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороселов В.А.* Сплайны в инженерной геометрии. — М.: Машиностроение, 1985. — 224 с.
2. *Липскай В.* Комбинаторика для программистов. — М.: Мир, 1988. — 213 с.
3. *Математика и САПР/ В 2-х кн. Пер. с франц. /П.Шемек, М.Коспар, И.Гардан и др.* — М.: Мир, Кн.1, 1988. — 204 с., Кн.2, 1989. — 264 с.
4. *Фокс А., Прятт М.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве/ Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 304 с.
5. *Шпур Г., Краусе Ф.-Л.* Автоматизированное проектирование в машиностроении. — М.: Машиностроение, 1988. — 648 с.