2. Кузин Л.Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления, М., Машгиз, 1962.

3. Солодов А.В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, М., Физматгиз, 1962.

А.Д.БОЙКОВ, Н.Д.ЕГУПОВ, С.Ф.ЛЕДЯЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СВЕРТКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

Рассматривается динамическая система, поведение которой можно описать дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{d^i x}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\frac{d^j f}{dt^j}, \qquad (1)$$

$$a_i(t) = a_i^{0} + \alpha_i(t)$$

$$a_n(t) = a_n = const \neq 0 \qquad (2)$$

$$b_j(t) = b_j^{0} + \beta_j(t)$$

где $f(t)$ и $x(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы; b_j^0, a_i^0 – постоянные коэффициенты; $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t)$ – детерминированные функции аргумента t.

С учетом предположений о коэффициентах $\{a_i(t)\}$ и $\{b_j(t)\}$, исходное дифференциальное уравнение можно представить так

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^0\frac{d^i x}{dt^i} + \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(t)\frac{d^i x}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j^0\frac{d^j f}{dt^j} + \qquad (3)$$

$$+ \sum \beta_j(t)\frac{d^j f}{dt^j}.$$

Будем рассматривать центрированные случайные функции. Запишем уравнение (3) для момента времени t_1, умножим обе части его на $\overset{\circ}{f}(t_2)$ ($\circ$) - обозначение центрированной случайной функции) и осредним по совокупности. Применение формул

$$
\begin{aligned}
&M\left\{\frac{d^i \overset{\circ}{x}(t_1)}{dt_1^i}\,\frac{d^j \overset{\circ}{x}(t_2)}{dt_2^j}\right\} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial t_1^i\,\partial t_2^j} R_{xx}(t_1,t_2), \\
&M\left\{\frac{d^i \overset{\circ}{x}(t_1)}{dt_1^i}\,\overset{\circ}{y}(t_2)\right\} = \frac{d^i}{dt_1^i} R_{xy}(t_1,t_2),
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

где M - знак операции осреднения по множеству, приводит к следующему уравнению:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \overset{\circ}{a}_i \frac{d^i}{dt_1^i} R_{xf}(t_1,t_2) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t_1)\frac{d^i}{dt_1^i} R_{xf}(t_1,t_2) = \\
&= \sum_{j=0}^{m} \overset{\circ}{b}_j \frac{d^j}{dt_1^j} R_{ff}(t_1,t_2) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j(t_1)\frac{d^j}{dt_1^j} R_{ff}(t_1,t_2).
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Применяя двумерное преобразование Лапласа к уравнению (5) получим

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \overset{\circ}{a}_i s_1^i R_{xf}(s_1,s_2) + \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} A_i(\lambda_1)(s_1-\lambda_1)^i\right]\times \\
&\times R_{xf}(s_1-\lambda_1, s_2)\,d\lambda_1 = \sum_{j=0}^{m} \overset{\circ}{b}_j s_1^j R_{ff}(s_1,s_2) + \\
&+ \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[\sum_{j=0}^{m} B_j(\lambda_1)(s_1-\lambda_1)^j\right] R_{ff}(s_1-\lambda_1, s_2)\,d\lambda_1,
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

где

$$A_i(s) = \mathcal{L}_1\{\alpha_i(t)\}, \qquad B_j(s) = \mathcal{L}_1\{\beta_j(t)\},$$

$$R_{xf}(s_1,s_2) = \mathcal{L}_2\{R_{xf}(t_1,t_2)\}, \quad R_{ff}(s_1,s_2) = \mathcal{L}_2\{R_{ff}(t_1,t_2)\}.$$

Вводя обозначения $G(s_1, s_2)$, $A[\lambda_1, s_1-\lambda_1]$, -

Уравнение (6) можно представить так:

$$R_{xf}(s_1,s_2)=\frac{\sum\limits_{j=0}^{m}\overset{0}{b}_j s_1^j}{\sum\limits_{i=0}^{m}\overset{0}{a}_i s_1^i}R_{ff}(s_1,s_2)+\frac{G(s_1,s_2)}{\sum\limits_{i=0}^{m}\overset{0}{a}_i s_1^i}-$$

$$-\frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{m}a_i s_1^i\right)^{-1}}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}A[\lambda_1, s_1-\lambda_1]R_{xf}(s_1-\lambda_1, s_2)d\lambda_1 . \qquad (7)$$

Член $\dfrac{\sum\limits_{j=0}^{m}\overset{0}{b}_j s_1^j}{\sum\limits_{i=0}^{m}\overset{0}{a}_i s_1^i}=W(s_1)$ - соответствует стационарной динамической системе.

Если воспользоваться обозначением

$$R_{xf_0}(s_1,s_2)=W(s_1)R_{ff}(s_1,s_2)+\frac{G(s_1,s_2)}{\sum\limits_{i=0}^{m}\overset{0}{a}_i s_1^i},$$

и представляя $A[\lambda_1, s_1-\lambda_1]$ в виде [2]

$$A[\lambda_1, s_1-\lambda_1]=\frac{B(\lambda_1, s_1-\lambda_1)}{C(\lambda_1)},$$

где $C(\lambda_1)$ - полином от λ_1, формула (7) принимает вид

$$R_{xf}(s_1,s_2)=R_{xf_0}(s_1,s_2)-\frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{m}a_i s_1^i\right)^{-1}}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{B(\lambda_1,s_1-\lambda_1)}{C(\lambda_1)}R_{xf}(s_1-\lambda_1,s_2)d\lambda_1 . \qquad (8)$$

Решение этого уравнения можно найти, используя метод последовательных приближений, при этом K - ое приближение находится по формуле

$$R_{xf_k}(s_1,s_2)=-\frac{\left(\sum_{i=0}^{m} a_i s_1^i\right)^{-1}}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{B(\lambda_1,s_1-\lambda_1)}{C(\lambda_1)}R_{xf(k-1)}(s_1-\lambda_1,s_2)d\lambda_1$$

и двумерное преобразование Лапласа взаимной корреляционной функции представляется в виде ряда

$$R_{xf}(s_1,s_2)=R_{xf_0}(s_1,s_2)+R_{xf_1}(s_1,s_2)+\ldots+R_{xf_k}(s_1,s_2)+\ldots \qquad (9)$$

Если $\dfrac{B(s_1)}{C(s_1)}$ - дробно-рациональная функция, и порядок числителя больше порядка знаменателя, ряд (9) является решением уравнения (8).

Зная выражение для взаимной корреляционной функции в виде (9), можно найти зависимость для автокорреляционной функции выходного сигнала.

Действительно, записывая выражение (3) для момента времени t_2, умножая его на $x(t_1)$, осредняя по совокупности и преобразуя по Лапласу по переменным t_1 и t_2 (используем двумерное преобразование Лапласа) получим следующую зависимость

$$\sum_{i=0}^{\overset{o}{n}}\overset{o}{a}_i s_2^i R_{xx}(s_1,s_2)+\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1}A_i(\lambda_2)(s_2-\lambda_2)^i\right]R_{xx}(s_1,s_2-\lambda_2)d\lambda_2=$$

$$=\sum_{j=0}^{\overset{o}{m}}\overset{o}{b}_j s_2^j R_{xf}(s_1,s_2)+\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[\sum_{j=0}^{m}B_j(\lambda_2)(s_2-\lambda_2)^j\right]R_{xf}(s_1,s_2-\lambda_2)d\lambda_2. \qquad (10)$$

Или, что то же самое

$$R_{xx}(s_1,s_2)=W(s_2)R_{xf}(s_1,s_2)+\frac{G_1(s_1,s_2)}{\sum_{i=0}^{n}\overset{o}{a}_i s_2^i}- \qquad (11)$$

$$-\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1}A_i(\lambda_2)(s_2-\lambda_2)^i\right]R_{xx}(s_1,s_2-\lambda_2)d\lambda_2.$$

Применяя метод последовательных приближений для решения интегрального уравнения свертки в комплексной плоскости (II), получим решение поставленной задачи

$$R_{xx}(s_1,s_2)=R_{xx_0}(s_1,s_2)+R_{xx_1}(s_1,s_2)+\ldots+R_{xx_k}(s_1,s_2)+\ldots.$$

Переход от изображения по Лапласу к оригиналу целесообразно производить ортогональным методом моментов [I], где оригинал определяется в виде двумерного ортогонального ряда

$$R_{xx}(t_1,t_2)=\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty} c_{i_1 i_2}\varphi_{i_1}(t_1)\varphi_{i_2}(t_2). \qquad (12)$$

Если $\varphi_i(t)=\sum_{k=0} d_{ik}\, e^{-\sigma_k t}$,

то коэффициенты можно определить по формуле:

$$c_{i_1 i_2}=\sum_{k_1=1}^{i_1}\sum_{k_2=1}^{i_2} d_{i_1 k_1} d_{i_2 k_2} R_{xx}(s_1,s_2)\Big|_{\substack{s_1=\sigma_{k_1},\\ s_2=\sigma_{k_2}}}.$$

Литература

I. Солодовников В.В. Техническая кибернетика, кн 2, 3, М., Машиностроение, 1969.

2. Скляревич А.Н. Операторные методы в статистической динамике автоматических систем, М., "Наука", 1965.