О.Н.ЕРТАНОВА, В.К.СКИРМУНТ

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

В настоящей работе предлагается метод аппроксимации функции по ее моментным или интегральным характеристикам, в основу которого положены принципы, сформулированные в [I, 2].

Пусть на отрезке $x\ [0, 1]$ задана непрерывная, однозначная функция $f(x)$. Объекты вида

$$M_0=f(0),\quad M_1=f(1), \ldots \quad M_n=\int_0^1 x^{n-2} f(x)\,dx,\quad n=2,3,\ldots \tag{I}$$

условимся называть моментами $n^{го}$ порядка, а объекты вида

$$Y_0=f(0)\,,\quad Y_1=f(1),\ldots,\ Y_n=\int_0^1\ldots\int_0^x f(x)\,dx,\ldots dx_{n-1}\,; \tag{2}$$

интегралами $n^{го}$ порядка. Функцию $f(x)$ на интервале $x\ [0, 1]$ заменим функцией

$$\tilde f(x) = \sum_{i=0}^{m} K_i\, x^i \tag{3}$$

приближающей $f(x)$ так, чтобы имел место минимум суммы

$$S=(M_0-K_0)^2+\Big(M_1-\sum_{j=0}^{m}K_j\Big)^2+\sum_{i=2}^{n}\Big(M_i-\sum_{j=0}^{m}\frac{K_j}{j+i-1}\Big)^2$$

или минимум суммы

$$S=[Y_0-K_0]^2+\sum_{i=1}^{n}\Big[Y_i-\sum_{j=0}^{m}\frac{j!\,K_j}{(j+i-1)!}\Big]^2.$$

Используя обычные методы [3], получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов K_i в виде

$$
\begin{aligned}
&a_{00} K_0 + a_{01} K_1 + \ldots + a_{0m} K_m = r_0 \quad , \\
&a_{10} K_0 + a_{11} K_1 + \ldots + a_{1m} K_m = r_1 \quad , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad (4) \\
&a_{m0} K_0 + a_{m1} K_1 + \ldots + a_{mm} K_m = r_m \quad ,
\end{aligned}
$$

где

$$a_{jk} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(j+i-1)(k+i-1)} \quad ,$$

$$r_j = M_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{M_i}{j+i-1} \quad ,$$

$$a_{00} = 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1)^2} \quad ,$$

$$r_0 = M_0 + M_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{M_i}{i-1} \quad ,$$

или в виде

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \frac{j!\,k!}{(j+i-1)!\,(k+i-1)!} \, , \qquad r_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{j!}{(j+i-1)!} \quad ,$$

$$a_{00} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{(i-1)!}\right]^2 , \qquad r_0 = Y_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i \frac{1}{(i-1)!}\right] .$$

Обсудим возможные направления применения сформулированного метода.

I. Восстановление функции. Под восстановлением функции понимается задача построения степенного полинома вида (3), заменяющего с минимально-допустимой погрешностью заданную функцию. Рассмотрим три случая наиболее часто встречающиеся на практике.

I.I. Замена аналитической функции приближающим полиномом. Если функция задана в аналитическом виде, допускающем вычисление моментных либо интегральных характеристик по выражениям (I), (2), то построение полинома сводится к решению системы (4) относительно K_i .

В качестве примера рассмотрим замену функции $\cos\pi x$ на интервале $[0,1]$ полиномом целой положительной степени. Моменты функции имеют следующие значения:

$$M_0=1,\ M_1=-1,\ M_2=\int_0^1 \cos\pi x\,dx=0,\ M_3=\int_0^1 x\cos\pi x\,dx=-\frac{2}{\pi^2},$$

$$M_4=\int_0^1 x^2\cos\pi x\,dx = \ldots,\quad M_5=\int_0^1 x^3\cos\pi x\,dx = \ldots\,.$$

$$M_6=\int_0^1 x^4\cos\pi x\,dx = \ldots,\quad M_7=\int_0^1 x^5\cos\pi x\,dx = \ldots\,.$$

В результате решения системы (4) получен приближающий полином

$$f(x)=1-0{,}0066x-4{,}8253x^2-0{,}0325x^3+5{,}7732x^4-2{,}0689x^5 \qquad (5)$$

В работе [I] получен приближающий полином для вида

$$f(x)=1-0{,}000354x-4{,}930726x^2+0{,}01996x^3+2{,}53426x^4+$$
$$+0{,}356048x^5-1{,}93310x^6+0{,}55176x^7. \qquad (6)$$

Значения, рассчитанные по выражениям (5, 6) и точные значения $y=\cos\pi x$ приведены в таблице I. Можно сделать вывод, что оба полинома достаточно хорошо приближают заданную функцию.

I.2. Замена точной функции, заданной в дискретной форме, приближающим полиномом. Подобная задача возникает для функции $f(x)$ заданной таблично на некотором конечном множестве точек x_i : $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$, когда требуется определить $f(x)$ для промежуточных значений аргумента. Причем, желательно иметь результаты в виде простого аналитического выражения. Математическая формулировка задачи, предложенная выше, остается без изменения. Расчет интегральных или моментных характеристик в этих случаях

Таблица I

x	$Cos\, \pi x$	по фо[illegible]	по формуле
0	0,000000	1,00[illegible]	
0,I	0,95I056	0,95I0[illegible]	[illegible],95I056
0,2	0,809017	0,80[illegible]	[illegible],809017
0,3	0,587785	0,587829	[illegible],587785
0,4	0,309017	0,3090[illegible]	[illegible],309016
0,5	0	0,00[illegible]0I0	0
0,6	-0,309017	-0,308984	-0,309016
0,7	-0,587785	-0,58[illegible]	-0,587785
0,8	-0,809017	-0,80[illegible]	-0,809017
0,9	-0,95I056	-0,95I0[illegible]	-0,95I056
I,0	-I,000000	-I,000[illegible]	-I,000000

производится по какой-либо из квадратурных формул. Для примера рассмотрим функцию $y = \cos \pi x$ на интервале $x\,[0,1]$, заданную дискретно с шагом $\Delta x = 0{,}1$. Решение в виде полинома имеет вид

$$f(x) = 1-0{,}0012x-4{,}8927x^2-0{,}4212x^3+5{,}5282x^4-2{,}[illegible]x^5 \qquad (7)$$

и обеспечивает необходимую точность. В таблице 2 приведены значения $y = Cos\,\pi x$, рассчитанные по (7).

Подобная задача решалась и для функции $y = 2x^3 e^{-x}$. В таблице 3 приведены точные значения этой функции и приближенные, расчитанные по полиному

$$f(x) = -0{,}9544x + 18{,}8651x^2 - 3{,}9618x^3 - 44{,}2295x^4 +$$
$$+ 39{,}8870x^5 - 0{,}8594x^6 - 6{,}4030x^7 .$$

Совпадение следует признать вполне удовлетворительным.

I.3. Замена табличной функции, содержащей случайные возмущения, приближающим полиномом.

Во многих задачах, связанных с обработкой результатов наблюдений, табличные значения функции содержат некоторую погрешность. Наибольшее распространение для восстановления функции получил метод наименьших квадратов. В связи с тем, что метод построен на минимизации среднеквадратичной ошибки в точках задания функции, поведение аппроксимирующего полинома на интервале между точками остается бесконтрольным. Это приводит к тому, что с повышением степени полинома возникают ложные колебания между узлами задания функции, хотя аппроксимация возможна с меньшей среднеквадратичной ошибкой. Естественно, что полученные полиномы непригодны для целей интерполяции и дальнейшего анализа структуры рассматриваемого физического явления. Численные эксперименты, проведенные по предлагаемому методу показали, что он свободен от перечисленных недостатков. В табл. 2, 3 приведены функции $y = \cos \pi x$ и $y = 2x^3 e^{-x}$, восстановленные по значениям, содержащим случайную относительную погрешность в I и 5%. Аппроксимирующие полиномы имеют вид

$$\tilde{f}(x) = 1{,}0000 + 0{,}025x - 5{,}0824x^2 + 0{,}0727x^3 + 4{,}7939x^4 - 1{,}5561x^5 - 0{,}2533x^6 \qquad (8)$$

для функции $y = \cos \pi x$ с уровнем возмущения в I%,

$$\tilde{f}(x) = 1{,}0000 - 0{,}0217x - 4{,}9528x^2 - 0{,}2129x^3 + 4{,}9511x^4 - 1{,}1595x^5 - 0{,}6111x^6 \qquad (9)$$

для той же функции с уровнем возмущения в 5%,

$$\tilde{f}(x) = -0{,}9571x + 19{,}0331x^2 - 38{,}345x^3 - 46{,}8883x^4 + 43{,}8746x^5 - 1{,}7913x^6 - 7{,}0925x^7 \qquad (10)$$

для функции $y = 2x^3 e^{-x}$ с уровнем возмущения в I%,

$$\tilde{f}(x) = -0{,}6283x + 18{,}1859x^2 - 12{,}5902x^3 - 8{,}9346x^4 + 1{,}0498x^5 - 12{,}9301x^6 + 30{,}5976x^7 - 2{,}5323x^8 - 9{,}8737x^9 \qquad (11)$$

для той же функции с уровнем возмущения 5%.

Таблица 2

x	$\cos \pi x$	по формуле (I2)	по формуле (I4)	по формуле (I5)
0,00	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000
0,05	0,9877	-	0,9886	0,9848
0,I0	0,95II	0,95II	0,9522	0,947I
0,I5	0,89I0	-	0,8920	0,8867
0,20	0,8090	0,8088	0,8095	0,805I
0,25	0,707I	-	0,7069	0,703I
0,30	0,5878	0,5873	0,5870	0,5836
0,35	0,4540	-	0,4527	0,4484
0,40	0,3090	0,3086	0,3083	0,3020
0,45	0,I564	-	0,I545	0,I464
0,50	0,0000	0,0000	-0,00I9	-0,0I20
0,55	-0,I564	-	-0,I58I	-0,I7I6
0,60	-0,3090	-0,3087	-0,3I04	-0,3245
0,65	-0,4540	-	-0,4549	-0,4703
0,70	-0,5878	-0,5874	-0,588I	-0,5998
0,75	-0,707I	-	-0,7068	-0,7I6I
0,80	-0,8090	-0,8088	-0,808I	-0,8083
0,85	-0,89I0	-	-0,8895	-0,8856
0,90	-0,95II	-0,95I0	-0,9493	-0,936I
0,95	-0,9877	-	-0,9862	-0,9783
I,00	-I,0000	-I,0000	-I,0000	-I,0000

Таблица 3

$\cos \pi x$	по формуле (I3)	по формуле (I6)	по формуле (I7)
0	0	0	0
0,0I3I	0,00I3	0,00I0	0,0I24
0,0858	0,0852	0,0865	0,I035
0,237I	0,2485	0,25I3	0,2679
0,460I	0,4739	0,4780	0,4866
0,7358	0,744I	0,7492	0,7476
I,0409	I,04II	I,0463	I,0354
I,3533	I,347I	I,35II	I,334I
I,6539	I,6452	I,6470	I,6276
I,9280	I,9209	I,9I96	I,9009
2,I654	2,I625	2,I576	2,I408
2,3597	2,36I5	2,3532	2,3375
2,5082	2,5I32	2,5023	2,4854
2,6I09	2,6I62	2,6044	2,584I
2,6698	2,6728	2,6623	2,6383
2,6885	2,6876	2,68I0	2,657I
2,67I4	2,6674	2,6666	2,65I7
2,6234	2,6I90	2,6252	2,6305
2,5496	2,5482	2,5599	2,5925
2,455I	2,4577	2,4693	2,5I6I
2,3440	2,3440	2,3440	2,3440

2. Восстановление производных

Важнейшим свойством полиномов, которые строятся по описанному методу, является способность приближаться к заданной функции на всем интервале с повышением порядка полинома. Это дает возможность проведения над ними операции дифференцирования в аналитическом виде. На рис. I, 2 показано сопоставление точных значений производных от функций $y = \cos 7x$ и $y = 2x^3 e^{-x}$ со значениями рассчитанными по полиномам, являющимся первыми производными (8-II). Обращает на себя внимание тот факт, что даже для уровня возмущений в 5% значения производной и характер ее изменения достаточно удовлетворительны. В настоящее время наиболее эффективным средством решения задач такого родасчитаются методы, основанные на регуляризирующих функционалах А.Н.Тихонова. На рис. I, 2 представлены результаты восстановления производных по одному из этих методов [4]. Сравнение результатов подтверждает эффективность предлагаемого подхода.

Литература

I. Власов В.Г. Собрание трудов. Том 5. Судпромгиз, 1959.

2."Методы и средства технической кибернетики". Сборник статей. Выпуск IO, Рига, 1970.

3. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов. 1962.

4. Веденеев Е.Н., Жидков Н.П. Применение метода регуляризации к дифференцированию функции одного переменного, заданной таблично. В сборнике "Вычислительные методы и программирование", вып. I3. ИздательствоМГУ, 1969.

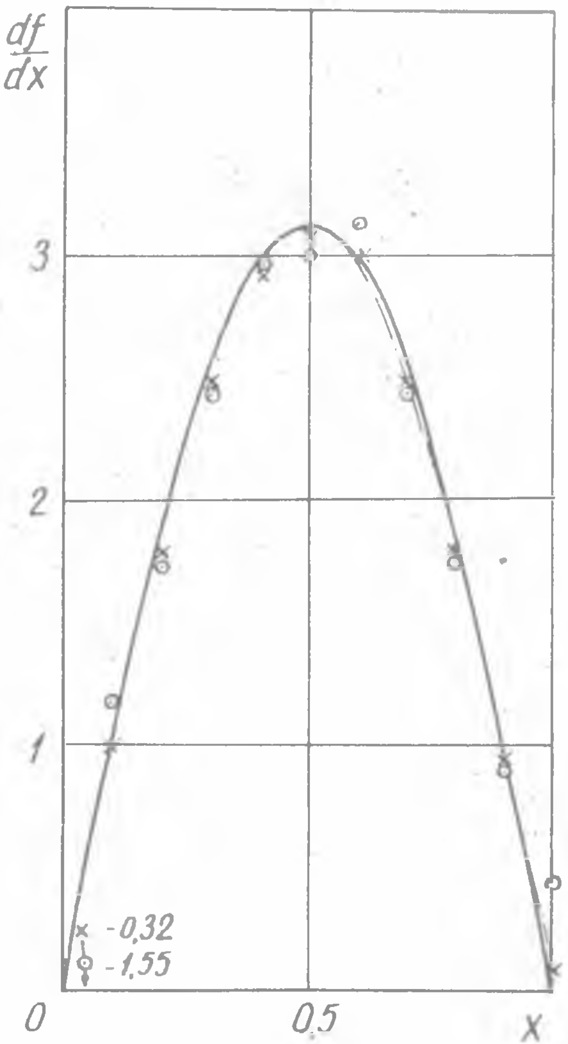

Рис. I.

—— точное решение и при возмущении I%;
—·— по предлагаемому методу при возмущении 5%;
× по методу работы [4] при возмущении I%;
⊙ при возмущении 5%.

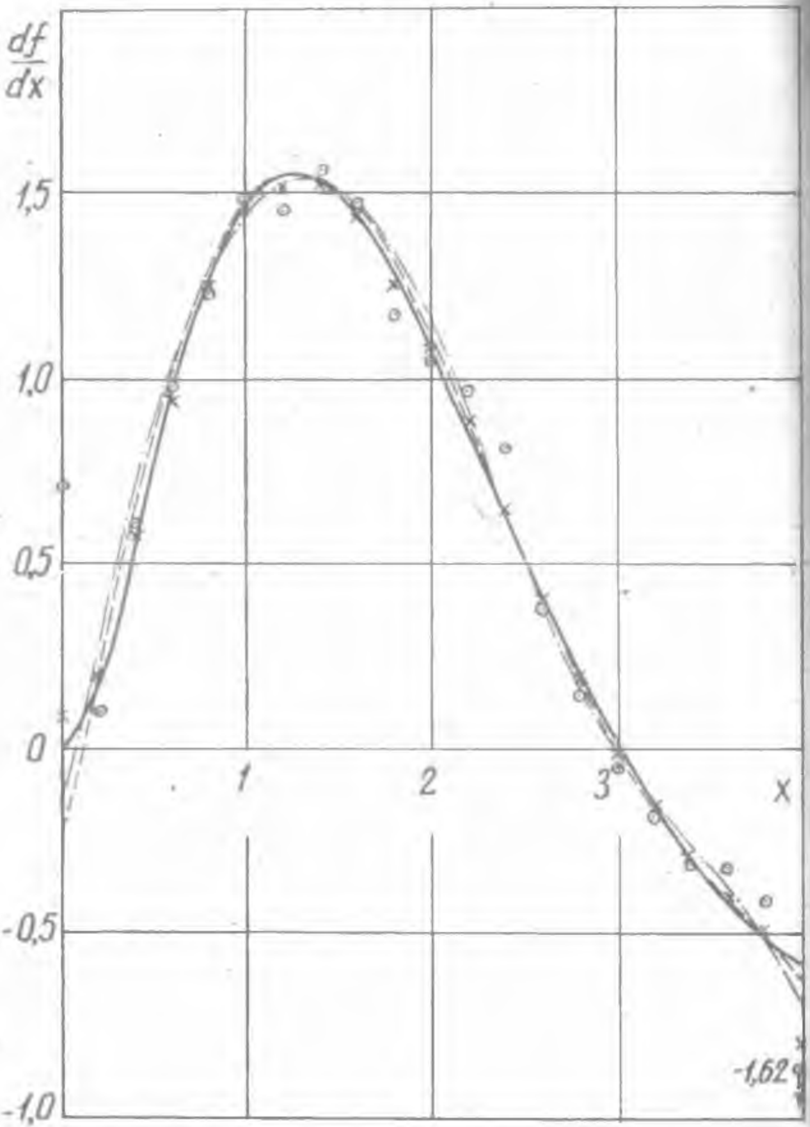

Рис. 2.

— точное решение;
– – по предлагаемому методу при возмущении 1%;
— при возмущении 5%;
× по методу работы [4] при возмущении 1%
⊙ при возмущении 5%