

О ДЛИНЕ ПУТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

В связи с применением быстродействующих вычислительных машин для решения дифференциальных уравнений турбулентного движения жидкости новый толчок получила идея эффективной вязкости. При ее формулировке часто используют понятие пути перемешивания. Существует большое число различных аппроксимаций этой длины [1]. Предлагается единообразный подход к аппроксимации этой длины.

Представим зависимость длины пути перемещения от геометрии области течения  $l = \alpha \mathcal{L} \gamma$ , где  $l$  - длина пути перемещения;  $\alpha$  - постоянная Кармана;  $\mathcal{L}$  - "геометрический масштаб турбулентности";  $\gamma$  - "динамический масштаб турбулентности". Динамический масштаб турбулентности учитывает влияние твердой стенки, перемежаемости турбулентности, вдува (отсоса), продольного градиента давления, внешнего магнитного поля и т.д. Если принимается во внимание только демпфирующее влияние твердой стенки, то масштаб  $\gamma$  совпадает с множителем, введенным Ван-Дристом [2].

Наиболее универсальное определение  $\mathcal{L}$  дано И.И. Булеевым [3, 4], оно хорошо совпадает с экспериментальными результатами в круглой трубе  $\delta$  и обычно применяемой аппроксимацией в пограничном слое  $\mathcal{L} = y$ , где  $y$  - расстояние до твердой стенки. Формула И.И. Булеева имеет вид

$$\frac{1}{\mathcal{L}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{s} d\omega, \quad (1)$$

где  $s$  - расстояние от данной точки до твердой стенки  $\mathcal{D}$  в направлении  $\omega$ .

Из-за малости толщины  $\delta$  пограничного слоя по сравнению с расстоянием  $x$  от передней кромки, интеграл (1) следует вычислять только в плоскости поперечного сечения потока

$$\frac{1}{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{s_i} d\varphi,$$

где  $r_0$  - расстояние от данной точки до твердой  
стенки  $L$  в направлении  $Y$ .

Этой же формулой следует пользоваться при вычислении  $\chi$  для длинных цилиндрических каналов, в которых течение будет полностью развитым. В [3] выполнены вычисления для некоторых типов каналов.

Масштаб  $\chi$ , следуя Ю. А. Бувевичу [6,7], представим в виде

$$\chi = \int_0^1 R(t) dt, \quad (2)$$

где  $R(t)$  - лагранжев коэффициент корреляции поперечной компоненты пульсационной скорости в потоке.

При вычислении (2) следует вспомнить, что вихри с некоторым временем масштабом  $T \geq T_{max}(y)$  не могут подойти к стенке на расстояние меньше  $y$ , так как стенка оказывает демпфирующее влияние. Наоборот, вихри с  $T \leq T_{min}(y)$  не достигают внешней границы и, следовательно, не влияют на появление перемежаемости турбулентности [7].

Учитывая сказанное и используя идею асимптотических разложений, запишем (2) следующим образом

$$\chi = \left( \int_{T_{min}(y)}^{T_{max}(y)} R(t) dt \right) / \left( \int_0^{\infty} R(t) dt \right) / \left( \int_0^{\infty} R(t) dt \right)^2. \quad (3)$$

где знаменатель появляется из-за требования нормировки  $\delta$

Если аппроксимировать  $R(t)$  экспоненциальной функцией, то из (3) получаем

$$\gamma \cdot [1 - \exp(-\frac{x}{\Delta})] \exp(-\frac{x}{\Delta}), \quad (4)$$

где принято [7]

$$\begin{aligned} T_{max} &= \frac{C\Delta}{u}, \quad T_0 = \frac{C\Delta}{u}, \quad \Delta = m\delta, \\ T_{min} &= \frac{C^*\Delta}{u}, \quad \Delta_0 = \frac{Cm\delta}{C^*}, \quad \Delta_2 = \frac{Cm\delta}{C^*}. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) дополнительно  $C^*$ ,  $C^*$  и  $C$  - постоянные;  $\Delta$  - лангранжев временной масштаб, определенный по коэффициенту корреляции  $R(t)$ ;  $\Delta$  - характерный линейный масштаб, пропорциональный толщине пограничного слоя  $\delta$ ;  $u$  - характерная скорость турбулентных пульсаций.

При безградиентном течении над непроницаемой стенкой [7]

$$A_1 = A_1^* (\tau_0/\rho)^{1/2} \nu, \quad A_2 = m\delta, \quad (6)$$

где постоянная  $A_1^* = 25,13 - 30,4$  [7,9], а  $m = 0,6 + 0,8$  [6,9].

В дальнейшем примем:  $\alpha = 0,4$ ;  $A_1^* = 26$ ;  $m = 0,8$ . В (6)

$\nu$  - кинематическая вязкость и плотность жидкости;  $\tau_0$  - напряжение трения на стенке.

При развитом течении в канале второй множитель в (4) должен быть опущен (т.е. в этом случае  $1/m = 0$ ), так как отсутствует граница между турбулентной областью и невязким потоком, а, следовательно, в развитой турбулентной области перемежаемость потока отсутствует. Тогда  $\gamma$  совпадает с введенным Ван-Дристом [2].

Можно предположить, что рассуждения Ван-Дриста могут быть продолжены для учета градиента давления вдоль обтекаемой поверхности, вдува (отсоса) на твердой стенке и магнитного поля на величину коэффициента  $A_1^*$ . Этот путь для учета вдува (отсоса) на твердой стенке и отсутствия продольного градиента давления и магнитного поля приводит к результату [10]

$$\frac{\delta}{\tau} = 13 v_w^* + \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[ (13 v_w^*) + 4 \right] + (13 v_w^*)^2 \right\}^{1/2}} \quad (7)$$

$$v_w^* = v_w (\zeta_0 / \rho)^{-1/2},$$

где  $v_w$  - скорость вдува (отсоса) газа через твердую стенку.

Другой подход, основанный на приближенном интегрировании уравнений движения, развит в [II]. В этом случае безразмерный коэффициент демпфирования  $A_1^*$  определяется формулой

$$\frac{A_1^*}{2\zeta} = \exp(-59 v_w^*). \quad (8)$$

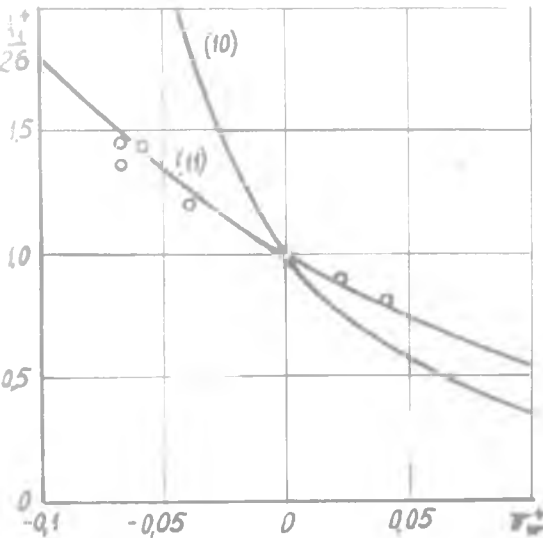


Рис. I.

На рис. I представлено сопоставление результатов (7) и (8), где цифры в круглых скобках - номер формулы, по которой произведен расчет. Из графика видно, что формула (7) дает значительно большую величину коэффициента демпфирования  $A_1^*$  при отсосе, чем это следует из сравнений с экспериментом (точки на рис. I).

Простота формулы (8) и хорошее ее соответствие экспериментальным данным позволяет поставить задачу о приближенном учете влияния вдува (отсоса), продольного градиента давления и магнитного поля на величину  $A_1^*$ .

В ламинарном подслое уравнение движения с приложенным магнитным полем имеет вид [12]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{B_0 \sigma}{\rho} u \quad (9)$$

где  $x, y$  - декартовы координаты;  $t$  - время;  $u, v$  - составляющие скорости в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $U$  - значение  $u$  вне пограничного слоя;  $p$  - давление;  $\nu$  - кинематическая вязкость;  $B_0$  - магнитная индукция;  $\sigma$  - электропроводность жидкости. Для стационарного случая уравнение (9) заменяется приближенным

$$v_{\max} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{B_0 \sigma}{\rho} u.$$

решение которого при начальных условиях

$$u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v_{\max}}{\nu} \quad \text{при } y=0$$

имеет вид

$$u^* = \frac{P^*}{N^*} + \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{\nu^2} (v_{\max}^2 + F)}{F} \exp\left[\frac{1}{2}(v_{\max}^2 + F) \frac{1}{2} y^*\right] - \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{\nu^2} (v_{\max}^2 + F)}{F} \exp\left[\frac{1}{2}(v_{\max}^2 - F) y^*\right] \quad (10)$$

$$u^* = \frac{u}{v_{\max}}, \quad y^* = \frac{v_{\max} y}{\nu}, \quad P^* = -\frac{\nu}{\rho v_{\max}^2} \frac{dp}{dx}, \quad v_{\max} = \left(\frac{\sigma \nu}{\rho}\right)^{1/2}$$

$$N^* = \frac{B_0 \sigma \nu}{\rho v_{\max}^2}, \quad F = \sqrt{v_{\max}^2 + 4N^*}.$$

Если для постоянной демпфирования  $A_1$  в (6) определять динамическую скорость на расстоянии, равном толщине подслоя  $y_3$ , т.е. [II]

$$\frac{A_1}{2\delta} = \nu / (\tau_s / \rho)^{1/2}$$

и принять  $y^* = 4,8$ , из (10) получаем

$$\left(\frac{2\sigma}{A_1}\right)^2 = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{\nu^2} (v_{\max}^2 + F)}{2F} (v_{\max}^2 + F) \exp[5,9(v_{\max}^2 + F)] -$$

$$- \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{\nu^2} (v_{\max}^2 + F)}{2F} (v_{\max}^2 - F) \exp[2,4(v_{\max}^2 - F)].$$

Частные случаи:

1)  $V^+ = 0$  / III

$$\left(\frac{26}{A_1^+}\right)^2 = -\frac{P^+}{k_w^+} [\exp(11,8 v_{w0}^+) - 1] \cdot \exp(11,8 v_{w0}^+)$$

2)  $P^+ = 0$

$$\left(\frac{26}{A_1^+}\right)^2 = \frac{v_{w0}^+ F}{2F} \exp[5,9(v_{w0}^+ + 1)] \cdot \frac{k_w^+}{v_{w0}^+} \exp[5,9(v_{w0}^+ F)]$$

3)  $k_w^+ = 0$

$$\left(\frac{26}{A_1^+}\right)^2 = \operatorname{ch}(11,8 \sqrt{N^+}) - \frac{P^+}{\sqrt{N^+}} \operatorname{sh}(11,8 \sqrt{N^+})$$

4)  $P^+ = 0, v_{w0}^+ = 0$

$$\left(\frac{26}{A_1^+}\right)^2 = \operatorname{ch}(11,8 \sqrt{N^+})$$

5)  $P^+ = 0, N^+ = 0$

$$\left(\frac{26}{A_1^+}\right)^2 = \exp(11,8 v_{w0}^+)$$

6)  $v_{w0}^+ = 0, N^+ = 0$

$$\left(\frac{26}{A_1^+}\right)^2 = 1 - 11,8 P^+$$

7)  $P^+ = 0, v_{w0}^+ = 0, N^+ = 0$

$$A_1^+ = 26$$

На рис. 2-3 показано влияние различных факторов на  $A_1^+$ .

В настоящее время отсутствует даже приближенный аналитический подход к учету перечисленных факторов на величину  $A_2$ . В [14] указано, что ослабление перемежаемости при МД-течении может быть учтено следующим образом

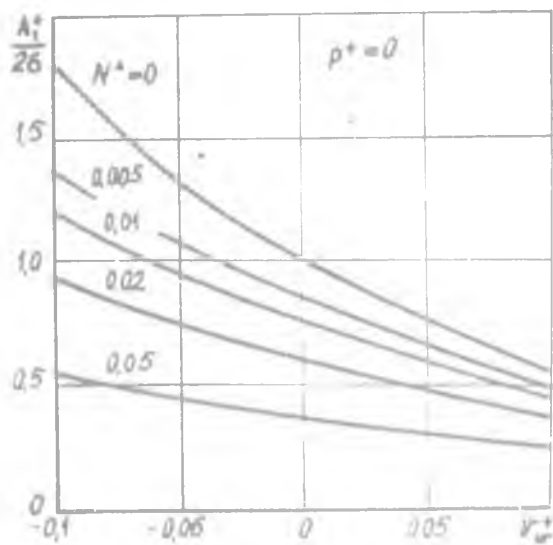


Рис. 2.

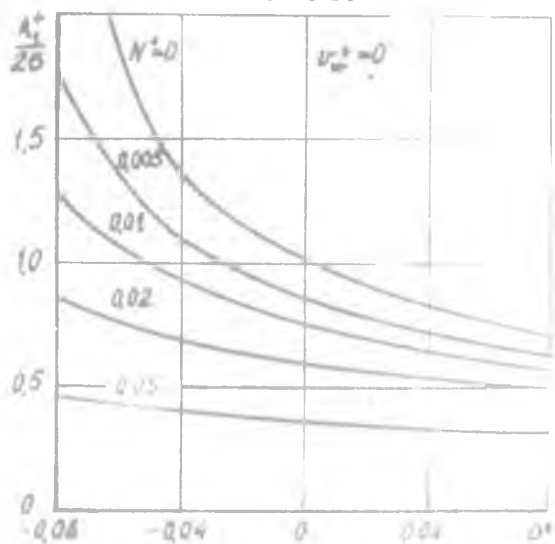


Рис. 3.

$$\frac{1}{m} = \frac{L}{m_0} + \frac{y/\delta}{N^+}$$

где  $m_0$  - значение  $m$  при  $N^+ = 0$ , т.е.  $m_0 = 0,6$ ;  
 $L = 0$  при развитом течении в канале;  $L = 1$  при течении  
 в пограничном слое.

### Литература

1. Ротта Н.К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости, Л., Судостроение, 1967.
2. Van Driest E.R., On turbulent flow near a wall, J. Aeron. Sci., 1956, 23, N 11, 1007-1011.
3. Бугаев Н.И. Теоретическая модель механизма турбулентного обмена в потоках жидкости. "Теплопередача", М., Изд-во АН СССР, 1962, 64-98.
4. Бугаев Н.И. Теоретическая модель турбулентного обмена в трехмерном потоке жидкости. "Тр. Всес. Семинара по числ. методам механ. вязк. жидкости", Новосибирск, Наука 1969, 5-27.
5. Nikuradse J., Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Stromung in glatten Röhren, Forschungsheft 356, 1932.  
 русский перевод: Никурадзе И. Закономерности турбулентного движения жидкостей в гладких трубах. "Проблемы турбулентности", ОНТИ, М.-Л., 1936, 75-150.
6. Вујевич Ј. А., Bemerkung über die Kostrucktionen von Modellen für wandnahe Turbulenz, ZAMM, 1969, 49, N 6.
7. Буевич Д.А. К модели снижения сопротивления при введении частиц в турбулентном потоке вязкой жидкости, МИГ, 1970, № 2, 114-120.
8. Van Dyke M., Perturbation methods in fluid mechanics, 1964;  
 русский перевод: Вав-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости, Мир, М., 1967.



9. Szablowski W., Eine neue Konzeption für die Berechnung incompressible turbulenter Grenzschichten,

(Шаблевский В. Новая модель для расчета несжимаемых турбулентных пограничных слоев), ММГ, 1970, № 2, 121-135.

10. Kuney R B, Sparrow E M, Turbulent flow, heat transfer, and mass transfer in a tube with surface suction. Trans ASME, 1970, 92, № 2,

русский перевод: Кинни, Спарроу. Турбулентное течение, тепло- и массообмен в трубах с поверхностным отсосом, Теплопередача, 1970, № 2, 121-131.

11. Sebeci T Behavior of turbulent flow near a porous wall with pressure gradient, AIAA Journal, 1970, 8, № 12, 2152-2156,

русский перевод: Себеси. Турбулентное течение у пористой стенки при наличии градиента давления, Ракетная техника и космонавтика, 1970, № 12, 48-53.

12. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередача, Изд-во Ленинград, ун-та, 1970.

13. Брановер Г.Г. Турбулентные МГД-течения в трубах, Рига, Зинатне, 1967.

В.К.СКИРМУНТ

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ  
СЛОЕ ПО ЗАМЕРЕННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДАВЛЕНИЯ  
И НАПРЯЖЕНИЯ ТРЕЙНГ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около плоского твердого тела в общем случае описывается системой уравнений Навье-Стокса

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$