УДК 681.3-181.48:51

В.Г.Каган, А.А.Наумов, Г.М.Мац

ОДНОВРЕМЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

(г. Новосибирск)

В проблемно-ориентированных системах на базе микроЭВМ (АСНИ, информационно-измерительных, управляющих) возникают задачи выполнения координатных преобразований, вычисления значений экспоненты комплексного аргумента и ряд других, которые сводятся к вычислению пары функций $\cos x$ и $\sin x$ одного значения аргумента. В такой ситуации предпочтение обычно отдается методам "цифра за цифрой", так как они позволяют вычислять сразу две функции /1/. Однако для решения этой задачи может использоваться и полиномиальная аппроксимация. В статье проводится сравнение затрат времени на одновременное вычисление функций $\cos x$ и $\sin x$ методами "цифра за цифрой" и через полиномы наилучшего равномерного приближения.

Вопросы сравнения полиномов наилучшего приближения и методов "цифра за цифрой" рассмотрены во многих работах /1-3/. Предполагается, что аппроксимирующие полиномы вычисляются по схеме Горнера, т.е. при вычислении пары функций, независимо. При этом не учитывается возможность ускорения вычислительного процесса за счет использования специальных схем одновременного вычисления полиномов /4,5/. Рассмотрим именно эти схемы. В зависимости от требуемой в системе точности вычисления функций (от 2^{-10} до 2^{-30}) обычно реализуется один из следующих вариантов аппроксимации:

1. $$\cos\frac{\pi}{2}x=\sum_{i=0}^{2}a_{2i}x^{2i}=\sum_{i=0}^{2}a_{2i}y^{i};$$

$$\sin\frac{\pi}{2}x=\sum_{i=0}^{2}b_{2i+1}x^{2i+1}=\Big(\sum_{i=0}^{2}b_{2i+1}y^{i}\Big)x;$$

$$|x|\leqslant 1,\quad y=x^2 -$$

приходится одновременно вычислять два полинома второй степени.

2. $$\cos\frac{\pi}{2}x=\sum_{i=0}^{3}a_{2i}x^{2i}=\sum_{i=0}^{3}a_{2i}y^{i};$$

$$\sin\frac{\pi}{2}x=\sum_{i=0}^{3}b_{2i+1}x^{2i+1}=\Big(\sum_{i=0}^{3}b_{2i+1}y^{i}\Big)x;$$

$$|x|\leqslant 1,\; y=x^2 -$$

приходится одновременно вычислять два полинома третьей степени.

3. Если $\cos\frac{\pi}{2}x$ аппроксимируется полином восьмой (десятой) степени, а $\sin\frac{\pi}{2}x$ - девятой (одиннадцатой) степени, то приходится вычислять два полинома четвертой (пятой) степени.

В табл.I приведено число операций умножения и сложения, необходимое для одновременного вычисления полиномов по схемам /5/, для раздельного вычисления полиномов по схеме Горнера и схемам с предварительной обработкой коэффициентов /6/. При этом учтено, что необходимо аргумент возвести в квадрат и умножить полином, аппроксимирующий функцию $\sin x$ на x. В последнем столбце табл.I приведены данные о точности вычисления функций $\cos x$ и $\sin x$ при различных степенях аппроксимирующих полиномов наилучшего приближения. Вычисления проводились с 32-разрядными числами с фиксированной запятой. Число верных двоичных разрядов у пары функций определялось по числу верхних разрядов у $\cos x$, так как погрешность вычисления $\cos x$ больше, чем $\sin x$. Эти данные позволяют определить число итерации методов "цифра за цифрой", необходимое для получения такой же точности.

Таблица I

Необходимое число операций умножения (ж) и сложения (+) при вычислении функций $\sin x$ и $\cos x$ (результаты точностного анализа)

Степени вычисляемых полиномов	Одновременное вычисление полиномов		Раздельное вычисление полиномов				Число верхних двоичных разрядов результата
			по схеме Горнера		с предварительной обработкой коэффициентов		
	ж	+	ж	+	ж	+	
2	6	4	7	4	7	4	I2
3	7	6	9	6	9	6	I7
4	8	9	II	8	9	I0	22
5	9	II	I3	I0	II	8	28

При сравнении полиномиальной аппроксимации и методов "цифра за цифрой" будем полагать, что полиномы вычисляются по схемам одновременного вычисления, аргумент функции приведен к интервалу $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (затраты времени на приведение одинаковы при использовании полиномиальной аппроксимации и методов "цифра за цифрой").

Метод Волдера позволяет вычислить функции $\cos x$ и $\sin x$ следующим образом /I/:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \xi_i \operatorname{arctg} 2^{-i};$$

$$\xi_i = \operatorname{sign} \theta_i;$$

$$y_{i+1} = y_i - \xi_i 2^{-i} x_i; \quad x_{i+1} = x_i + \xi_i 2^{-i} y_i;$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1; \ \theta_0 = \varphi, \ y_0 = 0; \ x_0 = 1/K; \ y_n = \sin\varphi; x_n = \cos\varphi.$$

Общее число операций в вычислительном процессе равно: $3n$ операций сложения (вычитания), n операций определения знака числа, по два сдвига на I,2,..., $n-1$ разрядов вправо. Необходимое число итераций n равно числу верных двоичных разрядов при полиномиальной аппроксимации функций. Для сравнения времени вычислений необходимо связать между собой следующие величины: $t_{ум}$ – время умножения чисел в микроЭВМ, $t_{сл}$ – время сложения, $t_{зн}$ – время определения знака числа, $t_{сдв}$ – время сдвига числа. Анализ систем команд ряда микроЭВМ показал, что справедливы следующие соотношения: $t_{сдв} = t_0 + i\Delta t$, где t_0 – некоторое базовое время, i – число разрядов, на которое происходит сдвиг, $\Delta t = (0{,}1 - 0{,}4)t_0$ (например в микроЭВМ "Электроника-60М" t_0 = II,6 мкс, Δt = 3,2 мкс). Кроме того, обычно $t_0 \approx t_{сл}$, $t_{зн} \approx t_{сл}$. Введем параметр $m = t_{ум}/t_{сл}$, положим $\Delta t = 0{,}1 t_0$. При таких предположениях были определены (табл.2) затраты времени на полиномиальную аппроксимацию и реализацию метода Волдера (в методе Волдера затраты времени составляют: $3n\,t_{сл}$ – на сложение (вычитание), $n\,t_{сл}$ – на определение знака, $2(n-1)t_{сл} + 0{,}1(n-1)(n-2)t_{сл}$ – на сдвиги.

Таблица 2

Затраты времени на полиномиальную аппроксимацию и реализацию метода Волдера

Число верных двоичных разрядов результата	Полиномиальная аппроксимация	Метод Волдера
I2	$(6m+4)\,t_{сл}$	$81\,t_{сл}$
I7	$(7m+6)\,t_{сл}$	$124\,t_{сл}$
22	$(8m+9)\,t_{сл}$	$172\,t_{сл}$
28	$(9m+11)\,t_{сл}$	$236\,t_{сл}$

Анализ данных табл.2 позволяет заключить, что на микроЭВМ полиномиальная аппроксимация пары функций вычисляется быстрее, чем реализуется метод Волдера. Это связано с тем, что параметр m у микроЭВМ изменяется в пределах m = 5...15 (например, у микроЭВМ "Электроника-60М" $t_{сл}$ = 4÷8 мкс, $t_{ум}$ = 27÷48 мкс).

Проведенный анализ показал примерное равенство времени вычисления функций $\cos x$ и $\sin x$ методом Меджита и Волдера.

Выводы

1. Использование специальных схем для одновременного вычисления полиномов позволяет получить существенный выигрыш во времени по сравнению с использованием для этой же цели схемы Горнера.

2. Если полиномиальные аппроксимации функций $\cos x$ и $\sin x$ вычисляются по специальным схемам одновременно, то затраты времени меньшие, чем при использовании методов Волдера и Меджита.

Литература

1. Байков В.Д., Смолов В.Б. Аппаратная реализация элементарных функций в ЦВМ. –Л.:ЛГУ, 1975. – 96 с.

2. Байков В.Д., Семотин С.А. Анализ методов вычисления элементарных функций в микропроцессорах и микроЭВМ.–Известия вузов СССР. Приборостроение, 1981, т.24, № 1, с.54–56.

3. Палагин А.В. и др. Мини-ЭВМ. Принцип построения и проектирования. – Киев:Наукова думка, 1975. – 200 с.

4. Пан В.Я. О способах вычисления значений многочленов. – Успехи математических наук, 1966, т.21, вып.1, с.103–134.

5. Пан В.Я. Об одновременном вычислении значений нескольких многочленов малых степеней (от двух до пяти). – ЖВМ и МФ, 1966, № 2, с.352–356.

6. Каган В.Г., Наумов А.А., Мац Г.М. Сравнение специальных схем вычисления полиномов на управляющих микроЭВМ.– Новосибирск, 1984. – 15 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 29.02.84, № 1120–84.