УДК 621.39:681.327.8

С.В.Смирнов

Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П.Королева

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИ ДИСКРЕТИЗИРОВАННОГО СИГНАЛА

Получено явное выражение для среднеквадратической ошибки кусочно-линейного восстановления формы случайно квантованного по времени сигнала. Моделью сигнала служит центрованный стационарный случайный процесс; последовательность моментов выборки отсчетов сигнала моделируется как простой рекуррентный поток.

В системах автоматизации эксперимента нередко наблюдается (в некоторых случаях специально формируется) флуктуация периода регистрации отсчетов непрерывных аналоговых сигналов. Вопросам оценки влияния стохастической дискретизации таких сигналов на качество решения задач обработки данных эксперимента посвящена обширная литература (см., например, [1-3], [7]). В предлагаемой работе получено выражение для среднеквадратической ошибки (СКО) кусочно-линейной, или полигональной, аппроксимации $\hat{s}(t)$ стохастически дискретизированного сигнала $s(t)$.

Подобные оценки в наиболее полной по затрагиваемому здесь вопросу монографии [3] представлены лишь для "физически реализуемых" способов восстановления формы сигнала, т.е. таких способов, которые предполагают возможность "мгновенного" восстановления сигнала уже в ходе его регистрации. Однако на практике весьма часто восстановление непрерывной формы сигналов выполняется лишь при вторичной обработке данных эксперимента, когда предпочтительными оказываются именно "нереализуемые" (на этапе регистрации!) способы восстановления сигналов и, в частности, кусочно-линейная интерпо-

Автоматизация научных исследований. Куйбышев, 1990.

ляция отсчетов сигнала [4]. В этом отношении применительно к случаю стохастической дискретизации сигналов известны лишь частные результаты для простейших моделей, описывающих флуктуацию интервала времени между отсчетами [7].

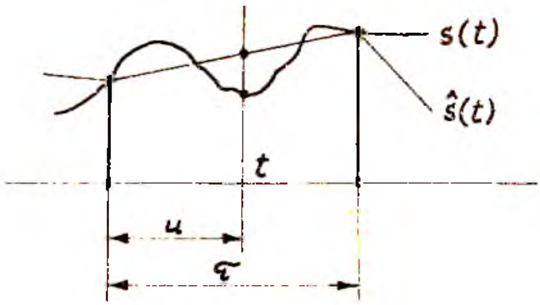
В качестве модели исходного сигнала используем стационарный случайный процесс $S(t)$ с известной автокорреляционной функцией $B_{SS}(u)$ (выбор данной модели подробно обоснован в литературе [4, 5]; такая модель дает возможность исследования стационарного режима функционирования объекта и системы автоматизации эксперимента). Интервалы квантования сигнала по времени определяются независимым от него "точечным" случайным процессом (случайной последовательностью) (τ_i), $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, таким, что для любого i с вероятностью единица $0 \leqslant \tau_i < \infty$ [7, 8]. Предполагаем, что в стационарном режиме работы системы автоматизации эксперимента указанный процесс обладает свойством стационарности. Тогда, в частности, одномерные функции распределения точечного процесса $F(\tau_i)$ равны между собой: для любого i $F(\tau_i) = F(\tau)$. Таким образом, последовательность моментов выборки отсчетов исходного сигнала представляется как простой рекуррентный поток [1, 3].

Выборка из стационарного случайного процесса $S(t)$, производимая при его амплитудно-импульсной модуляции рекуррентным потоком, образует стационарную случайную последовательность мгновенных отсчетов сигнала $S(t)$ [8]. Поэтому при использовании фиксированной процедуры восстановления непрерывной формы исходного сигнала (в частности, линейной интерполяции соседних отсчетов) получаемая оценка $\hat{S}(t)$ будет стационарным случайным процессом [1, 3, 7]. Тогда выражение для СКО восстановления формы сигнала для случая усреднения по множеству реализаций стационарных случайных процессов $S(t)$ и $\hat{S}(t)$ в произвольной точке t оси времени имеет вид

$$\sigma^2 = M\left((S_t - \hat{S}_t)^2\right) = B_{SS}(0) + B_{\hat{S}\hat{S}}(0) - 2B_{S\hat{S}}(0), \qquad (1)$$

где $B_{\hat{S}\hat{S}}(\tau)$ – автокорреляционная функция случайного процесса $\hat{S}(t)$; $B_{S\hat{S}}(\tau)$ – взаимная корреляционная функция процессов $S(t)$ и $\hat{S}(t)$.

Проведем расчет СКО σ^2 согласно предложенным моделям для случая кусочно-линейного восстановления непрерывной формы сигнала.



Р и с. Кусочно-линейное восстановление сигнала

Кусочно-линейная (полигональная) интерполяция сигнала по его дискретным отсчетам при простоте реализации обеспечивает малое отличие ошибок аппроксимации от их значений при более сложных, в том числе и оптимального линейного, способах восстановления сигнала [4, 5].

Оценка значения сигнала в произвольный момент времени t (рис.) определяется формулой

$$\hat{s}(t) = \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) s_{t-u} + \frac{u}{\tau} s_{t+\tau-u} . \qquad (2)$$

Для рекуррентного потока отсчетов закон распределения длины отрезка аппроксимации τ , на котором оказалась точка t , имеет вид [6]

$$W(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\mu} f(\tau) & \text{при } \tau \geqslant 0; \\ 0 & \text{при } \tau < 0, \end{cases} \qquad (3)$$

где $f(\tau)$ – плотность распределения величины интервала времени между событиями в рассматриваемом рекуррентном потоке; μ – математическое ожидание этой величины.

Случайные величины u и τ в формуле (2) зависимы. Условная плотность распределения обратного времени возвращения u (см. рис.) определяется выражением [6]

$$W(u/\tau)=\begin{cases} 1/\tau & \text{при } u\in(0,\tau); \\ 0 & \text{при } u\notin(0,\tau). \end{cases} \tag{4}$$

Для расчета СКО по формуле (I) необходимо найти дисперсии $B_{\hat{s}\hat{s}}(0)$ и $B_{s\hat{s}}(0)$. При проведении с целью отыскания $B_{\hat{s}\hat{s}}(0)$ операции усреднения квадрата оценки $\hat{s}_t$ по множествам реализаций всех формирующих правую часть (2) случайных величин необходимо учитывать, что $s(t)$ и τ взаимно независимы, а u зависит лишь от τ. Тогда, используя формулы (3), (4) и центрированность $s(t)$, после относительно несложных, но громоздких выкладок получаем

$$B_{\hat{s}\hat{s}}(0)=\frac{2}{3}B_{ss}(0)+\frac{1}{3\mu}\int_0^\infty u f(u)B_{ss}(u)du.$$

Аналогично определяем

$$B_{s\hat{s}}(0)=\frac{2}{\mu}\Big\{\int_0^\infty[f(\tau)\int_0^\tau B_{ss}(u)du]d\tau-\int_0^\infty[\frac{f(\tau)}{\tau}\int_0^\tau uB_{ss}(u)du]d\tau\Big\}.$$

Окончательно выражение для искомой СКО кусочно-линейной интерполяции сигнала на основании (I) примет вид

$$\sigma^2=\frac{5}{3}B_{ss}(0)+\frac{1}{3\mu}\int_0^\infty uf(u)B_{ss}(u)du-\frac{4}{\mu}\Big\{\int_0^\infty[f(\tau)\int_0^\tau B_{ss}(u)du]d\tau-\int_0^\infty[\frac{f(\tau)}{\tau}\int_0^\tau uB_{ss}(u)du]d\tau\Big\}. \tag{5}$$

Формула (5) обобщает ряд известных результатов. При $f(\tau)=\delta(\tau-T_0)$ – дельта-функция, выражение (5) обращается в соотношение для СКО полигональной интерполяции равномерно дискретизированного с периодом T_0 центрированного стационарного случайного процесса [5]. Частные следствия (5) для двух стохастических схем дискретизации: периодической с пропусками и с экспоненциальным распределением интервалов квантования – иным методом получены в работе [7]. Разумеется, результат (5) предоставляет более широкие возможности; например, если интервал дискретизации сигнала может быть описан как случайная величина с распределением Эрланга k -го порядка с параметром λ :

$$f(\tau)=\lambda\frac{(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda\tau},$$

а моделью сигнала служит центрированный стационарный случайный процесс с экспоненциальной автокорреляционной функцией

$$B_{SS}(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

то интересующая нас СКО определяется формулой

$$\delta^2=\sigma^2\left\{\frac{5}{3}+\frac{1}{3(1+U)^{k+1}}-\frac{4}{kU}\left[1-\frac{1}{(k-1)U}\left(1-\frac{1}{(1+U)^{k-1}}\right)\right]\right\},$$

где $U=\alpha/\lambda$.

Библиографический список

1. Артамонов Г.Т., Тюрин В.Д. Анализ информационно-управляющих систем со случайным интервалом квантования сигнала по времени. М.: Энергия, 1977. 112 с.

2. Билинский И.Я., Микельсон А.К. Стохастическая дискретизация непрерывных сигналов //Известия академии наук Латв. ССР. 1978. № 6(371). С. 96-101.

3. Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. М.: Радио и связь, 1982. 255 с.

4. Евдокимов В.П., Покрас В.М. Методы обработки данных в научных космических экспериментах. М.: Наука, 1977. 172 с.

5. Мановцев А.П. Основы теории радиотелеметрии. М.: Энергия. 1973. 592 с.

6. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1969. 324 с.

7. Beutler F.J., Leneman O.A.Z. Random sampling of random processes: stationary point processes // Inform. and Control. 1966. Vol. 9, N4. P. 325-346.

8. Leneman O.A.Z., Lewis J.B. Random sampling of random process: meansquare comparison of various interpolators // IEEE Trans. Automat. Control. 1966. Vol. 11, N3. P. 396-403.