

повышению помехоустойчивости (в принятом смысле). Исключением является только ступенчатая интерполяция.

ВЫВОДЫ

Сжатие измерительной информации, учитывающее функциональные (детерминированные) связи между значениями исходного сигнала на некотором отрезке времени, в случае стационарных гауссовых помех, не приводит к снижению помехоустойчивости ее передачи. Более того, при степени полинома большей или равной единице сжатие информации с учетом погрешности приводит к повышению помехоустойчивости.

При указанных ограничениях предпочтение отдается методам сжатия, основанным на кусочно-линейной аппроксимации сигналов, поскольку они обладают наибольшей помехоустойчивостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виттих В. А., Заездный А. М. Постановка задачи сжатия измерительной информации и характеристики сжимаемой информации. «Автоматика», № 1, 1968.

В. А. ГУЛЯЕВ, А. А. ЯМОВИЧ, Ю. А. СЕМЕНОЙ

ОЦЕНКИ И ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ НА ЭВМ

При исследовании сложных технических систем автоматизация эксперимента с использованием ЭВМ приобретает первостепенное значение. Естественно, при этом встает проблема создания программ обработки результатов эксперимента, которые давали бы возможность исследователю получать достоверные оценки состояния системы на фоне различных мешающих факторов.

Целью настоящей работы является получение алгоритма вычисления оценок состояния реальной САР и определение погрешностей обработки.

Вычисление коэффициентов регрессии \hat{a}_0, \hat{a}_1

Пусть измеренный на временном отрезке $[0; T]$ параметр системы* $s' = s(t, \vec{a}) = a_0 + a_1(t - T)$, зависящий от времени t и вектора информационных параметров $\vec{a}(a_0, a_1)$, искажается аддитивной

* Гуляев В. А. и др. Некоторые вопросы автоматизации анализа технических систем. См. наст. сб. стр. 160.

помехой $\xi(t)$, имеющей нормальное распределение. Корреляционная функция помехи $B_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \delta(t - \tau)$, а реализация $x(t) = s(t, \vec{a}) + \xi(t)$ задана равномерной последовательностью $x(k\Delta t)$. При линейной интерполяции $x(k\Delta t)$ внутри интервалов $[(k-1)\Delta t; k\Delta t]$ из условий минимума на отрезке $[0; n\Delta t]$ функционала

$$I = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{t=k-1}^{t=k} [x(k\Delta t) - s(k\Delta t, \vec{a})]^2 dt \right\} = \min, \quad (1)$$

и $n\Delta t = T$ получим выражения для оценок \hat{a}_0 и \hat{a}_1 вектора \vec{a}

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{n^2} \left[3 \sum_{k=1}^n k(x_k + x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n (x_k + 2x_{k-1}) \right] - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k + x_{k-1}) \quad (2)$$

$$\hat{a}_1 = \frac{2}{n^3} \left[3 \sum_{k=1}^n k(x_k + x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n (x_k + 2x_{k-1}) \right] - \frac{3}{n^2} \sum_{k=1}^n (x_k + x_{k-1}).$$

Дисперсия оценок при $n \gg 1$ определяется формулами

$$\begin{cases} D(\hat{a}_0) = [(\hat{a}_0 - a_0)^2] = \frac{4\sigma_{\xi}^2}{n}, \\ D(\hat{a}_1) = [(\hat{a}_1 - a_1)^2] = \frac{6\sigma_{\xi}^2}{n^3}. \end{cases} \quad (3)$$

Отметим, что оценки (2) эффективные, несмещенные и состоятельные.

Алгоритм выделения стационарных участков

Все модели сигналов системы, представленной на рис. 1, справедливы лишь на стационарных участках. Поэтому необходимым этапом при анализе параметров системы является фиксация граничных точек стационарности. В [1], [2] описаны интегральные критерии фиксации аппроксимирующих отрезков, однако такой подход оправдан лишь в тех случаях, когда отсутствует другая информация о системе. Обычно же при анализе реальных технических систем имеется достаточно полный объем информации (известны математическое ожидание

$$M \left\{ \frac{V^y}{T} \right\} = m'_s [1],$$

закон распределения этой случайной функции и корреляционная функция). Поэтому, согласно [1], (формулы 5, 6)

$$\hat{c} \frac{H \sum_{i=1}^2 V^i}{kl} \leq \hat{a}_1 [n' \Delta t], \quad (4)$$

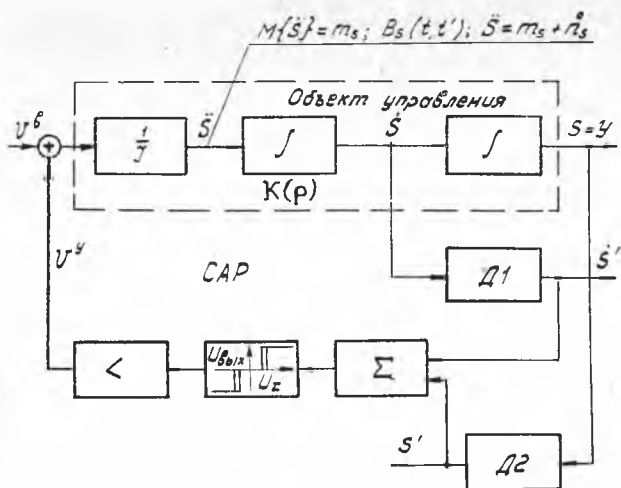


Рис. 1. Система автоматического регулирования

где \hat{c} — оценка коэффициента, учитывающего вероятностные характеристики левой и правой частей (4);
 $[0, n' \Delta t]$ — отрезок оценки $\hat{a}_1 [n' \Delta t]$ по (2);
 H, k — параметры датчика Д1 (рис. 1), обладающего передаточной функцией [1]

$$W(p) = \frac{H}{Lp^2 + hp + k}$$

При этом выбор оценки \hat{c} ведется из условия выполнения неравенства (4) с заданной вероятностью. Так как V^b (рис. 1) является кусочно-постоянной функцией времени, то в окрестности границы соседних стационарных участков j и $j+1$ [1] должно выполняться условие

$$|\hat{a}_1 [n' \Delta t, j+1] - \hat{a}_1 [n' \Delta t, j]| \geq \hat{c} \frac{HV^y}{kI} \quad (5)$$

Таким образом, очевиден алгоритм предварительной оценки границ стационарности, заключающийся в вычислении по последовательности $x(k\Delta t)$ скользящей разности

$$|\hat{a}_1 (n' \Delta t, k) - \hat{a}_1 [n' \Delta t, k+n']| \quad (k=0, 1 \dots M),$$

причем эти оценки вычисляются на соприкасающихся отрезках. В случае выполнения условия (5) фиксируется ориентировочная область границы стационарности, а уточненная граница N_j от-

носительно начала отсчета $k\Delta t=0$ вычисляется следующим образом:

$$\hat{N}_j = t_0 [j] - \frac{\hat{a}_0 [n_{j+1}; j+1] - \hat{a}_0 [n_j; j] - m\hat{a}_1 [n_{j+1}; j+1]}{\hat{a}_1 [n_{j+1}; j+1] - \hat{a}_1 [n_j; j]}, \quad (6)$$

где m — разность временных дат между оценками $\hat{a}_0 [n_{j+1}, j+1]$ и $\hat{a}_0 [n_j; j]$;

$t_0 [j]$ — временная дата оценки $\hat{a}_0 [n_j; j]$ относительно начала отсчета $k\Delta t=0$;

$n_j; n_{j+1}$ — количество отсчетов на j и $j+1$ отрезках соответственно.

Закон распределения момента излома кусочно-линейной функции

Закон распределения оценки $\hat{N}'_j = \hat{N}_j - t_0 [j]$ из (6) в случае нормальных распределений некоррелированных оценок числителя и знаменателя (6) с математическими ожиданиями $b_1; b_2$ и дисперсиями $\sigma_1; \sigma_2$ соответственно согласно [4]

$$W(\hat{N}'_j) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \hat{N}'_j{}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} [b_1^2 \sigma_2^2 + b_2^2 \sigma_1^2] \right\} \times \\ \times \left[1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{\frac{z^2}{2}} \Phi \left(\sqrt{\frac{z}{\sqrt{2}}} \right) \right] \quad (7)$$

где $z = \frac{b_2 \sigma_1^2 + b_1 \sigma_2^2 \hat{N}'_j}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\sigma_2^2 \hat{N}'_j{}^2 + \sigma_1^2}}$,

$\Phi = \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right)$ — функция Крампа.

Погрешности измерения параметра \dot{S} системы

В реальной ситуации функция

$$\dot{S} = \frac{\sum_{i=1}^2 V^i}{J}$$

(рис. 1) является случайной. Случайную функцию s , стационарную, с нормальным распределением и математическим ожиданием m_s можно представить в виде интегрального канонического разложения в области $|t| < \infty$ [3]

$$\dot{s} = m_s + \dot{n}_s = m_s + \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) n(t, \omega) d\omega \quad (8)$$

Исходя из физики объекта управления, полагаем, что корреляционная функция процесса S описывается выражением

$$B_s(t, t') = \sigma^2 e^{-\beta|t-t'|}. \quad (9)$$

При этом на вход датчика Д1 (рис. 1) при нулевых начальных условиях [1] на отрезке $[0, 1]$ поступает случайное воздействие $X(t)$

$$X(t) = m_s t + \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) x(t, \omega) d\omega = S_{\text{вх}}(t) + \overset{\circ}{x}(t), \quad (10)$$

где $0 \ll t \ll T$.

Так как реальный объект управления не является для процесса n_s идеальным интегратором, а имеет передаточную функцию $K(p) = \frac{\alpha}{\alpha+p}$, то выходной случайный процесс $x^o(t)$ согласно [5] обладает корреляционной функцией

$$B_x(t, t') = \frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha e^{-\beta|t-t'|} - \beta e^{-\alpha|t-t'|}] \quad (11)$$

и спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{\alpha^2 \beta \sigma^2}{\pi(\alpha^2 - \beta^2)} \left[\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} \right]. \quad (12)$$

На выходе датчика Д1 в установившемся режиме ($t \rightarrow \infty$) имеет место сигнал $y(t) \div y(j\omega)$

$$y(j\omega) = W(j\omega) \left[\frac{m_s}{j\omega} + \overset{\circ}{x}(j\omega) \right]. \quad (13)$$

Ошибка измерения входного сигнала $X(t)$ в частотной области может быть записана:

$$\delta x = y(j\omega) - \frac{H}{k} S_{\text{вх}}(j\omega) = H \left\{ \left[\frac{1}{k - L\omega^2 + jh\omega} - \frac{1}{k} \right] \times \right. \\ \left. \times S_{\text{вх}}(j\omega) + \frac{\overset{\circ}{x}(j\omega)}{k - L\omega^2 + jh\omega} \right\} \quad (14)$$

и состоит из динамической $\delta_{\text{дл}}x$ и случайной $\delta_{\text{сл}}x$

$$\begin{cases} \delta_{\text{дл}} x = H \left[\frac{1}{k - L\omega^2 + jh\omega} - \frac{1}{k} \right] \frac{m_s}{j\omega} \\ \delta_{\text{сл}} x = \frac{H}{k - L\omega^2 + jh\omega} \overset{\circ}{x}(j\omega) \end{cases} \quad (15)$$

Спектральные плотности составляющих ошибок можно соответственно представить

$$\begin{cases} S_{\text{дл}}(\omega) = \frac{H^2 (L^2 \omega^4 + h^2 \omega^2) m_s^2}{[(k - L\omega^2)^2 + h^2 \omega^2] \omega^2} \\ S_{\text{сл}}(\omega) = \frac{H^2}{(k - L\omega^2)^2 + h^2 \omega^2} S_x(\omega) \end{cases} \quad (16)$$

Так как составляющие ошибки $\delta_{дх}$ и $\delta_{слх}$ статистически независимы, то

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_{д}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{сл}(\omega) d\omega, \quad (17)$$

$$B_y(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 e^{j\omega(t-t')} d\omega. \quad (18)$$

Формулы (17), (18) справедливы для моментов времени t , достаточно удаленных от начального момента, практически для $t > \frac{6L}{n}$. Для вычисления дисперсий случайной функции $y(t)$ в произвольные моменты времени необходимо определить координатную функцию интегрального канонического разложения $y(t, \omega)$ путем интегрирования при нулевых начальных условиях дифференциального уравнения

$$Ly''(t, \omega) + hy'(t, \omega) + ky(t, \omega) = He^{j\omega t}. \quad (19)$$

Решением (19) является

$$y(t, \omega) = \frac{H}{k - L\omega^2 + jh\omega} \left[e^{j\omega t} + \frac{(\lambda_2 - j\omega) e^{\lambda_1 t} - (\lambda_1 - j\omega) e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right], \quad (20)$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$L\lambda^2 + h\lambda + k = 0. \quad (21)$$

При этом отметим, что датчик Д1 является асимптотически устойчивой системой

$$\mu > 0; \quad \lambda_1 = -\mu + j\gamma; \quad \lambda_2 = -\mu - j\gamma.$$

Учитывая вышеизложенное, получим

$$\begin{aligned} B_y(t, t') = & \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) y(t, \omega) \overline{y(t', \omega)} d\omega = \frac{2\alpha^2 \beta H^2 \sigma^2}{\pi(\alpha^2 - \beta^2)} \times \\ & \times \int_0^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} \right] \frac{\left[\left(\cos \omega t - \frac{\mu}{\gamma} e^{-\mu t} \sin \gamma t - e^{-\mu t} \cos \gamma t \right) \right. \right. \\ & + j \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\gamma} e^{-\mu t} \sin \gamma t \right) \left. \left. \right] \left[\left(\cos \omega t' - \frac{\mu}{\gamma} e^{-\mu t'} \sin \gamma t' - e^{-\mu t'} \cos \gamma t' \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + j \left(\frac{\omega}{\gamma} e^{-\mu t'} \sin \gamma t' - \sin \omega t' \right) \right] \right\} d\omega. \quad (22) \end{aligned}$$

Заметим, что (22) является характеристикой нестационарного процесса $y(t)$, который можно считать стационарным лишь для t , достаточно удаленных от начального момента $t=0$.

Погрешности алгоритма и вычисление оценки \hat{c} (5)

Вычисление дисперсий оценок алгоритма (5) $\hat{a}_1 [n' \Delta t; j]$ и $\hat{a}_1 [n' \Delta t; j+1]$ по выражениям (2), (18) и (2), (22) не представляет принципиальной трудности. Обозначим эти дисперсии через $D[\hat{a}'_1(j)]$ и $D[\hat{a}'_1(j+1)]$, а коэффициент корреляции между $\hat{a}'_1[n' \Delta t, j]$ и $\hat{a}'_1[n' \Delta t, j+1]$ — $r_{j,j+1}$. В присутствии аддитивной помехи $\xi(t)$ на основании (3) и некоррелированности процессов n_s и $\xi(t)$ суммарные дисперсии будут соответственно

$$D_a[j] = D[\hat{a}'_1(j)] + \frac{6\sigma_{\xi}^2}{n'^3},$$

$$D_a[j+1] = D[\hat{a}'_1(j+1)] + \frac{6\sigma_{\xi}^2}{n'^3}. \quad (23)$$

Дисперсия левой части (5) на границе стационарности

$$D[\Delta \hat{a}'_1] = D_a[j] + D_a[j+1] - 2r_{j,j+1} \sqrt{D[\hat{a}'_1(j)] \cdot D[\hat{a}'_1(j+1)]}. \quad (24)$$

Дисперсия правой части (5) — $M^2 \left\{ \frac{\partial y}{I} \right\} = \sigma_2^2$

$$\sigma_2^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{n'} + \frac{2}{n'^2} \sum_{k < l} r_{lk} \right] + \frac{4\sigma_{\xi}^2}{n'}, \quad (25)$$

где $r_{lk} = l^{-\beta|k-l| \Delta t}$.

Вычислим оценку \hat{c} , исходя из условия выполнения неравенства (5) с заданными вероятностями $p_{\Phi, \Gamma}$ и $p_{\Gamma, \Phi}$ при наличии и отсутствии границы стационарности. Исходя из вышеизложенного, при выборе $\hat{c} = 1 - \delta$ заданная вероятность ложной фиксации должна удовлетворять неравенству

$$p_{\Gamma, \Phi} \geq \int_{1-\delta}^{\infty} W_1(\hat{c}) d\hat{c} + \int_{-\infty}^{\delta-1} W_1(\hat{c}) d\hat{c}, \quad (26)$$

где $W_1(\hat{c})$ — определяется выражением (7), в котором

$$b_1 = 0; \quad b_2 = m'_s; \quad \hat{N}'_j = \hat{c}; \quad \sigma_1 = \sqrt{D[\Delta \hat{a}'_1]},$$

δ_2 — определяется на основании (25). Заданная вероятность фиксации при $\hat{c} = 1 - \delta$ должна удовлетворять

$$p_{\Phi, \Gamma} \leq \int_{1-\delta}^{\infty} W_2(\hat{c}) d\hat{c} + \int_{-\infty}^{\delta-1} W_2(\hat{c}) d\hat{c}, \quad (27)$$

где $W_2(\hat{c})$ — определяется выражением (7), в котором

$$b_1 = \frac{Hm'_s}{k}; b_2 = m'_s; \hat{N}_j = \hat{c},$$

δ_1 и δ_2 — те же, что и в (26).

Очевидно, что для удовлетворения условиям (26), (27) при заданных искажениях можно варьировать отрезком построения текущих оценок $\hat{a}_1 [n'\Delta t]$ — $[0; n'\Delta t]$ с учетом закона распределения длин временных отрезков, на которых система является стационарной.

Экспериментальные данные

По алгоритмам (2), (5), (6) с учетом (26), (27) на ЭВМ «М—20» была проведена обработка искаженной помехами информации с параметрами

$$n' = 18; \hat{c} = 0,75 \div 0,8; M = 1200; \Delta t = 10 \text{ м/сек.}$$

Полученные экспериментальные характеристики хорошо согласуются с реальными, помехоустойчивость алгоритма достаточно высокая.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены реализованные на ЭВМ алгоритмы оценки состояния объекта управления САР и выделения временных стационарных участков для процессов, протекающих в системе. Приводятся статистические характеристики погрешностей определения основных оценок алгоритмов, позволяющие судить о их помехоустойчивости в присутствии искажений в системе и флуктуационных помех. Предложенные алгоритмы могут быть использованы при решении задач обработки информации для последующего анализа функционирования систем с использованием ЭВМ измерительно-вычислительных комплексов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виттих В. А. Адаптивная дискретизация измеряемой величины с использованием метода наименьших квадратов. «Автометрия», № 4, 1969.
2. Виттих В. А., Якимиха В. П. Алгоритмы вычисления погрешности кусочно-линейной аппроксимации. Сб. «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок». Вып. 3. Труды республиканской научной конференции «Автоматическое управление технологическими процессами в различных отраслях народного хозяйства», Куйбышев, 1970.
3. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задаче автоматического управления. Изд. ФМЛ, М., 1960.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники, книга 1. Изд. «Сов. радио», М., 1969.