

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ С ЦЕЛЬЮ СОКРАЩЕНИЯ ЕЕ ОБЪЕМА

Проблема сокращения объема сигналов возникла сравнительно давно в области связи. С развитием дистанционного управления и телеметрии эта проблема возникла и в измерительной технике, так как полученные обычным образом измерительные сигналы, несут в себе значительное количество излишней, ненужной получателю информации. Особенно необходима операция сжатия данных при работе с большими потоками информации в сложных телеизмерительных системах и в современных системах централизованного контроля.

Все известные методы уменьшения объема измерительных сигналов [1] основаны на дифференцировании сигнала и при обработке реальных сигналов оказываются неэффективными. В связи с этим задача создания помехоустойчивых алгоритмов обработки измерительной информации с целью сокращения ее объема является актуальной.

Уменьшение объема измерительного сигнала может производиться по следующей общей схеме.

Непрерывно вычисляется текущая функция приближения $\varphi(t)$ сигнала $f(t)$ и величина ошибки аппроксимации

$$\varepsilon(t) = f(t) - \varphi(t).$$

Момент, когда текущая ошибка аппроксимации станет равна допустимой ε_d .

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_d$$

определяется конец интервала аппроксимации.

В этот момент получателю информации выдаются параметры приближающей функции $\varphi(t)$ (в частности, коэффициенты разложения сигнала $f(t)$ в ряд по некоторым базисным функциям) и величина интервала аппроксимации T .

Такую схему устранения избыточности обычно называют неравноотстоящей (адаптивной) дискретизацией.

Поскольку реальные сигналы всегда сопровождаются помехами, то дискретизаторы должны обладать фильтрующими свойствами и быть помехоустойчивыми. Поэтому в качестве базисных функций разложения целесообразно использовать полиномы метода наименьших квадратов, среди которых мы выбрали ортогональные полиномы Лежандра [2].

В данной работе рассматривается принцип построения алгоритмов неравноотстоящей дискретизации, основанных на использовании полиномов Лежандра.

Преимущество полиномов Лежандра $X_i(x)$ ортогональных с весом $\rho(x)=1$ на отрезке $[-1, 1]$ перед другими полиномами метода наименьших квадратов (например, полиномами Чебышева 1 и 2 рода) заключается в простоте вычисления коэффициентов разложения $\frac{2^{i+1}}{2}$ функции $f(x)$ в ряд Фурье-Лежандра

$$c_i = \{c_i\}_{i=0}^n = 0 \int_{-1}^1 f(x) X_i(x) dx. \quad (1)$$

Однако полиномы Лежандра в классе ортогональных обладают не самыми лучшими приближающими свойствами. Полиномы Чебышева, ортогональные с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на отрезке $[-1, 1]$, выгодно отличаются от полиномов Лежандра тем, что погрешности приближения оказываются распределенными наилучшим образом, равномерно по всему интервалу.

Если мы хотим выяснить характер распределения погрешностей приближения функции $f(x)$ n -ным отрезком

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i X_i(x)$$

формального разложения $f(x)$ в ряд Фурье-Лежандра, то не будет большой ошибкой оценка этой погрешности первым опущенным членом ряда [3].

Тогда погрешность $\varepsilon_{n+1}(x)$ конечного разложения в $n+1$ членов будет приближенно равна

$$\varepsilon_{n+1}(x) = c_{n+1} X_{n+1}(x).$$

Функция $X_{n+1}(x)$ колеблется около нуля с изменяющимися амплитудами. Амплитуды постоянно возрастают при переходе через середину интервала и достигают максимума 1 в обеих конечных точках $x = \pm 1$. Следовательно, погрешность неравномерно распределена по всему интервалу и максимальная в его концах. Для обеспечения того, чтобы ошибка $\varepsilon_{n+1}(x)$ не превысила допустимой ε_d в крайних точках $x = \pm 1$, нам придется расплатиться боль-

шим числом членов ряда, ибо мы получаем их больше, чем нужно внутри интервала. Однако это на первый взгляд неприятное обстоятельство можно выгодно использовать для контроля максимальной погрешности приближения.

Так как погрешность

$$\varepsilon(x) = f(x) - \sum_{i=0}^n c_i X_i(x), \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

максимальна в концах интервала, то для ее контроля достаточно вычислить значения

$$\begin{aligned} \varepsilon(-1) &= f(-1) - \sum_{i=0}^n c_i X_i(-1), \\ \varepsilon(1) &= f(1) - \sum_{i=0}^n c_i X_i(1). \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая, что $X_i(-1) = (-1)^i$, $X_i(1) = 1$; ($i = 0, 1, \dots, n$), выражение (2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(-1) &= f(-1) - \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i, \\ \varepsilon(1) &= f(1) - \sum_{i=0}^n c_i. \end{aligned}$$

Таким образом контроль погрешности сводится к сравнению значения функции $f(x)$ в точке $x = -1$ с величиной $\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i$, а значения $f(x)$ в точке $x = 1$ с алгебраической суммой коэффициентов $\sum_{i=0}^n c_i$. Коэффициенты разложения вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{2i+1}{2} [f^{(-1)}(1) X_i(1) - f^{(-2)}(1) X_i^{(1)}(1) + \dots + \\ &\quad + (-1)^i f^{(-i-1)}(1) X_i^{(i)}(1)], \end{aligned}$$

где $X_i^{(j)}(1)$ - j -ая производная полинома Лежандра i -ой степени в точке $x = 1$,

$$f^{(-i)}(x) = \int_{-1}^x f^{(-i+1)}(\xi) d\xi.$$

получающейся интегрированием по частям (1) и удобной тем, что необходимо знать значения полиномов и их производных только в точке $x = 1$. Процесс вычисления по этой формуле сводится к умножению вектора

$$[f^{(-1)}(1), -f^{(-2)}(1), \dots, (-1)^i f^{(-i-1)}(1)] \quad (3)$$

на матрицу

$$\begin{bmatrix} x_0(1), & 0 & , & \dots & , & 0 \\ x_1(1), & x_1^{(1)}(1) & , & \dots & , & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i(1), & x_i^{(1)} & , & \dots & , & x_i^{(i)}(1) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

которая известна заранее.

Произвольный отрезок $[0, T]$ может быть приведен к отрезку $[-1, 1]$ простой заменой переменной по формуле

$$x = \frac{2}{T}t - 1,$$

то есть по существу мы производим деформацию интервала времени в $\frac{2}{T}$ раз.

Очевидно,

$$f^{(-i)}(1) = \int_{-1}^1 f^{(-i+1)}(x) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f^{(-i+1)}(t) dt.$$

На рис. 1 представлена функциональная схема адаптивного дискретизатора, основанного на использовании ортогональных полиномов Лежандра, с контролем ошибки приближения по методу, изложенному выше.

Непрерывный сигнал $f(t)$ в момент $t=0$ начинает поступать на интегрирующее устройство I_1 . В этот же момент запускается генератор пилообразного напряжения ГПН и запоминается значение сигнала $f(-1)$ в ячейке памяти ЯП.

Напряжение с выхода I_1 поступает на вход I_2 , а с выхода I_2 на вход I_3 и так далее до $n+1$ -го интегрирующего устройства I_{n+1} .

Напряжение, равное $\frac{2}{T}$, с выхода функционального преобразователя ФП умножается в блоках умножения $БУ_1, БУ_2, \dots, БУ_{n+1}$ соответственно на величины $\int_0^1 f(t) dt, \int_0^1 f^{-1}(t) dt, \dots, \int_0^1 f^{(-n)}(t) dt$, поступающие с интеграторов I_1, I_2, \dots, I_{n+1} . С выходов блоков умножения $БУ_1, БУ_2, \dots, БУ_{n+1}$ напряжения, равные $f^{(-1)}_{(1)}, f^{(-2)}_{(1)}, \dots, f^{(-n-1)}_{(1)}$, поступают на матричную пересчетную схему МПС, где происходит умножение вектора (3) на матрицу (4). На выходе матричной пересчетной схемы получаем набор коэффициентов c_0, c_1, \dots, c_n .

Коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_n поступают на сумматор Σ_1 , на выходе которого получается величина $\sum_{i=0}^n c_i$. На вход сумматора Σ_2 все нечетные коэффициенты поступают с обратными знаками и на выходе Σ_2 мы, следовательно, получаем величину $\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i$.

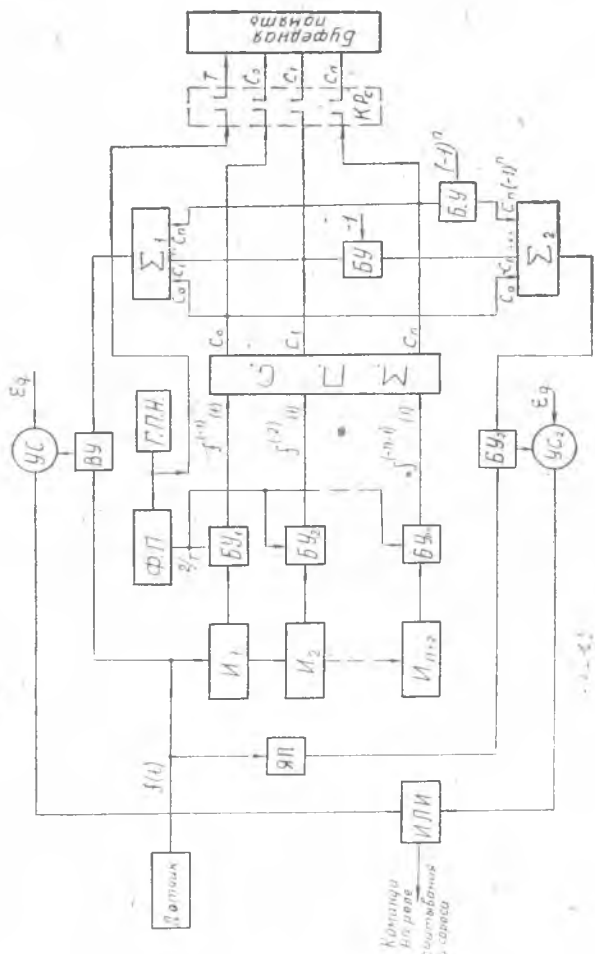


Рис. 1. $КР_5$ — контакты реле считывания.

В вычитающих устройствах $ВУ_1$ и $ВУ_2$ вычисляются ошибки $\varepsilon(1)$ и $\varepsilon(-1)$ соответственно. В устройствах сравнения $УС_1$ и $УС_2$ эти ошибки сравниваются с допустимой ε_d , и если хотя бы в одном из них нарушается условие $\varepsilon_d \geq \varepsilon(\pm 1)$, то на выходе схемы ИЛИ вырабатывается команда, по которой значения c_0, c_1, \dots, c^n и T запоминаются в буферной памяти, а все элементы схемы возвращаются в начальное состояние.

При построении схемы дискретизатора мы исходили из предположения, что погрешность приближения может быть максимальной в точке $x=1$ и в точке $x=-1$, поэтому контроль погрешности осуществлялся в обеих крайних точках интервала аппроксимации. Это предположение справедливо для значительного числа.

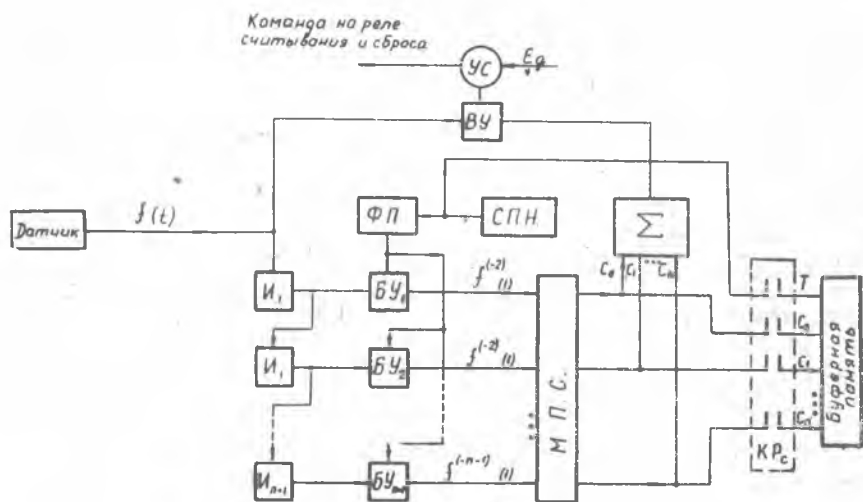


Рис. 2.

В случае эмпирических функций (функций с помехой) погрешность аппроксимации максимальная в точке $x=1$, так как выбор интервала аппроксимации определяется в основном появлением помехи на правом его конце (в точке $f(T)=f(1)$ в отличие от аналитических функций, для которых выбор интервала определяется только приближающими свойствами аппроксимирующего полинома.

Учитывая вышесказанное, рассмотренную схему адаптивного дискретизатора (рис. 1) можно упростить, осуществляя контроль погрешности лишь в точке $x=1$ (рис. 2). Такое упрощение является существенным с практической точки зрения, поскольку использование запоминающих устройств всегда нежелательно (аналоговых ЗУ — из соображений точности, цифровых — из-за сложности и дороговизны).

Применение упрощенного варианта адаптивных дискретизаторов оказывается все более обоснованным по мере уменьшения отношения «сигнал/помеха». Особенно это относится к случаю, когда помеха характеризуется наличием выбросов (такую помеху часто называют аномальной). Тогда преимущества дискретизатора (рис. 2) очевидны. Кроме известных упрощений в схеме, он превосходит дискретизатор (рис. 1) по помехоустойчивости. Это объясняется следующим: если выброс сигнала, обусловленный наличием помехи, оборвал интервал аппроксимации в некоторый момент времени, то при первом способе дискретизации выброс снова будет учитываться при контроле погрешности приближения, что приведет к уменьшению следующего интервала аппроксимации и, следовательно, к уменьшению коэффициента сжатия.

Анализ результатов обработки информации по приведенным алгоритмам на ЭЦВМ полностью подтвердил высказанные теоретические предложения.

В таблицах 1 и 2 приведены коэффициенты сжатия k и вероятности ошибок, превышающих допустимую $pf\epsilon > \epsilon_d$ для различных отношений «сигнал/помеха» v .

Таблица 1

Максимальная степень аппроксимирующего полинома	Алгоритм с контролем погрешности в точке $x = 1$		Алгоритм с контролем погрешности в точках $x = -1$ и $x = 1$	
	k_1	$p_1(\epsilon > \epsilon_d)$	k_2	$p_2(\epsilon > \epsilon_d)$
$n = 1$	14	0,040	8,8	0,032
$n = 2$	14	0,022	8,4	0,016
$n = 3$	14	0,020	8	0,013

Таблица 2

Максимальная степень аппроксимирующего полинома	Алгоритм с контролем погрешности в точке $x = 1$		Алгоритм с контролем погрешности в точках $x = 1$ и $x = -1$	
	k_1	$p_1(\epsilon > \epsilon_d)$	k_2	$p_2(\epsilon > \epsilon_d)$
$n = 1$	12,8	0,042	6,6	0,037
$n = 2$	12	0,026	4,6	0,023
$n = 3$	11,6	0,022	4,2	0,017

Под коэффициентом сжатия k мы понимаем величину

$$k = \frac{G}{Q},$$

где G — число двоичных символов, необходимое для описания сигналов, дискретизированных в соответствии с теоремой Котельникова;

Q — число двоичных символов, необходимое для описания сигналов (с учетом информации об интервалах аппроксимации), дискретизированных по приведенным алгоритмам.

Сравнивая полученные результаты, мы видим, что при контроле погрешности в двух точках при некотором уменьшении числа ошибок, превосходящих допустимую, уменьшаются коэффициенты сжатия k .

При уменьшении отношения «сигнал/помеха» наблюдается уменьшение разности $p_1 - p_2$, в то время как разность коэффициентов сжатия $k_1 - k_2$ увеличивается. Другими словами, упрощенный алгоритм дискретизации обладает большей помехоустойчивостью, чем алгоритм, предусматривающий контроль погрешности приближения в обеих крайних точках интервала аппроксимации.

Сравнительно большая величина p ($\epsilon > \epsilon_d$) объясняется тем, что в связи с трудностями, возникающими при программировании для ЭЦВМ, алгоритмы дискретизации были организованы таким образом, что аппроксимация начиналась с некоторого фиксированного интервала. Из-за наличия высокочастотной помехи уже на этом минимальном отрезке аппроксимации возникают погрешности, превышающие допустимые.

Таким образом, следует отдать предпочтение упрощенному алгоритму неравноотстоящей дискретизации в связи с его простотой и большей помехоустойчивостью по сравнению с алгоритмом, предусматривающим контроль погрешности в обоих концах интервала.

Предлагаемые в работе алгоритмы дискретизации могут быть использованы при построении устройств уменьшения объема телеметрической информации. В отличие от всех существующих алгоритмов дискретизации, связанных с дифференцированием сигнала и использующих степени аппроксимирующих полиномов не выше первой, приведенные алгоритмы позволяют аппроксимировать сигнал полиномами любых степеней и обладают большей помехоустойчивостью, так как они основаны на интегрировании сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Виттих, А. Н. Гинзбург, Ю. П. Дробышев. Методы уменьшения объема измерительных сигналов. Труды 6-ой Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений. Новосибирск, 1966.

2. В. А. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. ОНТИ — ГТИ, 1934.

3. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.