

А. Ф. Бочкарев, Я. А. Мостовой

## МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В работе [1] показано, что для колебательных САУ применение функций чувствительности для оценки влияния параметров САУ, входящих в собственные частоты колебательных составляющих, на переходный процесс наталкивается на определенные трудности, связанные с неприемлемым уменьшением точности приближенного решения при «немалых» вариациях параметров.

Поскольку большинство практических задач приводит именно к «немалым» вариациям, представляют интерес те методы оценки влияния параметров САУ на переходные процессы, которые позволили бы, сохраняя простоту и наглядность функций чувствительности, получить достаточную точность приближенного решения.

В данной статье рассматривается метод вычисления модифицированной функции чувствительности ( $\tau$  — функции чувствительности), основанный на преобразовании исходной системы к новому аргументу и позволяющий в несколько раз увеличить точность приближенного решения для колебательных САУ или же при заданной его точности увеличить допустимые вариации параметров.

### Метод модифицированных функций чувствительности ( $\tau$ -функций чувствительности)

Как показано в работе [1], основной причиной роста ошибки приближения при увеличении вариации параметров САУ, входящих в собственные частоты, согласно методу вычислений функций чувствительности [2, 3, 4] является накопление разности фаз колебательных составляющих точного и приближенного решения из-за их разночастотности.

Средством, обеспечивающим «одночастотность» колебательных составляющих точного и приближенного решений, может стать преобразование опорной системы дифференциальных уравнений к новому аргументу путем подстановки типа

$$\tau = f(C_1, \dots, C_k, \dots, C_m, \Delta C_1, \dots, \Delta C_k, \dots, \Delta C_m, t). \quad (1)$$

При надлежащем выборе функции  $f(C_1, \dots, C_m, \Delta C_1, \dots, \Delta C_m, t)$  приближенное решение будет обладать новыми свойствами, которые позволяют получить ошибку приближения меньшую, чем определяемую из выражения (9), приведенного в [1]. В конкретных случаях функция  $f(C_1, \dots, C_m, \Delta C_1, \dots, \Delta C_m, t)$  может иметь сравнительно простой вид в соответствии с физическим смыслом задачи. Так, для колебательных САУ второго порядка с малым относительным демпфированием имеет смысл определить  $\tau$  в виде

$$\tau = \omega t. \quad (2)$$

В этом случае переходные процессы в САУ строятся в функции числа периодов собственных колебаний, прошедших с момента начала процесса.

В статье [6] показано, что для большинства практически важных случаев исходную систему дифференциальных уравнений САУ можно преобразовать к нормальным обобщенным координатам таким образом, чтобы дифференциальные уравнения САУ относительно этих координат записались в виде системы независимых уравнений 2-го порядка. Поэтому изложение, как и в [1], будет вестись на примере уравнения 2-го порядка, учитывая наглядность получаемых при этом результатов.

Метод преобразования к новому аргументу опорной системы рассмотрим сначала на примере консервативного звена.

В табл. 1 приведены результаты решения точного, приближенного и опорного уравнений и уравнения ошибки для данного случая.

Таблица 1

	Дифференциальное уравнение	Решение уравнения
1. Опорное уравнение	$\ddot{X}_\tau + X_\tau = \frac{M_n}{\omega^2}$	$X_\tau = \frac{M_n}{\omega^2} (1 - \cos \tau)$
2. Уравнение функции чувствительности	$\ddot{W}_{X_\tau} \Delta \omega^2 + W_{X_\tau} \Delta \omega^2 = -\frac{M_n}{\omega^4}$	$W_{X_\tau} \Delta \omega^2 = -\frac{M_n}{\omega^4} (1 - \cos \tau)$
3. Приближенное решение	$\ddot{\tilde{X}}_{\tau \text{ пр}} = X_\tau + W_{X_\tau} \Delta \omega^2 \cdot \Delta \omega^2$	$\tilde{X}_{\tau \text{ пр}} = \frac{M_n}{\omega^2} (1 - \delta \omega^2) (1 - \cos \tau)$
4. Варьируемое уравнение	$\ddot{\tilde{X}}_\tau + \tilde{X}_\tau = \frac{M_n}{\omega^2 (1 + \delta \omega^2)}$	$\tilde{X}_\tau = \frac{M_n}{\omega^2 (1 + \delta \omega^2)} (1 - \cos \tau)$
5. Абсолютная ошибка приближения	$\varepsilon = \tilde{X}_\tau - \tilde{X}_{\tau \text{ пр}}$	$\varepsilon = \frac{(\delta \omega^2)^2}{1 + \delta \omega^2} \cdot \frac{M_n}{\omega^2} (1 - \cos \tau)$
6. Относительная ошибка приближения	$\delta \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\tilde{X}_\tau}$	$\delta \varepsilon = (\delta \omega^2)^2$

Из таблицы видно, что ошибка приближения и функция чувствительности, в отличие от ранее рассмотренного случая, устойчивы, чему соответствуют только простые полюсы в их изображении по Лапласу [1].

Относительная величина ошибки приближения постоянна, гораздо меньше, чем в случае [1], и определяется квадратом относительной вариации  $\omega^2$ .

Рассмотрим также уравнение 2-го порядка с демпфированием. Используя для него подстановку (1) и учитывая [1], имеем изображение  $\tau$ -функции чувствительности.

$$L(W_{x\tau}^{\Delta\omega^2}) = -\frac{L(M_B)P^2 + 0,5\frac{h}{\omega}P + 1}{\omega^4 \left(P^2 + \frac{h}{\omega}P + 1\right)^2}. \quad (3)$$

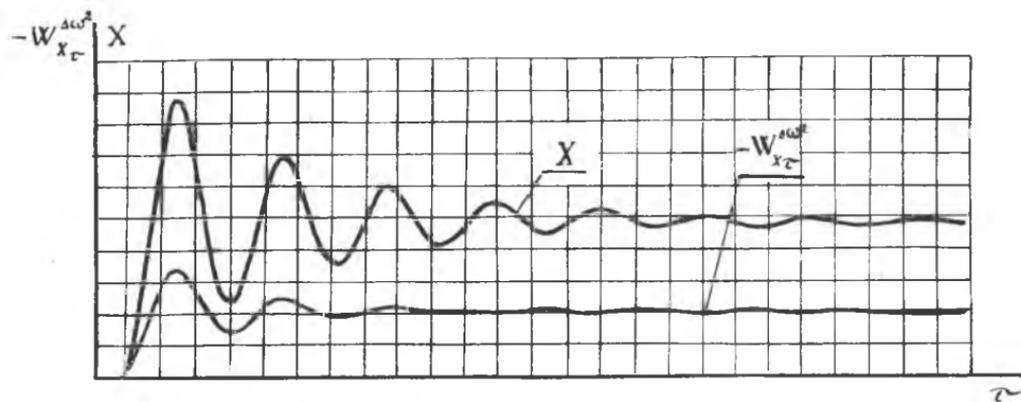


Рис. 1

На рис. 1 приведено решение уравнения второго порядка, преобразованного к новому аргументу  $\tau$ , там же приведена  $\tau$ -функция чувствительности.

На рис. 2 даны точное и приближенное решение варьируемой системы, а также ошибка приближения.

Как видно из выражения (3),  $\tau$ -функция чувствительности, в отличие от ранее рассмотренного случая [1], имеет большее затухание, чем опорный процесс, при любых параметрах опорной системы, что подтверждается численными расчетами (рис. 1).

Изображение ошибки приближения имеет вид

$$L(\varepsilon) = L(X) \left[ \frac{P^2 + \frac{h}{\omega} P + 1}{P^2 + \frac{h}{\omega} \sqrt{\frac{1}{1 + \delta\omega^2}} P + 1} \cdot \frac{1}{1 + \delta\omega^2} - \left( \frac{P^2 + \frac{h}{\omega} \frac{1 - 0,5\delta\omega^2}{1 - \delta\omega^2} P + 1}{P^2 + \frac{h}{\omega} P + 1} \right) (1 - \delta\omega^2) \right], \quad (4)$$

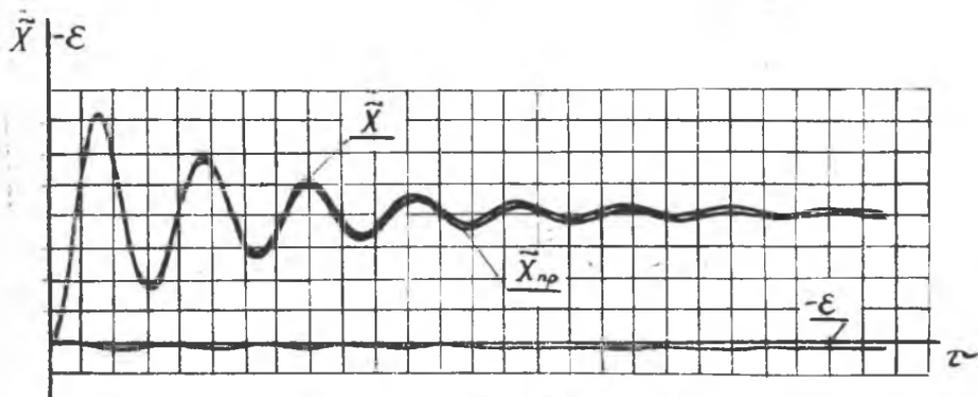


Рис. 2

Используя теорему о конечном значении и рассматривая установившуюся ошибку для выражения (4), имеем

$$\varepsilon_{уст} = (\delta\omega^2)^2 \tilde{X}_{уст}. \quad (5)$$

Сравнивая (5) и полученное ранее выражение из [1], убеждаемся, что установившаяся ошибка приближения в обоих случаях одинакова. Однако мгновенные значения ошибки приближения в случае применения  $\tau$ -функций чувствительности меньше, чем для предыдущего случая при прочих равных условиях, на что указывает как вид выражения (4), так и выражение для показателя колебательности, которое в данном случае записывается

$$\mu \approx \frac{\frac{3}{8} + \frac{1}{16} \delta\omega^2}{\frac{h}{\omega} \sqrt{1 - \frac{3}{16} \cdot \frac{h^2}{\omega^2}}}. \quad (6)$$

Расчет по выражению (6) показывает — при тех же значениях параметров, что и для случая, рассмотренного в [1], значение  $\mu \approx 1$ , т. е. гораздо меньше, чем в первом случае, и соответствует

удовлетворительному качеству переходного процесса ошибки приближения. Таким образом, выбранный метод оценки максимальной величины ошибки приближения хорошо согласуется с численными расчетами и позволяет в общем случае определить допустимую величину вариаций параметров САУ исходя из необходимой точности приближенного решения.

По сравнению с ранее рассмотренным методом определения  $\tau$ -функции чувствительности при помощи подстановки типа (1), устраняя разночастотность колебательных составляющих точного и приближенного решений и увеличивая затухание ошибки приближения, позволяет в несколько раз (в зависимости от параметров САУ) увеличить точность приближенного решения или же при заданной его точности увеличить допустимые вариации параметров системы.

Весь вышеприведенный анализ относится к вариациям собственной частоты опорного уравнения, так как можно легко показать, что удовлетворительная точность приближенного решения получается при немалых вариациях относительного коэффициента демпфирования даже без преобразования опорного уравнения к новому аргументу.

Данный вывод основывается на отсутствии в этом случае заметной разночастотности колебательных составляющих точного и приближенного решения варьируемого уравнения.

### Обобщение модифицированных функций чувствительности для случая нестационарной линейной САУ

Переменность во времени параметров САУ вносит ряд изменений в метод преобразования опорной системы к новому аргументу и требует уточнения самого понятия функции чувствительности.

С другой стороны, именно для нестационарных САУ методы теории чувствительности оказываются наиболее плодотворными, поскольку в настоящее время для них отсутствуют другие удобные инженерные методы анализа.

Пусть, как и ранее, систему дифференциальных уравнений движения САУ можно представить в нормальной форме Коши

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1 \dots X_n, C_1 \dots C_m, t), \quad (7)$$

$$i = 1 \dots n, k = 1 \dots m,$$

где параметры  $C_k$  являются функциями времени.

Вариации параметров системы также являются функциями времени

$$\tilde{C}_k(t) = C_k(t) + \Delta C_k(t).$$

Представляя  $\Delta C_{k(t)}$  в виде разложения типа канонического, имеем

$$\Delta C_k(t) = \sum_{j=1}^r k_{(t)j} \Delta K_j, \quad (8)$$

где  $\Delta K_j$  — постоянный для данного разложения коэффициент — масштабный фактор;

$k_{(t)j}$  — известная функция времени — функция формы.

Варьируемая система (7) запишется в виде

$$\frac{d\bar{X}_i}{dt} = \bar{F}_i(\bar{X}, \dots, \bar{X}_n, C_1, \dots, C_m, \Delta C_1, \dots, \Delta C_m, t). \quad (9)$$

Как и ранее, разложим координаты  $\bar{X}_i$  в ряд Тэйлора, теперь уже по степеням каждого из масштабных факторов  $\Delta K_j$  в окрестностях  $\Delta K_j = 0$ .

$$\bar{X}_i = X_i + \left. \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \Delta K_j} \right|_{\Delta K_j = 0} \Delta K_j + \left. \frac{\partial^2 \bar{X}_i}{\partial \Delta K_j^2} \right|_{\Delta K_j = 0} \frac{\Delta K_j^2}{2} + \dots \quad (10)$$

Пренебрегая нелинейными членами разложения (10) и называя частную производную  $W_{X_i}^{K_j} = \left. \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \Delta K_j} \right|_{\Delta K_j = 0}$  функцией чувствительности, имеем

$$\bar{X}_i \approx X_i + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^r W_{X_i}^{K_j} \cdot \Delta K_j. \quad (11)$$

Если функция  $\bar{F}_i$  имеет частные производные по всем вариациям  $\Delta K_j$ , координатам  $X_i$  и времени  $t$ , то, как и ранее, имеем систему уравнений чувствительности

$$\frac{d}{dt} W_{X_i}^{K_j} = \sum_{s=1}^n \left. \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{X}_s} \right|_{\Delta K_j = 0} W_{X_i}^{K_j} + \left. \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \Delta K_j} \right|_{\Delta K_j = 0}. \quad (12)$$

На рис. 3 приведено решение опорного уравнения и уравнения чувствительности для существенно нестационарной системы 2-го порядка. На рис. 4 дается приближенное и точное решение варьируемой системы. Там же приведено изменение во времени ошибки приближения. Как видно из рис. 3, 4, для нестационарной системы также имеет место накопление ошибки приближения из-за сдвига фаз колебательных составляющих точного и приближенного решений. Поэтому, как и ранее, заменяя аргумент в опорной системе, получим функцию чувствительности и соответственно приближенное решение, позволяющее уменьшить до возможного предела ошибку приближения.

Пусть

$$\tau = f(C_1 \dots C_m, \Delta C_1 \dots \Delta C_m, t). \quad (13)$$

Поскольку САУ нестационарна, то при некоторых видах  $f(C_1, \dots, C_m, \Delta C_1, \dots, \Delta C_m, t)$  различным значениям  $t$  могут соответствовать одинаковые значения  $\tau$ , что недопустимо. Учитывая это, введем интегральную форму подстановки (13).

$$d\tau = f_1(C_1 \dots C_m, \Delta C_1 \dots \Delta C_m, t) dt,$$

$$\tau = \int_0^t f_1(C_1 \dots C_m, \Delta C_1 \dots \Delta C_m, t) dt. \quad (14)$$

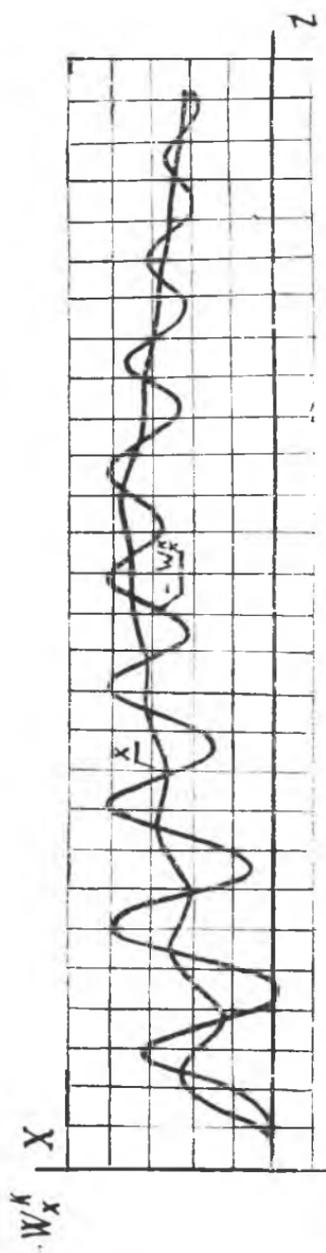


Рис. 3

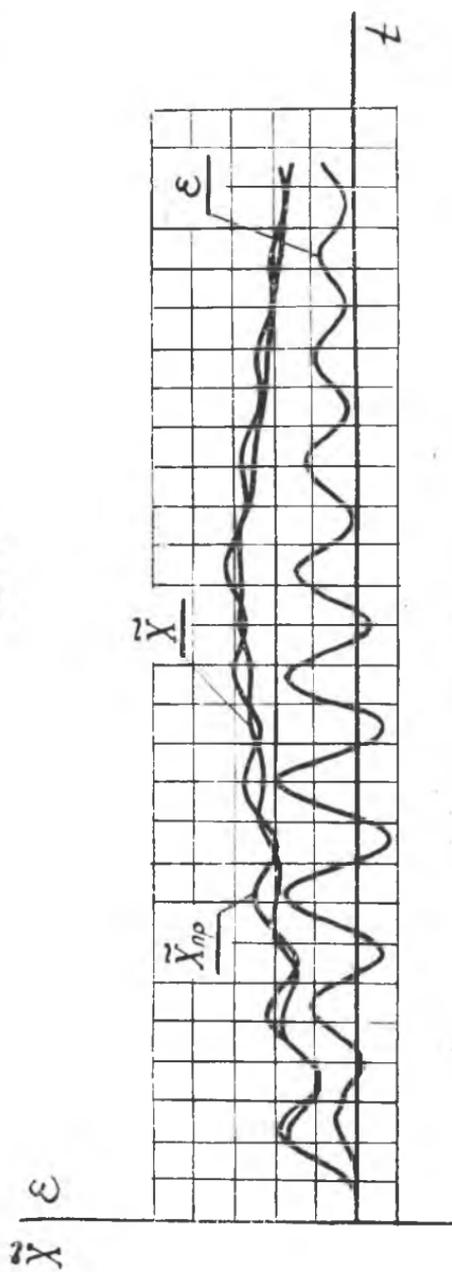


Рис. 4

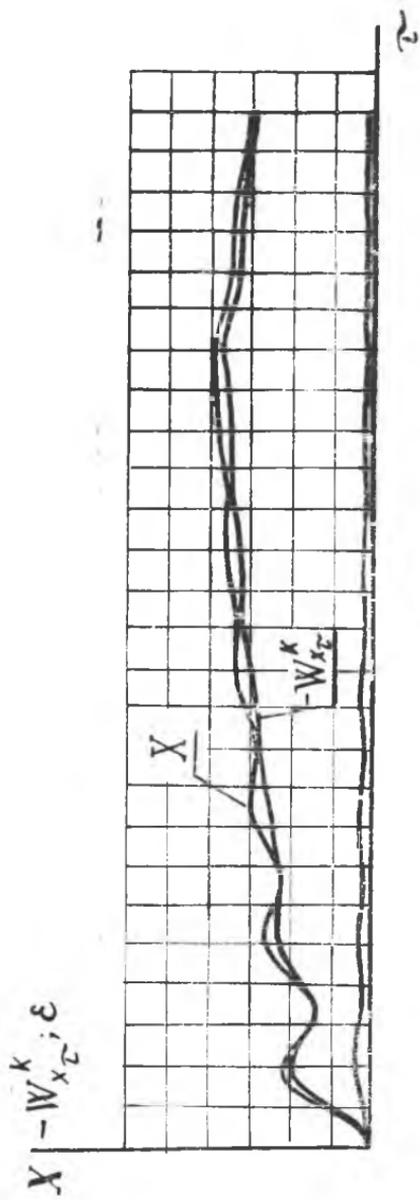


Рис. 5

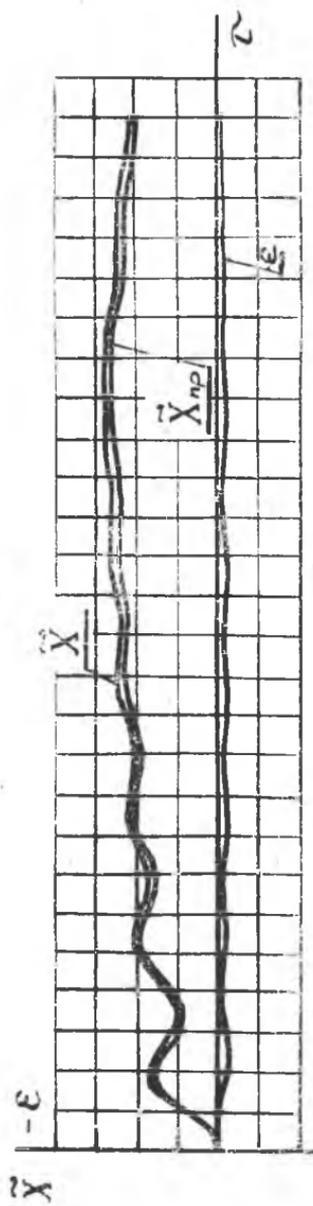


Рис. 6

При этом для однозначности перехода от  $t$  к  $\tau$  на функцию  $f_1(C_1 \dots C_m, \Delta C_1 \dots \Delta C_m, t)$  необходимо наложить только одно ограничение:

$$f_1(C_1 \dots C_m, \Delta C_1 \dots \Delta C_m, t) > 0.$$

В колебательной системе второго порядка подстановка

$$\tau = \int_0^t \omega_t dt$$

позволяет значительно уменьшить ошибку приближения и приводит к быстрому затуханию колебаний функции чувствительности, как и в разобранным ранее стационарном случае. На рис. 5 и 6 приведены решения опорного уравнения и уравнения  $\tau$ -функций чувствительности, точное и приближенное решение варьированной системы и решение уравнения ошибки приближения.

В заключение в качестве примера рассмотрим уравнение из [5].

$$\ddot{X} + 0,5z\dot{X} + \omega^2 e^{-zt} \cdot X = M_B \cdot e^{-\alpha t}. \quad (15)$$

Подставляя согласно (14)

$$d\tau = \omega e^{-0,5zt} dt = \omega_\tau dt$$

и учитывая, что

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \left( \frac{d^2 X}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega_\tau} \cdot \frac{d\omega}{d\tau} \cdot \frac{dX}{d\tau} \right) \omega_\tau^2. \quad (16)$$

Приводим уравнение (15) к виду

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X = \frac{M_B}{\omega_\tau^2}. \quad (17)$$

Решение уравнения (15) согласно [5], дает

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \omega^2 X = M_B, \quad (18)$$

где  $t = -\frac{2}{\alpha} \ln z$ .

Свойства точного и приближенного решений уравнений (17) и (18) при варьировании  $\omega^2$  разбирались подробно ранее в настоящей работе и работе [1], причем было показано, что ошибка приближения для (18) растет неограниченно при  $t \rightarrow \infty$ , а для уравнения (17) она ограничена и имеет относительно небольшую величину.

В общем случае подстановкой (14) уравнение 2-го порядка может быть приведено к нормированному виду

$$\ddot{X}_\tau + \left( \frac{d\omega}{d\tau} + h_\tau \right) \frac{1}{\omega_\tau} \cdot \dot{X}_\tau + X_\tau = \frac{M_{B\tau}}{\omega_\tau^2}. \quad (19)$$

Таким образом, и для нестационарного случая рассмотрение переходных процессов в САУ в функции числа периодов собствен-

ных колебаний, прошедших с момента начала процесса, приводит к значительному уменьшению ошибки приближения для колебательных САУ при прочих равных условиях.

## ВЫВОДЫ

1. С позиции теории чувствительности могут быть решены многие важные задачи динамики САУ: анализ и синтез оптимальных САУ, исследование технической устойчивости САУ на конечном интервале времени, создание параметрически инвариантных САУ, исследование самонастраивающихся систем и влияния замены точных законов управления приближенными и т. д.

2. Рассмотренные в данной статье методы позволяют, сохраняя простоту и наглядность классических методов, получать удовлетворительную точность приближенного решения при немалых вариациях параметров системы.

3. Проведенное обобщение анализа чувствительности на случай нестационарных вариаций позволяет решать поставленные выше задачи для случая нестационарных САУ при немалых вариациях параметров. Допустимая величина вариаций параметров САУ определяется необходимой точностью решения и может быть оценена по приведенным в статье соотношениям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Бочкарев, Я. А. Мостовой. К вопросу анализа чувствительности колебательных систем. Настоящий сборник, стр. 24.

2. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова. «Машиностроение», 1967.

3. С. Л. Чанг и др. Синтез оптимальных систем управления. «Машиностроение» 1964.

4. П. В. Кокотович, Р. С. Рутман. Чувствительность систем автоматического управления. Автоматика и телемеханика, том XXVI, № 4, 1965.

5. Э. Камке. Справочник по дифференциальным уравнениям. Изд. «Наука», 1963.

6. С. Митчелл. Поведение линейных систем при неустановившемся возбуждении. «Механика», № 6, 1967.