

А. Ф. БОЧКАРЕВ,  
Я. А. МОСТОВОЙ

## К ВОПРОСУ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Задачи оптимизации и технической устойчивости систем автоматического управления (САУ) требуют определения и применения такой характеристики САУ, которая позволила бы наиболее просто и полно установить связь между переходными процессами в системе и ее параметрами.

Сравнительно новый раздел теории автоматического управления — теория чувствительности позволяет установить данную связь в удобной для инженерной практики форме, в том числе и для нелинейных и нестационарных САУ.

Однако известные нам методы теории чувствительности предполагают малость отклонений параметров САУ от их «опорных» значений.

В настоящей статье рассматриваются некоторые свойства функций чувствительности колебательных систем.

Получено соотношение, позволяющее оценить точность приближенного решения, определяемого как сумма решений исходной системы и произведений вариаций параметров на соответствующие функции чувствительности.

### Чувствительность систем автоматического управления

При анализе чувствительности изучается влияние отклонений (вариаций) параметров САУ относительно их исходных (опорных) значений на ее показатели и переходные процессы.

Пусть движение опорной САУ описывается системой дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка, в общем случае нелинейной и нестационарной.

$$\frac{dX}{dt} = F_i(X_1 \dots X_n, C_1 \dots C_k \dots C_m, t); \quad (1)$$

$$X_{i(0)} = X_{0i}; \quad \begin{matrix} i = 1 \dots n; \\ k = 1 \dots m, \end{matrix}$$

где  $X_{i(0)}$  — начальные условия;

$X_i$  — координаты системы;

$C_k$  — параметры системы.

Если имеют место вариации параметров САУ  $\Delta C_k$  относительно их опорных значений, то движение САУ будет определяться следующей системой дифференциальных уравнений.

$$\frac{d\bar{X}_i}{dt} = \bar{F}_i(\bar{X}_1 \dots \bar{X}_n, C_1 + \Delta C_1 \dots C_k + \Delta C_k \dots C_m + \Delta C_m, t), \quad (2)$$

где  $\bar{X}_i$  — координаты варьируемой системы.

Координаты  $\bar{X}_i$  могут быть разложены в ряд Тэйлора по степеням  $\Delta C_k$  в окрестностях опорных значений параметров САУ.

$$\bar{X}_i = X_i + \left. \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \Delta C_k} \right|_{\Delta C_k=0} \cdot \Delta C_k + \left. \frac{\partial^2 \bar{X}_i}{\partial \Delta C_k^2} \right|_{\Delta C_k=0} \frac{\Delta C_k^2}{2} + \dots \quad (3)$$

Если рассматривать малые вариации параметров, то можно ограничиться только линейным членом разложения (3), и в этом случае значения выходных координат САУ приближенно определяются как

$$\bar{X}_{i \text{ нр}} \approx X_i + \sum_{k=1}^m \left. \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \Delta C_k} \right|_{\Delta C_k=0} \cdot \Delta C_k \quad (4)$$

Частная производная  $W_{x_i}^{\Delta C_k} = \left. \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \Delta C_k} \right|_{\Delta C_k=0}$  называется функцией чувствительности.

Определение функции чувствительности как частной производной по вариациям параметров, а не по самим параметрам, обладает рядом дополнительных удобств по сравнению с обычно применяемым [3].

Функции чувствительности обычно получают путем решения системы уравнений чувствительности совместно с опорной системой [1, 2, 3].

В том случае, если функция  $\bar{F}_i$  имеет частные производные по вариациям  $\Delta C_k$ , координатам  $\bar{X}_i$  и времени  $t$ , уравнения чувствительности получаются из системы (1) путем дифференцирования ее по вариациям  $\Delta C_k$  [1, 2, 3].

$$\frac{dW_{x_i}^{\Delta C_k}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{X}_j} \right|_{\Delta C_k=0} \cdot W_{x_j}^{\Delta C_k} + \left. \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \Delta C_k} \right|_{\Delta C_k=0} \quad (5)$$

Уравнения (5) — линейные дифференциальные в общем случае нестационарные.

Начальные условия системы уравнений чувствительности нулевые (если начальные условия опорной системы не зависят от  $C_k$ ).

С позиций теории чувствительности могут быть рассмотрены следующие задачи: исследование технической устойчивости САУ на конечном интервале времени, анализ и синтез оптимальных

САУ, влияние замены точных законов управления приближенными, создание параметрически инвариантных систем, инверсная задача чувствительности и т. д.

Для выражения (4) условие малости вариации  $\Delta C_k$  является существенным, и его нарушение ведет к недопустимому увеличению ошибки между приближенным решением (4) и интегралом варьируемой системы (2).

Обычно рекомендуемое в таких случаях применение функций чувствительности высших порядков, т. е. использование нелинейных членов разложения (3) лишает методы теории чувствительности их основных преимуществ: сравнительно малой трудоемкости и легкой обозримости результатов.

Ниже приводится анализ точности приближенного решения (4) и оцениваются допустимые вариации параметров САУ, входящих в собственные частоты колебательных составляющих переходного процесса.

### Анализ точности приближенного решения

Для определения функций чувствительности линейных стационарных САУ может быть использовано преобразование Лапласа. Обозначая  $\widetilde{\Phi}(p, \Delta C_k)$  передаточную функцию системы, у которой параметры имеют вариации  $\Delta C_k$  относительно опорных значений, имеем сигнал на выходе САУ

$$\widetilde{X}(t, \Delta C_k) = L^{-1} \{ \widetilde{\Phi}(p, \Delta C_k) \times y(p) \}, \quad (6)$$

где  $y(p)$  — преобразование Лапласа входного сигнала САУ.

Если уравнение (6) является дифференцируемым по параметрам  $C_k$ , то, учитывая коммутативность операций дифференцирования и преобразования Лапласа, можно записать:

$$W_x^{\Delta C_k} = L^{-1} \left\{ \left. \frac{\partial \widetilde{\Phi}(p, \Delta C_k)}{\partial \Delta C_k} \right|_{\Delta C_k = 0} \times y(p) \right\}. \quad (7)$$

Приближенное решение варьируемого уравнения (6) согласно (4) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_{\text{нр}}(t, \Delta C_k) &= L^{-1} \{ \Phi(p, 0) \times y(p) \} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \Delta C_k L^{-1} \left\{ \left. \frac{\partial \widetilde{\Phi}(p, \Delta C_k)}{\partial \Delta C_k} \right|_{\Delta C_k = 0} \times y(p) \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Phi(p, 0)$  — передаточная функция опорной системы. Если определить ошибку приближения как разность точного (6) и приближенного решения (8) варьируемого уравнения, то тогда

$$\varepsilon = \widetilde{X}(t, \Delta C_k) - \widetilde{X}_{\text{нр}}(t, \Delta C_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= L^{-1} \left\{ \left[ \bar{\Phi}_{(p, \Delta C_k)} - \Phi_{(p, 0)} - \sum_{k=1}^m \Delta C_k \frac{\partial \bar{\Phi}_{(p, \Delta C_k)}}{\partial \Delta C_k} \Big|_{\Delta C_k = 0} \right] \cdot y^{(p)} \right\} = \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{a_s p^s + a_{s-1} p^{s-1} + \dots + a_1 p + a_0}{p^q + b_{q-1} p^{q-1} + \dots + b_1 p + b_0} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{A(p)}{B(p)} \right\}, \quad (9)
\end{aligned}$$

где для реальных систем  $q > s$ .

В том случае, если опорная САУ устойчива и имеющие место вариации параметров  $\Delta C_k$  не нарушают ее устойчивости, устойчивость приближенного решения (8) и ошибки приближения определяются поведением функции чувствительности (7).

Для параметров САУ, входящих в инерционную часть передаточной функции системы, изображение функции чувствительности, очевидно, будет иметь кратные полюсы.

Поэтому выражение (9) для ошибки приближения можно переписать в следующем виде: [6]

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \frac{K_{kj}}{(m_k - j)!} t^{m_k^n - 1} e^{p_k t}; \quad t \geq 0, \quad (10)$$

где  $p_k$  — корни характеристического полинома;

$m_k$  — кратность корней характеристического полинома;

$n$  — число различных корней характеристического полинома;

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = q$$

$$K_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \left[ \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \frac{(p - p_k)^{m_k} A(p)}{B(p)} \right]_{p=p_k}$$

Таким образом, согласно выражению (10), если среди корней опорной системы нет чисто мнимых или с положительной действительной частью, то ошибка приближения устойчива при любых вариациях параметров САУ. В противном случае она растет неограниченно при  $t \rightarrow \infty$ .

В случае вариаций параметров, входящих только в форсирующую часть передаточной функции, изображение функции чувствительности не будет иметь кратных полюсов и для устойчивой опорной системы ошибка приближения также будет устойчива.

Сам по себе факт устойчивости ошибки приближения, однако, еще не говорит о возможности практического применения функций чувствительности при больших вариациях параметров САУ, учитывая ограничения по необходимой точности решения (8).

Высокий порядок уравнения ошибки приближения (можно показать, что он равен  $3n$ , где  $n$  — порядок опорного уравнения САУ) вызывает естественные затруднения при анализе ее поведения в общем виде.

Некоторого уменьшения этих затруднений можно достичь, основываясь на ряде особенностей системы линейных дифференциальных уравнений, описывающей движение летательного аппара-

та. Движение линейной САУ может быть представлено следующим образом в матричном виде [5]:

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = M, \quad (11)$$

где  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$  — вектор координат системы;

$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}$  — вектор возмущений;

$A, B, C$  — квадратные матрицы, составленные из коэффициентов системы.

Уравнение (11) может соответствовать как САУ со многими степенями свободы, так и САУ с одной степенью свободы, которые можно представить в виде (11).

Первое свойство системы (11) заключается в том, что в силу линейности САУ уравнение (11) можно решать при частных видах входного воздействия, а реакцию на воздействие общего вида находить, пользуясь принципом суперпозиции.

Второе свойство системы (11) заключается в том, что для многих случаев (не особых) систему с  $n$  степенями свободы (в нашем случае  $2n$ -го порядка) можно привести к каноническому виду, т. е. разделить на  $n$  независимых систем с одной степенью свободы (2-го порядка), которые можно проинтегрировать отдельно друг от друга. Для этого необходимо одним линейным преобразованием привести две из трех матриц  $A, B, C$  к диагональному виду. Методика такого преобразования освещена в соответствующей литературе и в настоящей статье не рассматривается.

Пусть матрицы  $A$  и  $C$  в результате преобразования приведены к диагональному виду  $\bar{A}$  и  $\bar{C}$  и система (11) примет вид

$$\bar{A}\ddot{q} + \bar{B}\dot{q} + \bar{C}q = \bar{M}, \quad (12)$$

где  $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$  — вектор обобщенных нормальных координат;

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  — квадратные преобразованные матрицы  $A, B, C$ .

В общем случае матрица  $\bar{B}$  не диагональна и не нулевая. Однако обычно недиагональными элементами матрицы  $\bar{B}$  можно пренебречь, основываясь на их малости в реальных объектах [5]. Такой прием очень часто применяется для анализа динамики движения летательных аппаратов, тем более, что его движение описывается системой дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Для дальнейшего анализа уместно ограничиться уравнением 2-го порядка, учитывая, что полученные результаты согласно вышесказанному можно распространить на системы любого порядка при входных воздействиях общего вида.

Пусть имеется опорное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{X} + h\dot{X} + \omega^2 X = M_0, \quad (13)$$

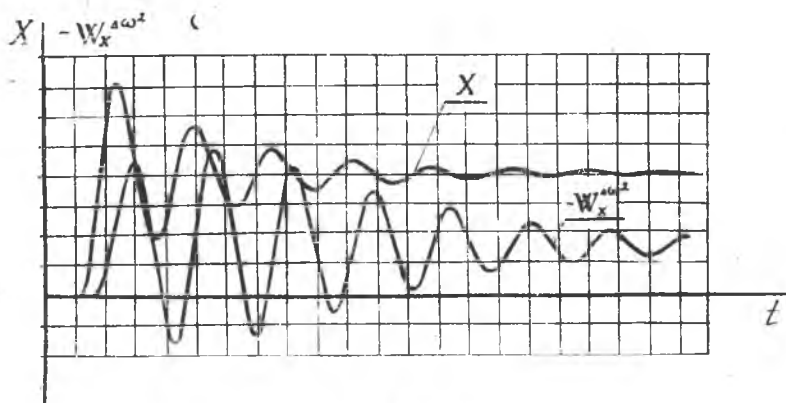


Рис. 1.

Допустим, квадрат собственной частоты  $\omega^2$  получил приращение  $\Delta\omega^2$  так, что

$$\bar{\omega}^2 = \omega^2 + \Delta\omega^2; \quad \text{и} \quad \delta\omega^2 = \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2};$$

Тогда уравнение чувствительности согласно (5) можно представить в виде

$$W_X^{\Delta\omega^2} + hW_X^{\dot{\Delta\omega^2}} + \omega^2 W_X^{\Delta\omega^2} = -X. \quad (13')$$

На рис. 1 приведено решение опорного уравнения (13) и уравнения чувствительности (13') при сравнительно небольшом демпфировании в опорном уравнении.

На рис. 2 приведены точное и приближенное решение, согласно (6) и (8), варьруемой системы и ошибка приближения.

Как видно из рис. 2, ошибка приближения имеет колебательный характер и относительно большую величину.

Причина данного явления кроется в разности фаз колебательных составляющих точного и приближенного решений.

Действительно, колебательная составляющая точного решения имеет частоту, соответствующую варьированным параметрам системы, в то время как колебательная составляющая приближенного решения имеет частоту, соответствующую опорным параметрам системы согласно методу вычисления функции чувствительности (5).

При относительно малых вариациях собственной частоты в САУ с затуханием ошибка приближения будет также мала, т. к.

к моменту достижения заметных значений разности фаз между колебательными составляющими точного и приближенного решений затухание в системе приведет к уменьшению амплитуды колебаний как в точном, так и в приближенном решении.

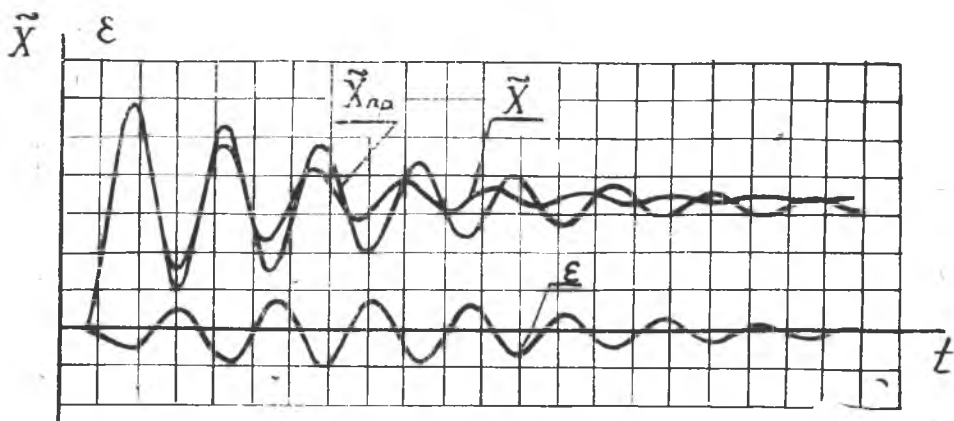


Рис. 2.

В случае отсутствия затухания (консервативное звено) ошибка приближения будет неограниченно расти при  $t \rightarrow \infty$  для любых значений вариаций параметров.

Таблица 1

Уравнение	Решение уравнения
1. Опорное уравнение $\ddot{X} + \omega^2 X = M_B$	$X = \frac{M_B}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$
2. Уравнение функции чувствительности $W_X^{\Delta\omega^2} + \omega^2 W_X^{\Delta\omega^2} = -X$	$W_X^{\Delta\omega^2} = -\frac{M_B}{\omega^4} \left( 1 - \cos \omega t - \frac{\omega t}{2} \sin \omega t \right)$
3. Приближенное решение $\ddot{X}_{np} = X + W_X^{\Delta\omega^2} \cdot \Delta\omega^2$	$\ddot{X}_{np} = \frac{M_B}{\omega^2} (1 - \delta\omega^2) \left( 1 - \cos \omega t + \frac{\delta\omega^2}{1 - \delta\omega^2} \frac{\omega t}{2} \sin \omega t \right)$
4. Варьируемое уравнение $\ddot{X} + (\omega^2 + \Delta\omega^2) X = M_B$	$\ddot{X} = \frac{M_B}{\omega^2 (1 + \delta\omega^2)} (1 - \cos \omega \sqrt{1 + \delta\omega^2} \cdot t)$
5. Уравнение ошибки приближения $\ddot{\epsilon} = \ddot{X} - \ddot{X}_{np}$	$\ddot{\epsilon} = \frac{M_B}{\omega^2} \left( \frac{(\delta\omega^2)^2}{1 + \delta\omega^2} + (1 - \delta\omega^2) \cos \omega t - \frac{1}{1 + \delta\omega^2} \cos \omega \sqrt{1 + \delta\omega^2} \cdot t - \delta\omega^2 \frac{\omega t}{2} \sin \omega t \right)$

С другой стороны, в случае больших затуханий ошибка приближения может иметь сравнительно небольшие значения даже при относительно больших  $\Delta C_k$ , поскольку и в точном, и в приближенном решении будут отсутствовать развитые колебательные составляющие.

Рассмотрим случай, когда демпфирование в системе отсутствует. При этом получаются результаты, которые могут служить хорошей иллюстрацией к вышеприведенному анализу. Решения опорного варьируемого и приближенного уравнений консервативной системы, а также уравнения чувствительности приведены в табл. 1.

Как видно из табл. 1, функция чувствительности и ошибка приближения действительно неограниченно растут при  $t \rightarrow \infty$ , что соответствует физической картине, рассмотренной ранее.

Рассматривая далее опорное уравнение с демпфированием (13), получаем изображения функции чувствительности согласно (7)

$$L(W_X^{\Delta\omega^2}) = - \frac{L(M_B)}{(p^2 + hp + \omega^2)^2}. \quad (14)$$

Записывая, как и ранее, ошибку приближения (9), имеем

$$L(\varepsilon) = \frac{(\Delta\omega^2)^2 L(M_B)}{(p^2 + hp + \omega^2)^2 [p^2 + hp + \omega^2 (1 + \delta\omega^2)]}$$

Поскольку при  $h > 0$  ошибка приближения устойчива, то согласно теореме о конечном значении ее установившееся значение при сигнале на входе опорной системы в виде единичного скачка равно

$$\bar{\varepsilon}_{уст} = (\delta\omega^2)^2 \bar{X}_{уст}, \quad (15)$$

где  $\bar{X}_{уст}$  — установившееся значение точного решения варьируемого уравнения.

В зависимости от относительного демпфирования величина неустановившейся ошибки приближения может значительно превышать ее установившееся значение (рис. 2).

Шестой порядок дифференциального уравнения ошибки приближения в рассматриваемом случае не позволяет проанализировать его переходную функцию в общем виде, не прибегая к громоздким численным методам в той или иной форме. Для целей нашего анализа вполне достаточно получить оценку максимальной величины ошибки приближения в наиболее общем случае. Поэтому воспользуемся одной из частотных оценок переходного процесса [1]. Определим функцию передачи по ошибке приближения как

$$P(p) = \frac{L(\varepsilon)}{L(M_B)} = \frac{(\Delta\omega^2)^2}{(p^2 + hp + \omega^2)^2 [p^2 + hp + \omega^2 (1 + \delta\omega^2)]}.$$

Тогда согласно [1] максимальная величина ошибки приближения и время ее затухания до установившегося состояния зависят от



показателя колебательности  $\mu$ , определяемого как отношение максимального значения амплитудной характеристики к ее значению при частоте 0.

В нашем случае

$$\mu \approx \frac{1 + \delta\omega^2}{\left(\frac{h^2}{\omega^2} - \frac{3}{16} \frac{h^4}{\omega^4}\right) \sqrt{(\delta\omega^2)^2 + \frac{h^2}{\omega^2} - \frac{3}{16} \frac{h^4}{\omega^4} + 0,5 \frac{h^2}{\omega^2} \delta\omega^2}} \quad (16)$$

С ростом показателя колебательности возрастает колебательный характер переходного процесса, причем на величину показателя колебательности влияет как распределение полюсов передаточной функции, так и распределение ее нулей, что очень важно для дальнейшего анализа.

Удовлетворительному качеству переходного процесса (перерегулирование не более 50%) соответствует значение показателя колебательности  $\mu = 1,2 \div 1,5$ .

Как показывает выражение (16), при малом относительном демпфировании, определяемом  $\frac{h}{\omega}$ , значения вариации параметров, приводящих к допустимым ошибкам приближения (скажем, 5%), должны быть малы.

Например, для рассмотренного на рис. 1, 2 случая  $\mu \approx 17$ , что соответствует, согласно [1], перерегулированию ошибки приближения  $> 1000\%$ . Данное значение перерегулирования хорошо соответствует картине, приведенной на рис. 1, 2.

## ВЫВОДЫ

1. Ошибка приближения для колебательных САУ при конечных вариациях параметров, входящих в ее собственные частоты, может достигать неприемлемого значения в основном за счет разночастотности колебательных составляющих точного и приближенного решений. Это связано с методом вычисления функций чувствительности и их меньшим (по сравнению с исходным процессом) затуханием.

2. Получено выражение, позволяющее оценить в первом приближении допустимые вариации собственных частот для получения заданной точности приближенного решения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Под редакцией В. В. Солодовникова. «Машиностроение», 1967.
2. С. Л. Шелдон, Чанг. Синтез оптимальных систем автоматического управления. «Машиностроение», 1964.
3. П. В. Кокотович, Р. С. Рутман. Чувствительность систем автоматического управления. Автоматика и телемеханика, том XXVI, № 4, 1965.
4. Справочник по дифференциальным уравнениям.
5. С. Митчелл. Поведение линейных систем при неустановившемся возбуждении. Механика, № 6, «Наука», 1967.
6. М. Ф. Гарднер и Дж. Л. Бэрнс. Переходные процессы в линейных системах. Физматгиз, 1961.