КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

Г. В. ФИЛИППОВ, В. Г. ШАХОВ

ТУРБУЛЕНТНОЕ СТАБИЛИЗИРОВАННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ С ВРАЩАЮЩИМИСЯ СТЕНКАМИ

В различных установках применяются каналы кольцевого поперечного сечения, в которых одна или обе стенки вращаются. Изучение течения в таких каналах тесно связано с вопросами проектирования турбомашин, электрических машин, охлаждения их роторов и т. д. Однако гидравлическое сопротивление каналов в случае стабилизированного турбулентного течения исследовано недостаточно.

Известны решения предельных задач о движении жидкости в кольцевом канале с неподвижными стенками [1] и о течении газа между двумя вращающимися цилиндрами [2]. В [3] рассмотрено стабилизированное течение в малом зазоре между коаксиальными вращающимися цилиндрами.

В настоящей работе предлагается приближенное решение задачи, аналогичной рассмотренной в [3], при произвольной относительной величине зазора.

1. В каналах указанного типа возможно существование четырех режимов течения жидкости [4]: ламинарного; ламинарного с вихрями Тейлора; турбулентного и турбулентного с вихрями Тейлора.

Ниже рассмотрен турбулентный режим течения в зазоре между цилиндрами радиусов r_1 и r_2 $(r_1 < r_2)$.

Уравнения движения в данном случае имеют вид:

$$-\frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\,|\,\tau_x\,|)}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (r^2 \tau_\varphi)}{\partial r} = 0, \tag{1.2}$$

где τ_x, τ_φ — составляющие напряжения трения вдоль оси канала и в окружном направлении;

r — расстояние от оси цилиндров;

p — давление.

Примем следующие зависимости между составляющими напряжения трения τ_x и τ_φ и составляющими осредненной скорости вдоль оси канала u и в окружном направлении v:

$$|\tau_x| = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (1.3) \qquad |\tau_\varphi| = -\varepsilon r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right), \tag{1.4}$$

где ε — коэффициент турбулентной вязкости определим следующим образом:

$$\varepsilon = \rho l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right]^2}. \tag{1.5}$$

Длину пути смешения l выберем в виде

$$l = \varkappa \frac{(r - r_1)(r_2 - r)}{r_2 - r_1}, \tag{1.6}$$

где $\varkappa$ — постоянная турбулентности.

Вблизи стенок цилиндров, на основе гипотезы Кармана, введем ламинарные подслои с толщинами*:

$$\delta_{1_л} = \frac{\alpha \nu}{\sqrt{\frac{\tau_1}{\rho}}}; \quad \delta_{2_л} = \frac{\alpha \nu}{\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho}}}; \tag{1.7}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_\varphi^2}, \tag{1.8}$$

где α — постоянная; ν — кинематический коэффициент вязкости.

2. Очевидным является тот факт, что при некотором $R (r_1 < R < r_2)$ осевая скорость u принимает наибольшее значение U, а осевая составляющая напряжения трения $\tau_x = 0$. Поэтому для областей $r_1 \leqslant r \leqslant R$ и $R \leqslant r_1 \leqslant r_2$ целесообразно рассмотреть отдельно вопрос о профиле осевой скорости и законе сопротивления в осевом направлении.

Отметим, что из (1.2) вытекает соотношение

$$r^2 \tau_\varphi = r_1^2 \tau_{\varphi 1}, \tag{2.1}$$

справедливое при любом r.

В данном разделе рассмотрим область $r_1 \leqslant r \leqslant R$. Для нее из (1.1) следует

$$-\frac{1}{r} \frac{d(r\tau_x)}{dr} = \frac{dp}{dx}. \tag{2.2}$$

*Индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к величинам на поверхности цилиндров r_1 и r_2.

Интегрируя (2.2) и определяя постоянную интегрирования из условия $\tau_x=0$ при $r=R$, находим

$$r\tau_x = -\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}(R^2-r^2). \tag{2.3}$$

Уравнения (1.3), (1.4), (2.1) и (2.3) приводят к соотношению

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial r}}{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v}{r}\right)} = \left|\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\frac{r(R^2-r^2)}{\tau_{\varphi 1} r_1^2}\right|. \tag{2.4}$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\psi_x = -\frac{dp}{dx}\frac{r_2-r_1}{\rho U^2}; \quad \psi_\varphi = \frac{\tau_{\varphi 1}}{\rho v_1^2}; \quad \mathrm{Re}_x = \frac{U(r_2-r_1)}{\nu};$$

$$\mathrm{Re}_\varphi = \frac{v_1(r_2-r_1)}{\nu}; \quad Z = \frac{\psi_\varphi}{\psi_x}\frac{\mathrm{Re}_\varphi^2}{\mathrm{Re}_x^2}; \quad u^0 = \frac{u}{U}; \quad v^0 = \frac{v}{v_1};$$

$$\delta_1 = R-r_1; \quad y_1 = r-r_1; \quad \delta_1^0 = \frac{\delta_1}{r_1}; \quad y_1^0 = \frac{y_1}{\delta_1}; \quad \xi = \frac{r_1}{r_2}, \tag{2.5}$$

где $v_1=\omega r_1$; ω — угловая скорость вращения внутреннего цилиндра.

Из (1.3) с учетом (1.5), (1.6), (2.3), (2.4) и (2.5), после некоторых преобразований, получим:

$$\frac{du^0}{dy_1^0} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\psi_x \xi(1-\xi)\delta_1^0}{2}}\,\varphi_1(Z,\xi,\delta_1^0,y_1^0), \tag{2.6}$$

$$\varphi_1(Z,\xi,\delta_1^0,y_1^0) = \frac{\sqrt{(1-y_1^0)\dfrac{2+\delta_1^0(1+y_1^0)}{1+\delta_1^0 y_1^0}}}{y_1^0\left[1-\xi(1+\delta_1^0 y_1^0)\right]\sqrt[4]{1+\left\{\dfrac{2Z(1-\xi)}{\xi\delta_1^0(1-y_1^0)(1+\delta_1^0 y_1^0)\left[2+\delta_1^0(1+y_1^0)\right]}\right\}^2}}. \tag{2.7}$$

Интегрируя (2.6) и определяя постоянную интегрирования из условия $u^0=1$ при $y_1^0=1$, находим распределение осевой составляющей скорости вблизи выпуклой стенки канала

$$u^0 = 1+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\psi_x\xi(1-\xi)\delta_1^0}{2}}\int_1^{y_1^0}\varphi_1(Z,\xi,\delta_1^0,y_1^0)\,dy_1^0. \tag{2.8}$$

В ламинарном подслое

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial r}, \tag{2.9}$$

Проинтегрировав (2.9) с учетом (2.3) и определив постоянную интегрирования из условия равенства нулю скорости на стенке трубы, получим

$$u^0 = \frac{1}{2}\psi_x \frac{\mathrm{Re}_x \xi^2}{(1-\xi)^2}\left\{(1+\delta_1^0)^2 \ln\left(1+\delta_1^0 y_1^0\right) - \left[\delta_1^0 y_1^0 + \frac{1}{2}\left(\delta_1^0 y_1^0\right)^2\right]\right\}. \quad (2.10)$$

Приравнивая (2.8) к (2.10) при $y^0{}_1 = \delta^0_{л1}$, найдем закон сопротивления в осевом направлении для внутреннего цилиндра

$$1 + \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\psi_x \xi(1-\xi)\delta_1^0}{2}} \int\limits_1^{\delta^0_{л1}} \varphi_1\left(Z, \xi, \delta_1^0, y_1^0\right) dy_1^0 =$$

$$= \frac{\psi_x \xi^2 \mathrm{Re}_x}{2(1-\xi)^2}\left\{(1+\delta_1^0)^2 \ln\left(1+\delta_1^0 \delta^0_{л1}\right) - \left[\delta_1^0 \delta^0_{л1} + \frac{1}{2}\left(\delta_1^0 \delta^0_{л1}\right)^2\right]\right\}. \quad (2.11)$$

Вследствие малости толщины ламинарного подслоя правую часть закона сопротивления (2.11) можно несколько упростить. Кроме того, входящий в (2.11) интеграл можно представить в виде

$$\int\limits_1^{\delta^0_{л1}} \varphi_1 \, dy_1^0 = \int\limits_1^{\varepsilon} \varphi_1 \, dy_1^0 + \int\limits_{\varepsilon}^{\delta^0_{л1}} \varphi_1 \, dy_1^0$$

где малую величину ε можно принять равной 0,05 [1].

Ввиду малости y_1^0 в интервале $\varepsilon \geqslant y_1^0 \geqslant \delta^0_{л1}$

$$\varphi_1\left(Z, \xi, \delta_1^0, y_1^0\right) \approx \frac{\sigma_1 \sqrt{2+\delta_1^0}}{1-\xi} \cdot \frac{\sqrt{1-y_1^0}}{y_1^0},$$

где

$$\sigma_1 = \left\{1 + \left[\frac{2Z(1-\xi)}{\xi\delta_1^0(2+\delta_1^0)}\right]^2\right\}^{-\frac{1}{4}}. \quad (2.12)$$

Следовательно,

$$\int\limits_1^{\delta^0_{л1}} \varphi_1\left(Z, \xi, \delta_1^0, y_1^0\right) dy_1^0 =$$

$$= \frac{\sigma_1 \sqrt{2+\delta_1^0}}{1-\xi}\left(0{,}025 + \ln\frac{\delta^0_{л1}}{0{,}05}\right) - m\left(Z, \xi, \delta_1^0\right), \quad (2.13)$$

где

$$m\left(Z, \xi, \delta_1^0\right) = \int\limits_{0{,}05}^{1} \varphi_1\left(Z, \xi, \delta_1^0, y_1^0\right) dy_1^0. \quad (2.14)$$

Из (1.7) и (1.8) с учетом (2.3) и (2.5) находим

$$\delta^0_{л1} = \frac{\delta_{л1}}{\delta_1} = \frac{\alpha\sigma_1}{\mathrm{Re}_x}\sqrt{\frac{2}{\psi_x(2+\delta_1^0)}\left(\frac{1-\xi}{\xi\delta_1^0}\right)^3}. \quad (2.15)$$

Тогда закон сопротивления при турбулентном течении вблизи выпуклой стенки запишется в форме:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi_x}} = \alpha\sigma_1 \sqrt{\frac{\xi\left(2+\delta_1^0\right)\delta_1^0}{2(1-\xi)}} - \tag{2.16}$$

$$-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\xi(1-\xi)\delta_1^0}{2}}\left[\frac{\sigma_1\sqrt{2+\delta_1^0}}{1-\xi}\left(0{,}025+\ln\frac{\delta_{л1}^0}{0{,}05}\right)-m\left(Z, \xi, \delta_1^0\right)\right].$$

3. Для течения вблизи вогнутой поверхности ($R \leqslant r \leqslant r_2$) уравнение движения (1.1) примет вид

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau_x) = \frac{dp}{dx}, \tag{3.1}$$

или, после интегрирования,

$$r\tau_x = \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\left(R^2 - r^2\right). \tag{3.2}$$

Отсюда, с учетом (1.3), (1.5), (1.6) и (2.4), следует:

$$\frac{du^0}{dy_2^0} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\psi_x(1-\xi)\delta_2^0}{2}}\,\varphi_2\left(Z, \xi, \delta_2^0, y_2^0\right), \tag{3.3}$$

$$\varphi_2\left(Z, \xi, \delta_2^0, y_2^0\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(1-y_2^0\right)\dfrac{2-\delta_2^0\left(1+y_2^0\right)}{1-\delta_2^0 y_2^0}}}{y_2^0\left(1-\delta_2^0 y_2^0-\xi\right)\sqrt[4]{1+\left\{\dfrac{2Z\xi^2(1-\xi)}{\delta_2^0\left(1-y_2^0\right)\left(1-\delta_2^0 y_2^0\right)\left[2-\delta_2^0\left(1+y_2^0\right)\right]}\right\}^2}} \tag{3.4}$$

и, дополнительно к (2.5), принято, что

$$\delta_2 = r_2 - R;\quad y_2 = r_2 - r;\quad \delta_2^0 = \frac{\delta_2}{r_2};\quad y_2^0 = \frac{y_2}{\delta_2}. \tag{3.5}$$

Интегрируя (3.3), найдем распределение скорости вблизи вогнутой стенки канала

$$u^0 = 1 + \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\psi_x(1-\xi)\delta_2^0}{2}}\int_1^{y_2^0}\varphi_2\left(Z, \xi, \delta_2^0, y_2^0\right)dy_2^0. \tag{3.6}$$

Закон сопротивления вблизи вогнутой поверхности может быть получен тем же путем, что и для области, примыкающей к внутреннему цилиндру:

$$1 + \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\psi_x(1-\xi)\delta_2^0}{2}}\int_1^{\delta_{л2}^0}\varphi_2\left(Z, \xi, \delta_2^0, y_2^0\right)dy_2^0 =$$

$$= \frac{\psi_x \mathrm{Re}_x}{2(1-\xi)^2}\left\{\left[\delta_{л2}^0\delta_2^0 - \frac{1}{2}\left(\delta_{л2}^0\delta_2^0\right)^2\right] + \left(1-\delta_2^0\right)^2\ln\left(1-\delta_2^0\delta_{л2}^0\right)\right\}, \tag{3.7}$$

4—6410

или, после упрощений:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi_x}} = \alpha\sigma_2 \sqrt{\frac{\delta_2^0(2-\delta_2^0)}{2(1-\xi)}} -$$

$$-\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{(1-\xi)\,\delta_2^0}{2}}\left[\frac{\sigma_2\sqrt{2-\delta_2^0}}{1-\xi}\left(0{,}025+\ln\frac{\delta_{л2}^0}{0{,}05}\right)-n\left(Z,\xi,\delta_2^0\right)\right]; \quad (3.8)$$

$$\sigma_2 = \left\{1+\left[\frac{2Z\xi^2(1-\xi)}{\delta_2^0(2-\delta_2^0)}\right]^2\right\}^{-\frac{1}{4}}; \quad (3.9)$$

$$\delta_{л2}^0 = \frac{\alpha\,\sigma_2}{\mathrm{Re}_x}\sqrt{\frac{2}{\psi_x(2-\delta_2^0)}\left(\frac{1-\xi}{\delta_2^0}\right)^3}; \quad (3.10)$$

$$n\left(Z,\xi,\delta_2^0\right) = \int\limits_{0{,}05}^{1}\varphi_2\left(Z,\xi,\delta_2^0,y_2^0\right)dy_2^0. \quad (3.11)$$

4. Для получения профиля скорости и закона сопротивления в окружном направлении нет необходимости делить поле течения на две зоны. Действительно, из (1.4), (1.6), (2.1) и (2.4) получим:

$$\frac{\partial}{\partial y^0}\left(\frac{v^0}{\xi+y^0(1-\xi)}\right) = -\frac{\xi\sqrt{\psi_\varphi}}{\varkappa}\varphi_3\left(Z,\xi,\delta_1^0,y^0\right); \quad (4.1)$$

$$\varphi_3\left(Z,\xi,\delta_1^0,y^0\right) = \left\{y^0\left[\xi+y^0(1-\xi)\right]^2(1-y^0)\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt[4]{1+\left\{\frac{[\xi+y^0(1-\xi)]\left[y^0(1-\xi)-\xi\delta_1^0\right]\left[\xi\left(2+\delta_1^0\right)+y^0(1-\xi)\right]}{2Z\xi^2(1-\xi)}\right\}^2}\right\}^{-1}, \quad (4.2)$$

$$y^0 = \frac{r-r_1}{r_2-r_1}. \quad (4.3)$$

Интегрируя (4.1), придем к профилю скорости в окружном направлении

$$\frac{v^0}{\xi+y^0(1-\xi)} = -\frac{\xi\sqrt{\psi_\varphi}}{\varkappa}\int\varphi_3\left(Z,\xi,\delta_1^0,y^0\right)dy^0+C, \quad (4.4)$$

где C — постоянная интегрирования.

Из-за малости толщин ламинарных подслоев распределения окружной скорости в них можно считать линейными, поэтому:

$$\left.\begin{array}{ll} y^0 = \Delta_{л1} & v_{л1}^0 = 1-\psi_\varphi\,\mathrm{Re}_\varphi\,\Delta_{л1} \\ y^0 = 1-\Delta_{л2} & v_{л2}^0 = \xi^2\psi_\varphi\,\mathrm{Re}_\varphi\,\Delta_{л2} \end{array}\right\}; \quad (4.5)$$

$$\Delta_{л1} = \frac{\delta_{л1}}{r_2-r_1}; \quad \Delta_{л2} = \frac{\delta_{л2}}{r_2-r_1}. \quad (4.6)$$

Использование (4.5) позволяет исключить постоянную интегрирования в (4.4)

$$\varkappa \frac{1-\psi_\varphi \mathrm{Re}_\varphi (\xi^3 \Delta_{л2} - \Delta_{л1})}{\xi^2 \sqrt{\psi_\varphi}} = \int\limits_{\Delta_{л1}}^{1-\Delta_{л2}} \varphi_3 (Z, \xi, \delta_1^0, y^0)\, dy^0. \tag{4.7}$$

Интеграл в правой части (4.7) удобно записать в форме

$$\int\limits_{\Delta_{л1}}^{1-\Delta_{л2}} \varphi_3\, dy^0 = \int\limits_{\Delta_{л1}}^{\varepsilon_1} \varphi_3\, dy^0 + \int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \varphi_3\, dy^0 + \int\limits_{1-\varepsilon_2}^{1-\Delta_{л2}} \varphi_3\, dy^0,$$

где можно принять $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}05$. Подинтегральное выражение первого и третьего из этих интегралов вследствие малости $\Delta_{л1}$ и $\Delta_{л2}$ можно приближенно представить в виде:

$$\Delta_{л1} \leqslant y^0 \leqslant \varepsilon_1 \qquad \varphi_3 (Z, \xi, \delta_1^0, y^0) \approx \frac{\sigma_3}{y^0(1-y^0)[\xi + y^0(1-\xi)]^2};$$

$$1-\varepsilon_2 \leqslant y^0 \leqslant 1-\Delta_{л2} \quad \varphi_3 (Z, \xi, \delta_1^0, y^0) \approx \frac{\sigma_4}{y^0(1-y^0)[\xi + y^0(1-\xi)]^2};$$

$$\sigma_3 = \left\{ 1 + \left[\frac{\xi\delta_1^0 (2 + \delta_1^0)}{2Z(1-\xi)} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{4}}; \tag{4.8}$$

$$\sigma_4 = \left\{ 1 + \left[\frac{[1-\xi(1+\delta_1^0)]\,[\xi(1+\delta_1^0)+1]}{3Z\xi^2(1-\xi)} \right]^2 \right\}^{-1/4}. \tag{4.9}$$

Тогда из (4.7) получим закон сопротивления для окружного направления:

$$\frac{\varkappa}{\xi^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\psi_\varphi}} - \frac{\mathrm{Re}_\varphi}{\frac{1}{\sqrt{\psi_\varphi}}} (\Delta_{л1} + \xi^3 \Delta_{л2}) \right] =$$

$$= -\frac{\sigma_3}{\xi^2} \ln \frac{\Delta_{л1}}{0{,}05} - \sigma_4 \frac{\xi^2 - 4\xi + 2}{\xi^2(1-\xi^2)} \ln \frac{\Delta_{л2}}{0{,}05} + k(Z, \xi, \delta_1^0), \tag{4.10}$$

$$k(Z, \xi, \delta_1^0) = \int\limits_{0{,}05}^{0{,}95} \varphi_3 (Z, \xi, \delta_1^0, y^0)\, dy^0. \tag{4.11}$$

5. Соотношения (2.16), (3.8) и (4.10) связывают семь величин: ψ_x, ψ_φ, Re_x Re_φ (или Z), ξ, δ_1^0 и δ_2^0. Относительный радиус ξ и числа Рейнольдса Re_x и Re_φ предполагаются заданными. Таким образом, определению подлежат четыре величины: ψ_x, ψ_φ, δ_1^0 и δ_2^0. Следовательно, для решения задачи необходимо к трем имеющимся уравнениям (2.16), (3.8) и (4.10) добавить еще одно соотношение, связывающее неизвестные величины. Используем очевидное условие

$$\delta_1 + \delta_2 = r_2 - r_1 \tag{5.1}$$

или, в безразмерной форме,

$$\delta_2^0 = 1 - \xi(1 + \delta_1^0). \tag{5.2}$$

Таким образом, для определения четырех неизвестных имеются четыре уравнения (2.16), (3.8), (4.10) и (5.2). Решить полученную систему уравнений можно графическим методом.

Так, при заданных ξ, Re_x и Re_φ уравнение (2.16) позволяет построить зависимость $\delta_1^0(\psi_x, Z)$. Аналогично уравнение (3.8) определяет зависимость $\delta_2^0(\psi_x, Z)$. Обе эти зависимости совместно с (5.2) позволяют найти $\psi_x = \psi_x(Z)$. Из (4.10) следует $\delta_1^0(\psi_\varphi, Z)$. Исключая из $\delta_1^0(\psi_x, Z)$ и $\delta_1^0(\psi_\varphi, Z)$ безразмерную величину δ_1^0, приходим к $\psi_x = \psi_x(\psi_\varphi, Z)$. Вспоминая (2.5), имеем

$$Z = \frac{\psi_\varphi}{\psi_x} \frac{\mathrm{Re}_\varphi^2}{\mathrm{Re}_x^2}. \tag{5.3}$$

Соотношение (5.3) позволяет определить из зависимостей $\psi_x(Z)$ и $\psi_x(\psi_\varphi, Z)$ значения ψ_x и ψ_φ.

Определив указанные величины, можно с помощью (2.8) и (3.6) построить профиль осевой скорости в кольцевой трубе при заданных значениях ξ, Re_x и Re_φ и, следовательно, определить связь между максимальной скоростью U и средней по сечению скоростью $U_{\text{ср}}$.

Однако, прежде чем перейти к выполнению расчетов, следует определить входящие в уравнения эмпирические постоянные турбулентности $\varkappa$ и α.

6. В предельном случае $Z \to 0$ значения $\varkappa$ и α получены в [1]. Так, для $\xi \to 0$ из сравнения теоретического и экспериментального законов сопротивления в круглой трубе следует

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= 0{,}433 \\ \alpha &= 15{,}2 \end{aligned}\right\}. \tag{6.1}$$

В [2] даны значения $\varkappa$ и α для другого предельного случая $Z \to \infty$. Путем сравнения теоретических и экспериментальных профилей скорости в случае вращения внутренней трубы без осевого течения получено

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= 0{,}4 \\ \alpha &= 7{,}5 \end{aligned}\right\}. \tag{6.2}$$

Можно также указать, что в [3] принято условие

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= 0{,}4 \\ \alpha &= 11{,}5 \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

для случая осевого течения с внутренним вращающимся цилиндром. При таких значениях постоянных получено хорошее совпадение теоретических и экспериментальных значений коэффициентов трения в осевом направлении при $Z \leqslant 2$ и $\xi \to 1$.

Сравнивая (6.1) и (6.2), можно заметить, что значение $\varkappa$ слабо зависит от Z и его можно считать постоянным.

В то же самое время α меняется значительно. Очевидно, параметр α следует считать функцией Z. Однако недостаток экспериментального материала не позволяет построить искомую зависимость. В дальнейшем необходимо экспериментальное исследование данного типа течения с целью определения параметров турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Гиневский, Е. Е. Солодкин. Гидравлическое сопротивление кольцевых каналов. Промышленная аэродинамика, вып. 20. Оборонгиз, 1961.
2. Л. А. Дорфман. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. Физматгиз, 1960.
3. Ю. А. Кошмаров. Гидродинамика и теплообмен турбулентного потока несжимаемой жидкости в зазоре между вращающимися коаксиальными цилиндрами, ИФЖ, V, № 5, 1962.
4. J. Kaye, E. C. Elgar, Modes of adiabatic and diabatic fluid flow ni an annulus with an inner rotating cylinder. Trans. ASME, 80, № 3, 1958.