КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
*Труды, выпуск 35, 1971 г.*

**А. Д. БОЙКОВ, Н. Д. ЕГУПОВ**

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ АППАРАТ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Управление сложными нелинейными объектами, динамические характеристики которых, а также статистические характеристики, воздействующие на систему полезного входного сигнала, и помехи изменяются в широких пределах за время работы системы управления, трудно осуществить априорными методами. При решении этой задачи необходим новый подход, который позволил бы автоматически синтезировать замкнутую систему управления с учетом данных о динамических характеристиках управляемого объекта и статистических свойствах сигналов, поступающих в разные точки системы.

Решение указанной задачи сводится к разработке методов реализации аналитических самонастраивающихся систем автоматического управления (АСНС), теория и принципы построения которых изложены в известных работах В. С. Солодовникова.

В большинстве работ [2], [3], [6], посвященных указанной проблеме, решение ведется в классе линейных систем. В данной работе делается попытка рассмотреть основные задачи, связанные с реализацией принципа аналитической самонастройки в классе нелинейных систем.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ (СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОМЕХИ ИЗВЕСТНЫ)

Как известно [1], одной из основных задач построения АСНС является решение задачи определения оптимальных динамических характеристик замкнутой системы с учетом статистических характеристик полезного входного сигнала и помехи. На вход системы управления обычно поступает полезный входной сигнал, смешанный с помехой. Очевидно, решить задачу оптимизации, не зная статистических свойств ни полезного входного сигнала, ни помехи не представляется возможным. Однако, если известны характеристики хотя бы одной из компонент, такая задача решается.

В некоторых случаях представляется возможным измерить статистические характеристики помехи за время отсутствия полезного входного сигнала. В качестве такого примера можно привести работу приемного устройства, когда между рабочими импульсами можно оценить свойства помехи.

Теория оптимизации линейных систем полно рассмотрена в ряде работ, однако применение ее в прямом виде при построении АСНС связано с существенными трудностями. Трудности возрастают, когда задача решается в классе нелинейных систем. Задачу оптимизации при построении АСНС можно сформулировать так: на основе текущего анализа статистических свойств полезного входного сигнала и помехи необходимо автоматически вычислять оптимальные динамические характеристики замкнутой системы, при этом найденные динамические характеристики должны достаточно просто реализовываться с помощью $RC$ цепей. Реализация, как мы увидим ниже, связана с задачей коррекции.

Здесь предлагается задачу оптимизации решать методом обобщенных спектров. Обобщенным спектром многомерной функции $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ [4], [5] назовем совокупность коэффициентов разложения этой функции по заранее выбранной ортогональной системе.

Если в качестве функции $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ берется многомерная импульсная переходная функция нелинейной системы, то совокупность коэффициентов $\{c_{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$ будем называть обобщенной спектральной характеристикой нелинейной системы (имеется в виду, что найдены коэффициенты разложения всех ядер нелинейной системы).

Как будет показано ниже, функции выбранной ортогональной системы должны поддаваться простой физической реализации с помощью $RC$ цепей.

Итак, пусть на вход системы управления поступает сигнал

$$y(t) = f(t) + n(t),$$

где $f(t)$ — полезный входной сигнал;

$n(t)$ — помеха;

$f(t)$, $n(t)$ — стационарные функции времени, обладающие свойством эргодичности.

Необходимо построить математическую модель такого фильтра, чтобы

$$M[e^2(t)] \to \min, \tag{1}$$

где $e(t) = x(t) - f(t)$ — ошибки работы системы.

Решение задачи оптимизации заключается в нахождении многомерных ядер нелинейной системы $\kappa(\tau)$, $\kappa(\tau_1, \tau_2)$, $\kappa(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, ..., $\kappa(\tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n)$, обеспечивающих выполнение записанного выше критерия, то есть обеспечивающих воспроизведение полезного входного сигнала $f(t)$ с минимальной среднеквадратической ошибкой.

При этом необходимо иметь в виду, что в своей основе принцип построения аналитических самонастраивающихся систем управления накладывает условие, связанное с возможностью снятия реальных физических сигналов с действующей системы. Поэтому метод оптимизации должен учитывать указанный выше фактор.

Легко видеть, что сигнал ошибки $e(t)$ снять невозможно. Поэтому необходимо в результате косвенных измерений найти аналитическую зависимость для дисперсии ошибки $R_{ee} = 0$.

Имеем

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t) = x(t) - f(t) - n(t) = e(t) - n(t),$$

тогда

$$e(t) = \varepsilon(t) + n(t) = x(t) - y(t) + n(t). \tag{2}$$

Из последнего равенства имеем

$$R_{ee}(0) = R_{xx}(0) + R_{yy}(0) - R_{nn}(0) - 2R_{xy}(0) + \\ + 2R_{xn}(0) - 2R_{yn}(0). \tag{3}$$

Теперь легко видеть, что функционал, подлежащий минимизации, имеет вид

$$F = R_{xx}(0) - 2R_{xy}(0) + 2R_{xn}(0). \tag{4}$$

Оптимальный фильтр будем находить в классе нелинейных фильтров, которые могут быть описаны функциональным рядом Вольтерра.

На основе сказанного можно записать:

$$x(t) = \int_0^\infty k(t-\tau_1)\, y(\tau_1)\, d\tau_1 + \int_0^\infty\int_0^\infty k(t-\tau_1,\ t-\tau_2)\, y(\tau_1)\, y(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 + \cdots$$

$$\cdots + \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(t-\tau_1, t-\tau_2, \ldots, t-\tau_n)\, y(\tau_1)\, y(\tau_2) \ldots y(\tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n} k(t-\tau_1,\ t-\tau_2, \ldots,\ t-\tau_n)\, y(\tau_1)\, y(\tau_2) \ldots y(\tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n. \tag{5}$$

Запишем выражения для корреляционных функций $R_{xx}(\xi)$, $R_{xy}(\xi)$, $R_{xn}(\xi)$. Имеем

$$R_{xx}(\xi) = \overline{x(t_1)\,x(t_2)} = \overline{x(t)\,x(t+\xi)}.$$

Для определения $R_{xx}(\xi)$ воспользуемся соотношением (5), которое запишем для моментов времени $t$ и $t_1 = t + \xi$.

Имеем:

$$x(t) = \sum_{n_1=0}^{N}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_1})\, y(t-\tau_1)\, y(t-\tau_2)\ldots$$

$$\ldots\; y(t-\tau_{n_1})\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{n_1},$$

$$x(t+\xi) = \sum_{n_2=0}^{N}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n_2}')\, y(t+\xi-\tau_1')\, y(t+\xi-\tau_2')\ldots$$

$$\ldots\, y(t+\xi-\tau_{n_2}')\, d\tau_1'\, d\tau_2'\, d\tau_{n_2}'.$$

Из этих равенств легко получить искомую зависимость

$$R_{xx}(\xi) = \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_1})\, k(\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n_2}') \times$$

$$\times\, \overline{y(t-\tau_1)\, y(t-\tau_2)\ldots y(t-\tau_{n_1})\, y(t+\xi-\tau_1')\, y(t+\xi-\tau_2')\ldots y(t+\xi-\tau_{n_2}')} \times$$

$$\times\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{n_2}' = \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_{n_1})\, k(\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n_2}') \times$$

$$\times\, \alpha_{yy}^{n_1+n_2}(\xi, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_1}, \tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n_2}')\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{n_2}'. \qquad (6)$$

Откуда имеем выражение для дисперсии выходного сигнала:

$$R_{xx}(0) = \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_1})\, k(\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n_2}') \times$$

$$\times\, \alpha_{yy}^{n_1+n_2}(\tau_1\; \tau_2, \ldots, \tau_{n_1}, \tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n_2}')\, d\tau_1\, d\tau_2, \ldots, d\tau_{n_2}'. \qquad (7)$$

Выражение для корреляционной функции $R_{xy}(\xi)$ можно найти по формуле

$$R_{xy}(\xi) = \overline{x(t)\, y(t+\xi)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, \overline{y(t-\tau_1)\, y(t-\tau_2)\ldots y(t-\tau_n)\, y(t+\xi)}\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, \alpha_{yy}^{n+1}(\xi, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_n. \qquad (8)$$

Откуда получаем выражение для дисперсии $R_{xy}(0)$

$$R_{xy}(0) = \sum_{n=0}^{N}\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, \alpha_{yy}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n. \qquad (9)$$

Аналогично можно записать:

$$R_{xn}(\xi) = \sum_{n=0}^{N} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, \alpha_{yn}^{n+1}(\xi, \tau_1 \tau_2, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1 d\tau_1 \ldots d\tau_n. \quad (10)$$

На основе зависимости (10) справедлива формула

$$R_{xn}(0) = \sum_{n=0}^{N} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, \alpha_{yn}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n. \quad (11)$$

Итак, записанные выше зависимости дают возможность выражение для функционала $F$ переписать в виде

$$F = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_1})\, k(\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n_2}') \times$$
$$\times \alpha_{yy}^{n_1+n_2}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_1}, \tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n_2}')\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n -$$
$$- 2 \sum_{n=0}^{N} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1 \tau_2, \ldots, \tau_n)\, \alpha_{yy}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n +$$
$$+ 2 \sum_{n=0}^{N} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, \alpha_{yn}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n. \quad (12)$$

Представим многомерные ядра нелинейной системы в форме Винера, т. е. в виде многомерного ортогонального ряда:

$$k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=0}^{\infty} C_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\, \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n), \quad (13)$$

где коэффициенты $\{C_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\}$ неизвестны.

Учитывая это представление, функционал $F$ принимает вид

$$F = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}=0}^{\infty} \sum_{i_1', i_2', \ldots, i_{n_2}'=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} C_{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}} C_{i_1', i_2', \ldots, i_{n_2}'} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \times$$
$$\times \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2), \ldots, \varphi_{i_{n_1}}(\tau_{n_1})\, \varphi_{i_1'}(\tau_1')\, \varphi_{i_2'}(\tau_2') \ldots \varphi_{i_{n_2}'}(\tau_{n_2}') \times$$
$$\times \alpha_{yy}^{n_1+n_2}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_1}, \tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n_2}')\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{n_2}' -$$
$$- 2 \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} C_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n) \times$$
$$\times \alpha_{yy}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \ldots d\tau_n + 2 \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \times$$
$$\times \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n)\, \alpha_{yn}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \ldots d\tau_n =$$
$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}=0}^{\infty} \sum_{i_1', i_2', \ldots, i_{n_2}'=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} C_{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}} C_{i_1', i_2', \ldots, i_{n_2}'} \times$$
$$\times W_{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}, i_1', i_2', \ldots, i_{n_2}'} - 2 \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} C_{i_1, i_2, \ldots, i_n} W_{i_1, i_2, \ldots, i_n}, \quad (14)$$

где

$$W_{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1} i'_1, i', \ldots, i'_{n_2}} = \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \varphi_{i_1}(\tau_1) \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_{n_1}}(\tau_{n_1}) \times$$

$$\times \varphi_{i'_1}(\tau'_1) \varphi_{i'_2}(\tau'_2) \ldots \varphi_{i'_{n_2}}(\tau'_{n_2}) \alpha_{yy}^{n_1+n_2}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_1}, \tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_{n_2}) \times$$

$$\times d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau'_{n_2}, \tag{15}$$

$$W_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \varphi_{i_1}(\tau_1) \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n) [\alpha_{yy}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) +$$

$$+ \alpha_{yn}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)] d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n. \tag{16}$$

Используя обычный прием минимизации, то есть находя частные производные от $F$ по элементам обобщенного спектра $\{C_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\}$, можно получить окончательную зависимость, которая дает возможность найти оптимальные значения элементов обобщенного спектра $\{C_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\}$.

$$\sum_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_{n_2}=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{N} C_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_{n_2}} W_{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1} i'_1, i'_2, \ldots, i'_{n_2}} = W_{i_1, i_2, \ldots, i_n},$$

$$(i_1 = i_2 = \ldots = i_n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА АСНС

Теперь рассмотрим вопросы построения вычислительных устройств, с помощью которых можно было бы определять элементы, входящие в зависимость (14) в темпе с процессом, т. е. в процессе эксплуатации системы управления.

Покажем, что

$$W_{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1} i'_1, i'_2, \ldots, i'_{n_2}}(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t g_{i_1}(\tau) g_{i_2}(\tau) \ldots g_{i_{n_1}}(\tau) \times$$

$$\times g_{i'_1}(\tau) g_{i'_2}(\tau) \ldots g_{i'_{n_2}}(\tau) d\tau, \tag{18}$$

где

$$g_i(t) = \int\limits_0^t y(t-\tau) \varphi_i(\tau) d\tau. \tag{19}$$

Действительно, можно записать:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \Big[ \int\limits_0^\infty y(t-\tau_1) \varphi_{i_1}(\tau_1) d\tau_1 \int\limits_0^\infty y(t-\tau_2) \varphi_{i_2}(\tau_2) d\tau_2 \cdots$$

$$\cdots \int\limits_0^\infty y(t-\tau_n) \varphi_{i_{n_1}}(\tau_{n_1}) d\tau_{n_1} \int\limits_0^\infty y(t-\tau'_1) \varphi_{i'_1}(\tau'_1) d\tau'_1 \int\limits_0^\infty y(t-\tau'_2) \varphi_{i'_2}(\tau'_2) d\tau'_2 \cdots$$

$$\cdots \int\limits_0^\infty y(t-\tau'_{n_2}) \varphi_{i'_{n_2}}(\tau'_n) d\tau'_{n_2} \Big] dt =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Big[ \frac{1}{T} \int_0^T y(t-\tau_1)\, y(t-\tau_2) \ldots y(t-\tau_{n_1}) \times$$

$$\times y(t-\tau_1')\, y(t-\tau_2') \ldots y(t-\tau_{n_2}')\, dt \Big] \times$$

$$\times \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_{n_1}}(\tau_{n_1})\, \varphi_{i_1'}(\tau_1')\, \varphi_{i_2'}(\tau_2') \ldots \varphi_{i_{n_2}'}(\tau_{n_2}')\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{n_2}' =$$

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \alpha_{yy}^{n_1+n_2}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_2}, \tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n_2}')\, \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_{n_1}}(\tau_{n_2}) \times$$

$$\times \varphi_{i_1'}(\tau_1')\, \varphi_{i_2'}(\tau_2') \ldots \varphi_{i_{n_2}'}(\tau_{n_2}')\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{n_2}' .$$

Таким образом, формула доказана.

Покажем, что

$$W_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \frac{1}{T} \int_0^t y(\tau)\, g_{i_1}(\tau)\, g_{i_2}(\tau) \ldots g_{i_n}(\tau)\, d\tau - A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} . \quad (20)$$

Имеем:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \int_0^\infty y(t-\tau_1)\, \varphi_{i_1}(\tau_1)\, d\tau_1 \int_0^\infty y(t-\tau_2)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) d\tau_2 \cdots \int_0^\infty y(t-\tau_n) \varphi_{i_n}(\tau_n) d\tau_n =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Big[ \frac{1}{T} \int_0^T y(t)\, y(t-\tau_1)\, y(t-\tau_2) \ldots y(t-\tau_n)\, dt \Big] \times$$

$$\times \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n)\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_n =$$

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n)\, \alpha_{yy}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_n. \quad (21)$$

Формула доказана.

В зависимости (20)

$$A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n)\, \alpha_{nn}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots ; \tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n, \quad (22)$$

т. е. здесь предполагается, что статистические свойства полезного входного сигнала и помехи независимы.

При выводе этих формул предполагалось, что векторная случайная функция

$$\varphi\,[y(t_1)\, y(t_2) \ldots y(t_n)] = y(t_1)\, y(t_2) \ldots y(t_n)$$

обладает свойством эргодичности, которое, как известно, выражается формулой

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^n} \int_0^T \cdots \int_0^T \left(1 - \frac{\tau_1}{T}\right) \cdots \left(1 - \frac{\tau_n}{T}\right) \operatorname{Re} \{\alpha_y(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\} \times$$

$$\times d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n = 0. \quad (23)$$

Свойство эргодичности можно использовать с целью построения вычислительного устройства для получения моментов высокого порядка непосредственно по реализации соответствующего случайного процесса.

Действительно, пусть имеется случайный процесс $f(t)$. Необходимо найти его моменты порядка $n+1$, т. е.

$$\alpha_{ff}^{n+1} = \overline{f(t)\, f(t+\tau_1)\, f(t+\tau_2) \cdots f(t+t_n)}. \tag{24}$$

Можно записать

$$\alpha_{ff}^{n+1}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, f(t-\tau_1)\, f(t-\tau_2) \ldots (t-\tau_n)\, dt. \tag{25}$$

Представим $\alpha_{ff}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ в виде многомерного ортогонального ряда

$$\alpha_{ff}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=0}^{\infty} C_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n), \tag{26}$$

где коэффициенты ортогонального разложения определяются по формуле

$$C_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \alpha_{ff}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n) \times \\ \times d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_n. \tag{27}$$

Подставляя формулу (25) в последнюю зависимость, можно получить

$$C_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, f(t-\tau_1)\, f(t-\tau_2) \ldots f(t-\tau_n)\, dt \times \right. \\ \times \varphi_{i_1}(\tau_1)\, \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n)\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n. \tag{28}$$

На основе эргодической гипотезы следует, что при неограниченном увеличении аргументов $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ корреляционная функция стремится к нулю.

Тогда можно записать:

$$C_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left[ \int_0^{\infty} \varphi_{i_1}(\tau_1)\, f(t-\tau_1)\, d\tau_1 \int_0^{\infty} \varphi_{i_2}(\tau_2)\, f(t-\tau_2)\, d\tau_2 \cdots \right. \\ \left. \cdots \int_0^{\infty} \varphi_{i_n}(\tau_n)\, f(t-\tau_n)\, d\tau_n \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, f_1(t)\, f_2(t) \ldots f_n(t)\, dt. \tag{29}$$

Устройство, реализующее равенство (29), назовем многомерным ортогональным коррелятором.

Если мы теперь с помощью многомерного ортогонального коррелятора представим моменты $\alpha_{yy}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ и $\alpha_{yn}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$

в виде

$$\alpha_{yy}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=0}^{\infty} B_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \varphi_{i_1}(\tau_1) \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n), \quad (30)$$

$$\alpha_{yn}^{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=0}^{\infty} A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \varphi_{i_1}(\tau_1) \varphi_{i_2}(\tau_2) \ldots \varphi_{i_n}(\tau_n), \quad (31)$$

то матрица $W_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ принимает вид

$$W_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = B_{i_1, i_2, \ldots, i_n} - A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}. \quad (32)$$

Предложенное вычислительное устройство значительно упрощает процесс вычисления оптимальных динамических характеристик нелинейных систем и вместе с тем может использоваться как самостоятельное устройство для статистического анализа случайных процессов. С помощью этого устройства можно анализировать и нестационарные случайные процессы, однако в этом случае необходимо применять принцип текущего осреднения.

Процесс синтеза оптимальных динамических характеристик нелинейных систем значительно упрощается, если случайные процессы, действующие на систему, нормальны, т. е. имеют гауссовский закон распределения.

В этом случае, как известно, справедливо условие:

$$\alpha_{ff}^{2m}(t_1, t_2, \ldots, t_{2m}) = M\{f(t_1) f(t_2) \ldots f(t_{2m})\} = \sum \Pi R(t_i, t_j), \quad (33)$$

$$\alpha_{ff}^{2m+1}(t_1, t_2, \ldots, t_{2m+1}) = M\{f(t_1) f(t_2) \ldots f(t_{2m+1})\} = 0, \quad (34)$$

где $R(t_i, t_j) = \alpha_{ff}^2(t_i, t_j)$, а запись $\sum \Pi$ означает, что последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_{2m}$ разбивается на произвольные пары, произведение $\Pi$ берется по всем различным парам этого разбиения, а сумма $\sum$ берется по всем разбиениям.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ (СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛЕЗНОГО ВХОДНОГО СИГНАЛА ИЗВЕСТНЫ)

Для рассматриваемого случая можно записать соотношение

$$e(t) = x(t) - f(t).$$

Откуда можно записать

$$R_{ee}(0) = R_{xx}(0) - 2R_{xf}(0) + R_{ff}(0).$$

Функционал, подлежащий минимизации, можно записать в виде

$$F = R_{xx}(0) - 2R_{xf}(0). \quad (36)$$

Имеем:

$$R_{xx}(0)=\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty k(\tau_1,\ \tau_2,\ldots,\ \tau_{n_1})\,k(\tau_1',\ \tau_2',\ldots,\ \tau_{n_2}')\times$$

$$\times\,\alpha_{yy}^{n_1+n_2}(\tau_1,\ \tau_2,\ldots,\ \tau_{n_1},\ \tau_1',\ \tau_2',\ldots,\ \tau_{n_2}')\,d\tau_1\,d\tau_2,\ldots,\ d\tau_{n_2}', \qquad (37)$$

$$R_{xf}(0)=\sum_{n=0}^{N}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty k(\tau_1,\ \tau_2,\ldots\tau_n)\,\alpha_{fy}^{n+1}(\tau_1,\ \tau_2,\ldots,\ \tau_n)\,d\tau_1,\ d\tau_2,\ldots,\ d\tau_n. \qquad (38)$$

Используя ортогональное представление ядер нелинейной системы, имеем:

$$F=\sum_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_{n_1}=0}^{\infty}\ \sum_{i_1',\,i_2',\ldots,\,i_{n_2}'=0}^{\infty}\ \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}C_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_{n_1}}C_{i_1',\,i_2',\ldots,\,i_{n_2}'}\times$$

$$\times\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\varphi_{i_1}(\tau_1)\,\varphi_{i_2}(\tau_2)\ldots\varphi_{i_{n_1}}(\tau_{n_1})\,\varphi_{i_1'}(\tau_1')\,\varphi_{i_2'}(\tau_2')\ldots\varphi_{i_{n_2}'}(\tau_{n_2}')\times$$

$$\times\,\alpha_{yy}^{n_1+n_2}(\tau_1,\ \tau_2,\ldots,\ \tau_{n_1},\ \tau_1',\ \tau_2',\ldots,\ \tau_{n_2}')\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_{n_2}'-$$

$$-\,2\sum_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_n=0}^{\infty}\ \sum_{n=0}^{N}\overline{C}_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_n}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\varphi_{i_1}(\tau_1)\,\varphi_{i_2}(\tau_2)\ldots\varphi_{i_n}(\tau_n)\times$$

$$\times\,\alpha_{fy}^{n+1}(\tau_1,\ \tau_2,\ldots,\ \tau_n)\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_n=$$

$$=\sum_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_{n_1}=0}^{\infty}\ \sum_{i_1',\,i_2',\ldots,\,i_{n_2}'=0}^{\infty}\ \sum_{n_2=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}C_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_{n_1}}C_{i_1',\,i_2',\ldots,\,i_{n_2}'}\times$$

$$\times\,W_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_{n_2}'}-2\sum_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_n=0}^{\infty}\ \sum_{n=0}^{N}\overline{C}_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_n}\overline{W}_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_n}, \qquad (39)$$

где

$$\overline{W}_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_n}=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\varphi_{i_1}(\tau_1)\,\varphi_{i_2}(\tau_2)\ldots\varphi_{i_n}(\tau_n)\,\alpha_{fj}^{n+1}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_n. \qquad (40)$$

Минимизируя функционал (39), приходим к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений, решая которую одним из точных или приближенных методов, можно найти неизвестные элементы оптимальной обобщенной спектральной характеристики.

Все рассуждения, которые приведены выше (см. раздел: вычислительные устройства АСНС), справедливы и в рассматриваемом случае.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен спектральный метод построения оптимизатора, причем задача решается в классе нелинейных систем. Получены конечные алгоритмы, которые принципиально могут быть реализованы с помощью средств аналоговой и цифровой вычислительной техники. Вычислительное устройство значительно усложняется по мере увеличения $N$ и элементов ОСХ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников. (ред.). Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления, Машиностроение, 1965.

2. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, 1960.

3. А. А. Горский. Автоматическая оптимальная фильтрация, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 5, 1962.

4. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Применение рядов Вольтерра и обобщенных спектров для анализа и синтеза нелинейных САУ, глава XVIII в кн. «Техническая кибернетика», т. 3, Машиностроение, 1969.

5. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Ортогональный метод анализа нелинейных САУ на основе понятия моментов. Тезисы докладов V Всесоюзного научно-технического совещания по созданию и внедрению САУ с применением вычислительной техники. Тбилиси, 1967.

6. А. Д. Бойков, Н. Д. Егупов. Метод реализации многомерной аналитической самонастраивающейся системы автоматического управления. Труды КуАИ им. С. П. Королева, вып. 29, Куйбышев, 1967.