КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

**А. Н. ДМИТРИЕВ, А. Д. БОЙКОВ,
Н. Д. ЕГУПОВ**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АВТОМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается метод автоматического синтеза оптимального фильтра по критерию минимума СКО. Метод базируется на широком применении ЦВМ. Решение задачи находится в виде ортогонального ряда.

Рассмотрим фильтр, схема которого изображена на рис. 1. На вход фильтра подается случайный сигнал

$$x(t) = f(t) + n(t),$$

где $f(t)$ — полезный входной сигнал, «почти стационарная» случайная функция на довольно больших интервалах времени ($M_f=0$);

$n(t)$ — помеха, стационарная случайная функция, статистические свойства которой известны ($M_n=0$).

В задачу фильтра входит так автоматически выбрать свои характеристики, чтобы сигнал $f(t)$ воспроизводился с минимальной среднеквадратической ошибкой. Для этого необходимо ввести свой-

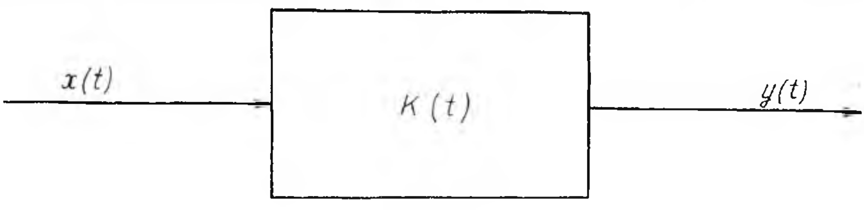

Рис. 1.

ство приспособления или самонастройки, так как статистические характеристики сигнала $f(t)$ изменяются в весьма широких пределах за время работы фильтра. Предположим, что на достаточно больших интервалах времени сигнал $f(t)$ можно считать «почти стационарной случайной функцией». Естественно, статистические свойства полезного входного сигнала $f(t)$ априори неизвестны.

Для выбора наиболее удобных с точки зрения практической реализации соотношений запишем следующие формулы [4].

Выражение для мгновенной ошибки имеет вид

$$e(t) = y(t) - f(t) = \varepsilon(t) + x(t) - f(t) = \varepsilon(t) + n(t),$$

где $\varepsilon(t) = y(t) - x(t)$.

Тогда легко видеть справедливость следующей зависимости:

$$\overline{\sigma}^2 = R_{ee}(0) = R_{\varepsilon\varepsilon}(0) + 2R_{\varepsilon n}(0) + R_{nn}(0) =$$
$$= R_{yy}(0) - 2R_{yx}(0) + R_{xx}(0) + 2R_{yn}(0) - 2R_{xn}(0) + R_{nn}(0). \quad (1)$$

В связи с тем, что третий, пятый и шестой члены последнего выражения не зависят от динамических свойств фильтра, их можно не принимать во внимание.

Для определения оптимальных динамических характеристик фильтра (оптимальной обобщенной спектральной характеристики) можно использовать следующую основную зависимость:

$$\overline{\sigma}_1^2 = R_{yy}(0) - 2R_{yx}(0) + 2R_{yn}(0). \quad (2)$$

Итак, требуется найти такие динамические свойства фильтра, при которых обеспечивался бы минимум функционала (2).

Как и в [1], импульсную функцию динамической системы представим в виде

$$K(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i L_i(t). \quad (3)$$

Подробно разберем каждый член выражения (2). В первую очередь запишем формулу для первого члена выражения (2), используя зависимость (3). Формула для $R_{yy}(0)$ имеет вид

$$y^2 = R_{yy}(0) = \int_0^\infty\int_0^\infty K(\tau_1) K(\tau_2) R_{xx}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 =$$
$$= \frac{\rho_{x0}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(j\omega)|^2\, |W_x(j\omega)|^2\, d\omega = \rho_{x0}\int_0^\infty K_э^2(t)\, dt,$$

так как в этом случае

$$y^2 = \rho_{x0}\int_0^\infty\int_0^\infty K_э(\tau_1) K_э(\tau_2)\, \delta(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 =$$
$$= \rho_{x0}\int_0^\infty K_э(\tau_1) K_э(\tau_1)\, d\tau_1 = \rho_{x0}\int_0^\infty K_э^2(\tau)\, d\tau. \quad (4)$$

В этих формулах $K_э(t) = \int_0^t K(\tau) K_{ф}(t-\tau)\, d\tau$ -импульсная переходная функция последовательного соединения двух фильтров: формирующего и фильтра, динамические характеристики которого находятся.

Пусть

$$K_э(t) = \sum_{i=0}^{n} g_i L_i(t),$$

$$K(t) = \sum_{i=0}^{n} C_i L_i(t),$$

$$K_2(t) = \sum_{i=0}^{n} g_i' L_i(t). \qquad (5)$$

Тогда

$$R_{yy}(0) = \overline{y}^2 = \rho K \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2, \qquad (6)$$

где коэффициенты g_i ($i=0, 1, 2, ...$) для функций Лягерра выражаются формулой

$$g_i = \sum_{i=0}^{n} c_i a_{ij},$$

где a_{ij} — коэффициенты, выраженные через элементы обобщенной спектральной характеристики формирующего фильтра.

Таким образом, формула для первой составляющей выражения, подлежащего оптимизации, найдена; в коэффициенты g_i входят параметры, подлежащие определению.

Теперь запишем выражение для второй составляющей выражения (2)

$$R_{yx}(0) = \int_0^{\infty} K(\tau) R_{xx}(\tau)\, d\tau = \sum_{i=0}^{n} C_i \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\; L_i(\tau)\, d\tau. \qquad (7)$$

Представим корреляционную функцию $R_{xx}(\tau)$ в виде разложения по некоторой системе ортогональных функций (той же, которая используется для разложения импульсной переходной функции фильтра)

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{i=0}^{n} V_i L_i(\tau). \qquad (8)$$

Коэффициенты V_i можно непрерывно вычислять с помощью схемы ортогонального коррелятора [2]. В качестве ортогональных фильтров, необходимых для реализации схемы ортогонального коррелятора, целесообразно использовать фильтры, реализующие ортогональные функции Лягерра или ортогонализированные экспоненциальные функции.

Перепишем уравнение (7) с учетом (8)

$$R_{yx}(0) = \sum_{i=1}^{n} C_i \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} V_i L_i(\tau) \right] L_i(\tau)\, d\tau = \sum_{i=0}^{n} C_i V_i. \tag{9}$$

Аналогично можно записать формулу для последнего члена зависимости (2)

$$R_{yn}(0) = \int_0^{\infty} K(\tau) R_{nx}(\tau)\, d\tau = \sum_{i=0}^{n} C_i \int_0^{\infty} R_{nx}(\tau) L_i(\tau)\, d\tau = \sum_{i=0}^{n} C_i V'_i, \tag{10}$$

$$R_{nx}(\tau) = \sum_{i=0}^{n} V'_i L_i(\tau) \tag{11}$$

Коэффициенты $V_i{}^1$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) непрерывно вычисляются с помощью ортогонального коррелятора.

С учетом (6), (9) и (10) зависимость (2) перепишется в виде

$$\overline{\varepsilon}_1^2 = \rho K \sum_{i=0}^{n} g_i^2 - 2 \sum_{i=0}^{n} C_i V_i + 2 \sum_{i=0}^{n} C_i V'_i. \tag{12}$$

Для определения минимума функционала (2) возьмем частные производные по C_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) в формуле (12) и приравняем каждое из полученных уравнений нулю. Получим следующую систему алгебраических уравнений (для $n=7$):

$$\left.\begin{array}{l}
E_{00}C_0+E_{01}C_1+E_{02}C_2+E_{03}C_3+E_{04}C_4+E_{05}C_5+E_{06}C_6+E_{07}C_7 = \dfrac{V_0 - V'_0}{\rho K} \\
E_{10}C_0+E_{11}C_1+E_{12}C_2+E_{13}C_3+E_{14}C_4+E_{15}C_5+E_{16}C_6+E_{17}C_7 = \dfrac{V_1 - V'_1}{\rho K} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
E_{70}C_0+E_{71}C_1+E_{72}C_2+E_{73}C_3+E_{74}C_4+E_{75}C_5+E_{76}C_6+E_{77}C_7 = \dfrac{V_7 - V'_7}{\rho K}
\end{array}\right| \tag{13}$$

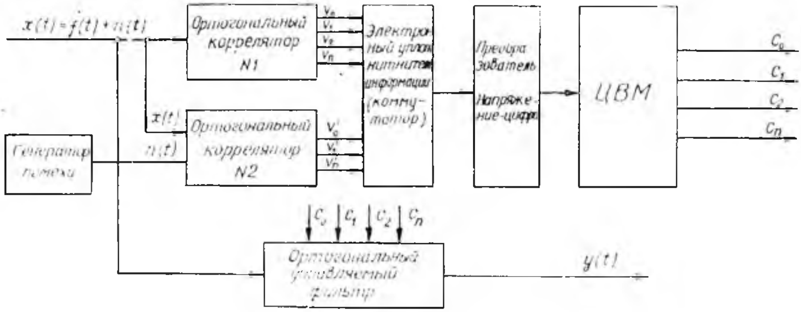

Рис. 2.

В системе (13) коэффициенты E_{ij} вычисляются через элементы обобщенной спектральной характеристики формирующего фильтра [1].

Так как задача фильтра состоит в том, чтобы выделить полезный входной сигнал с неизвестными априори статистическими характеристиками с наименьшей среднеквадратической ошибкой из помехи, статистические характеристики которой известны, то для вычисления коэффициентов V_i^1 $(i=0, 1, 2, ..., n)$, где используется взаимная корреляционная функция входного сигнала $x(t)$ и помехи $n(t)$, необходимо использовать специальный генератор случайного процесса, который генерирует случайный процесс с заранее заданными статистическими характеристиками. Такая идея уже использовалась некоторыми авторами при разработке схем автоматической оптимизации [3].

Кратко опишем работу схемы, изображенной на рис. 2.

Входной сигнал $x(t)=f(t)+n(t)$ поступает на вход ортогонального коррелятора № 1, с выхода которого снимаются коэффициенты $\{V_i\}$. Кроме того, что эти коэффициенты входят в свободный член алгебраических уравнений системы (13), через них с помощью элементарных алгебраических равенств выражаются элементы обобщенной спектральной характеристики формирующего фильтра, через которые находятся коэффициенты E_{ij}.

На вход ортогонального коррелятора № 2 подаются сигналы $x(t)$ и $n(t)$, а с его выхода снимаются коэффициенты ортогонального разложения взаимной корреляционной функции $R_{xn}(\tau)$. Эти коэффициенты в прямом виде используются в системе (13).

Все коэффициенты V_i, V_i $(i=0, 1, 2, ...)$ через коммутатор и преобразователь напряжение — цифра подаются в ЦВМ, которая обрабатывает по указанному здесь алгоритму всю информацию и решает систему алгебраических неоднородных уравнений (13).

Найденные коэффициенты c_i $(i=0, 1, 2, ... n)$ подаются на управляемый ортогональный фильтр, с помощью которого и осуществляется оптимальная фильтрация полезного входного сигнала $f(t)$.

Рассмотрим случай, когда $f(t)$ и $n(t)$ не коррелированы. Этот случай на практике встречается довольно часто и поэтому на нем остановимся отдельно.

В последнем случае $R_{nf}(\tau)=0$, и в связи с этим равенство (12) перепишется в виде

$$\bar{\varepsilon}_1^2 = \rho K \sum_{i=0}^{n} g_i^2 - 2\sum_{i=0}^{n} C_i V_i + 2\sum_{i=0}^{n} C_i V_i'',$$

где V_i'' $(i = 0, 1, 2, ...)$ — коэффициенты ортогонального разложения корреляционной функции помехи $R_{nn}(\tau)$, т. е.

$$R_{nn}(\tau)= \sum_{i=0}^{n} V_i'' L_i(\tau).$$

Так как в рассматриваемом случае коэффициенты $\{V_i''\}$ могут быть вычислены заранее, то в схеме самонастраивающегося ортогонального фильтра отпадает необходимость иметь ортогональный коррелятор № 2 и генератор случайного сигнала, и, таким образом, все вычислительное устройство значительно упрощается.

В рассматриваемом методе, так же, как и в предыдущем, можно показать, что:

1) система (13) имеет единственное решение;

2) при увеличении времени интегрирования дисперсия ошибки фильтрации сигнала $f(t)$ с помощью ортогонального управляемого фильтра приближается к величине дисперсии ошибки, если бы фильтрация осуществлялась фильтром с идеальным оператором.

В рассматриваемом случае следует предусмотреть ограничители сигналов, подаваемых на управляемый ортогональный фильтр [1].

Кратко рассмотрим вопрос, когда входной сигнал имеет регулярную составляющую $g(t)$. В этом случае необходимо решать задачу на условный экстремум, используя метод неопределенных множителей Лагранжа (накладываются ограничения на коэффициенты ошибок).

Таким образом, пусть входной сигнал имеет вид

$$x(t) = g(t) + f(t) + n(t).$$

Тогда задача должна формулироваться так. Найти минимум функционала

$$\bar{\varepsilon}_1^2 = \rho K \sum_{i=0}^{n} g_i^2 - 2\sum_{i=0}^{n} C_i V_i + 2\sum_{i=0}^{n} C_i V_i'$$

при выполнении уравнений связи:

$$\Phi_1 = C_0' - 1 + \sum_{i=0}^{n} C_i A_i,$$

$$\Phi_2 = C_1' - \sum_{i=0}^{n} C_i B_i,$$

$$\Phi_3 = C_2' + \sum_{i=0}^{n} C_i D_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Вспомогательная функция Лагранжа имеет вид

$$F = \rho K \sum_{i=0}^{n} g_i^2 - 2\sum_{i=0}^{n} C_i V_i + 2\sum_{i=0}^{n} C_i V_i' + \lambda_1 \sum_{i=0}^{n} C_i A_i -$$

$$- \lambda_2 \sum_{i=0}^{n} C_i B_i + \lambda_3 \sum_{i=0}^{n} C_i D_i + \cdots$$

Путем дифференцирования выражения для вспомогательной функции Лагранжа по коэффициентам c_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) и приравнивания полученных зависимостей нулю получаем n алгебраических уравнений, решая которые совместно с уравнениями связи, получим искомую оптимальную в указанном смысле, обобщенную спектральную характеристику.

Блок-схема оптимального фильтра, изображенная на рис. 2, существенных изменений не претерпевает.

Выше был рассмотрен случай, когда осуществляется выделение полезного входного сигнала с неизвестными статистическими характеристиками из помех, статистические параметры которых известны.

Однако на практике может встретиться обратный случай — параметры помехи не известны, а параметры полезного входного сигнала можно априори задать. В этом случае можно осуществить фильтрацию, используя описанную выше методику определения оптимальной обобщенной спектральной характеристики.

Все ограничения, которые были наложены на полезный входной сигнал и помеху, имеют силу и в этом случае.

Запишем выражение для дисперсии ошибки воспроизведения полезного входного сигнала $f(t)$

$$R_{ee}(0) = R_{yy}(0) - 2R_{yf}(0) + R_{ff}(0). \tag{14}$$

Так как в уравнении (14) член $R_{ff}(0)$ не зависит от динамических свойств фильтра, то, следовательно, при решении задачи определения оптимального оператора член $R_{ff}(0)$ можно не учитывать, и, таким образом, надо находить минимум функционала

$$\overline{\varepsilon^2} = R_{yy}(0) - 2R_{yf}(0). \tag{15}$$

Запишем следующие равенства:

$$R_{yy}(0) = \int_0^\infty\int_0^\infty K(\tau_1)\,K(\tau_2)\,R_{xx}(\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 = \frac{\rho_{x0}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(j\omega)|^2|W_x(j\omega)|^2 d\omega =$$

$$= \rho_{x0} K \sum_{i=0}^{n} g_i^2, \tag{16}$$

$$R_{yf}(0) = \int_0^\infty K(\tau) R_{fx}(\tau)\,d\tau = \sum_{i=0}^{n} C_i \overline{V}_i, \tag{17}$$

где

$$\overline{V}_i = \int_0^\infty R_{fx}(\tau)\,L_i(\tau)\,d\tau,$$

таким образом, взаимная корреляционная функция представляется в виде ортогонального ряда

$$R_{fx}(\tau) = \sum_{i=0}^{n} \overline{V}_i L_i(\tau). \tag{18}$$

Итак, функционал, минимум которого необходимо найти, с учетом (16) и (17) запишется в виде

$$\overline{\varepsilon^2} = \rho_{x0} K \sum_{i=0}^{n} g_i^2 - 2 \sum_{i=0}^{n} C_i \overline{V}_i. \tag{19}$$

Используя прямые методы вариационного исчисления, получим следующую систему алгебраических уравнений ($n=7$):

$$\begin{aligned} &E_{00}C_0+E_{01}C_1+E_{02}C_2+E_{03}C_3+\cdots+E_{07}C_7=\frac{\overline{V}_0}{\rho_{x0}K},\\ &E_{10}C_0+E_{11}C_1+E_{12}C_2+E_{13}C_3+\cdots+E_{17}C_7=\frac{\overline{V}_1}{\rho_{x0}K},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &E_{70}C_0+E_{71}C_1+E_{72}C_2+E_{73}C_3+\cdots+E_{77}C_7=\frac{\overline{V}_7}{\rho_{x0}K}. \end{aligned} \tag{20}$$

Решение системы (20) и приводит к нахождению оптимальной обобщенной спектральной характеристики.

Остановимся на возможных вариантах автоматического определения параметров, входящих в систему (20).

В первую очередь, в систему (20) входят коэффициенты E_{ij}, способ автоматического определения которых был указан выше (с помощью ортогонального коррелятора № 1 и ЦВМ).

Рассмотрим методику автоматического определения коэффициентов $\overline{V}_i$.

Сначала рассмотрим случай, когда $R_{fn}(\tau) \neq 0$. При этом условии для получения коэффициентов $\overline{V}_i$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) необходимо иметь генератор случайных процессов (запись случайного процесса с заданными статистическими характеристиками), с помощью которого можно получить процесс $f(t)$, а используя ортогональный коррелятор—непрерывно выделять коэффициенты $\overline{V}_i$.

Если $R_{fn}(\tau) = 0$, $R_{fx}(\tau) = R_{ff}(\tau)$, тогда коэффициенты $\overline{V}_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) в соответствии с формулой

$$\overline{V}_i = \int_0^\infty R_{ff}(\tau) L_i(\tau)\, d\tau \tag{21}$$

вычисляются заранее и хранятся в памяти ЦВМ.

Работа системы приспособления в рассматриваемом случае мало чем отличается от работы системы, блок-схема которой приведена на рис. 2 и поэтому подробное описание здесь не приводится.

Система (20) очень удобна не только для автоматического определения оптимальной ортогональной спектральной характеристики, но легко позволяет решить задачу, имеющую самостоятельный практический интерес (имеется в виду задача определения оптимальной обобщенной спектральной характеристики по критерию минимума среднеквадратической ошибки при известных априори статистических характеристиках полезного входного сигнала и помехи).

Итак, пусть на вход априорной системы поступает сигнал

$$x(t) = f(t) + n(t).$$

Кроме того, пусть известны

$$R_{ff}(\tau),\ R_{fn}(\tau) \text{ и } R_{fn}(\tau) = 0.$$

Тогда

$$R_{xx}(\tau) = R_{ff}(\tau) + R_{nn}(\tau). \qquad (22)$$

В этом случае процедура вычисления оптимальной спектральной характеристики складывается из выполнения операций:

1) нахождения передаточной функции формирующего фильтра, если корреляционная функция входного сигнала имеет вид

$$R_{xx}(\tau) = R_{ff}(\tau) + R_{nn}(\tau);$$

2) вычисления элементов ОСХ формирующего фильтра;

3) вычисления коэффициентов $\overline{E}_{ij}$;

4) вычисления коэффициентов V_i;

5) решения системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (20).

Для одноканальных систем автоматического управления принципиально невозможно построить схему самонастройки, осуществляющую оптимальную автоматическую фильтрацию, если априори неизвестны статистические свойства полезного входного сигнала или помехи. Такая возможность имеется в случае двухканальных систем, когда информация (полезный входной сигнал) поступает от двух источников и затем смешивается с некоррелированными друг с другом шумами. Этот вопрос очевидным образом решается рассмотренным спектральным методом.

В заключении отметим, что все рассмотренные методы автоматического определения ОСХ, сводящиеся к решению систем алгебраических уравнений, при условии, что входные сигналы «почти стационарны» на довольно длительных интервалах времени T, непрерывны и ограничены по модулю, позволяют найти координаты фильтров в выбранном конечном ортогональном базисе, обеспечивающие дисперсию ошибки воспроизведения полезного входного сигнала при $t \to \infty$, близкую к величине, которая имела бы место на выходе оптимального фильтра.

ВЫВОДЫ

В работе решена задача автоматического синтеза оптимального фильтра по критерию минимума среднеквадратической ошибки. Решение задачи находится в виде ортогонального ряда.

Предложенный метод базируется на широком применении цифровых вычислительных машин.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Дмитриев, А. Д. Бойков, Н. Д. Егупов. Автоматический синтез систем автоматического управления с помощью ортогональных функций. Научные труды вузов Поволжья «Автоматические измерительные и регулирующие устройства», вып. 6, Куйбышев, 1970.

2. А. Д. Бойков, Н. Д. Егупов. Метод реализации многомерной аналитической самонастраивающейся системы автоматического управления. Труды КуАИ им. С. П. Королева, вып. 29, Куйбышев, 1967.

3. Приспосабливающиеся автоматические системы. Под редакцией Э. И. Мишкина и Л. Брауна, ИИЛ, 1963.

4. O. Seff, Filters and predictors which adapt their values to the unknown parameters of input process, Trans. of the Seond Prague conference on the information theory and statistical decision functions, Prague, 1960.