КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

А. Н. ДМИТРИЕВ, Н. Д. ЕГУПОВ, А. Д. БОЙКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В статье рассматривается применение предложенного в [1] ортогонального метода для детерминированного анализа одного класса нелинейных нестационарных систем [2].

Объектом детерминированного анализа является система, блок-схема которой изображена на рис. 1.

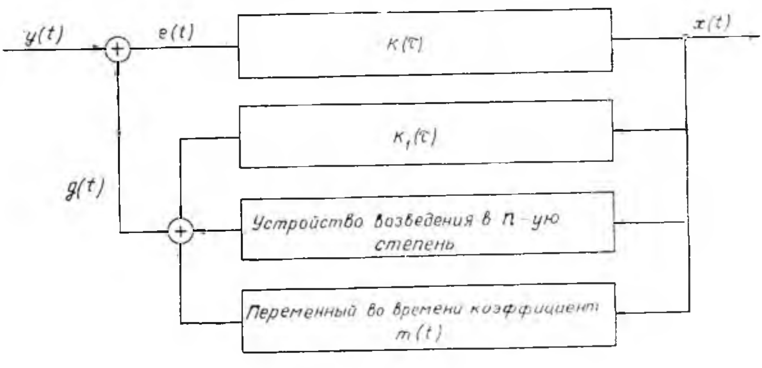

Рис. 1.
$\kappa(\tau)$, $\kappa_1(\tau)$ — импульсные переходные функции линейных элементов

Найдем уравнения, описывающие динамику указанной системы. Уравнение ошибки имеет вид

$$e(t) = y(t) - g(t). \tag{1}$$

Выражение для выходного сигнала через сигнал ошибки таково

$$x(t) = \int_0^t k(t-\tau)\, e(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Так как формула для $g(t)$ запишется в виде

$$g(t) = \int_0^t k_1(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau + \varepsilon x^n(t) + kx(t) m(t), \tag{3}$$

то зависимость (1) принимает форму

$$e(t) = y(t) - \int_0^\infty k_1(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau - \varepsilon x^n(t) - kx(t)\, m(t). \tag{4}$$

Преобразуем обе части последнего равенства по Лапласу

$$E(s) = Y(s) - K_1(s) X(s) - L\{\varepsilon x^n(t)\} - L\{kx(t)\, m(t)\}. \tag{5}$$

Преобразование Лапласа для выходного сигнала выглядит так

$$X(s) = K(s) E(s). \tag{6}$$

С учетом равенства (4) последнее уравнение перепишется в виде

$$X(s) = K(s)[Y(s) - K_1(s) X(s) - L\{\varepsilon x^n(t)\} - L\{kx(t)_m(t)\} =$$
$$= K(s) Y(s) - K(s) K_1(s) X(s) - K(s) L\{\varepsilon x^n(t)\} - K(s) L\{kx(t) m(t)\}. \tag{7}$$

Из этого уравнения имеем:

$$X(s) = \frac{K(s)}{1+K(s) K_1(s)} Y(s) - \frac{K(s)}{1+K(s) K_1(s)} L\{\varepsilon x^n(t)\} -$$
$$- \frac{K(s)}{1+K(s) K_1(s)} L\{kx(t)\, m(t)\} =$$
$$= W(s) Y(s) - W(s) L\{\varepsilon x^n(t)\} - W(s) L\{kx(t)\, m(t)\}, \tag{8}$$

$$W(s) = \frac{K(s)}{1+K(s) K_1(s)}. \tag{9}$$

В интегральной форме уравнение для выходного сигнала $x(t)$ запишется в виде:

$$x(t) = \int_0^t w(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau - \int_0^t w(t-\tau)\, \varepsilon x^n(\tau)\, d\tau -$$
$$- \int_0^t w(t-\tau)\, kx(\tau)\, m(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

$$w(\tau) = L^{-1}\left\{\frac{K(s)}{1+K(s) K_1(s)}\right\}. \tag{11}$$

Введем в рассмотрение многомерное преобразование Лапласа, определяемое равенствами [4]:

$$F(s_1, s_2, \ldots, s_n) = L_n\{f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty f(t_1, t_2, \ldots, t_n) e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} \ldots e^{-s_n t_n} dt_1 dt_2 \ldots dt_n, \quad (12)$$

$$\operatorname{Re}(s_i) > \sigma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = L_n^{-1} \{F(s_1, s_2, \ldots, s_n)\} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi j)^n} \int\limits_{d_n - j\infty}^{d_n + j\infty} \int\limits_{d_{n-1} - j\infty}^{d_{n-1} + j\infty} \cdots \int\limits_{d_1 - j\infty}^{d_1 + j\infty} F(s_1, s_2, \ldots, s_n) e^{s_1 t_1} e^{s_2 t_2} \ldots$$

$$\ldots e^{s_n t_n} ds_1 ds_2 \ldots ds_n, \quad (13)$$

$$d_i > \sigma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где σ_i — абсцисса абсолютной сходимости.

При применении многомерных интегральных преобразований справедлива зависимость:

$$f(t) = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\Big|_{\substack{t_1 = t \\ t_2 = t \\ \cdots \\ t_n = t}} = L_n^{-1} \{F(s_1, s_2, \ldots, s_n)\}\Big|_{\substack{t_1 = t \\ t_2 = t \\ \cdots \\ t_n = t}} \quad (14)$$

Прежде чем использовать многомерное преобразование Лапласа, запишем известные равенства [3].

Пусть имеется схема, изображенная на рис. 2.

На основе этой схемы можно записать:

$$X(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty x(t_1, t_2, \ldots, t_n) e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} \ldots e^{-s_n t_n} dt_1 dt_2 \ldots dt_n,$$

$$x(t_1, t_2, \ldots, t_n)\Big|_{\substack{t_1 = t \\ t_2 = t \\ \cdots \\ t_n = t}} = x^n(t). \quad (15)$$

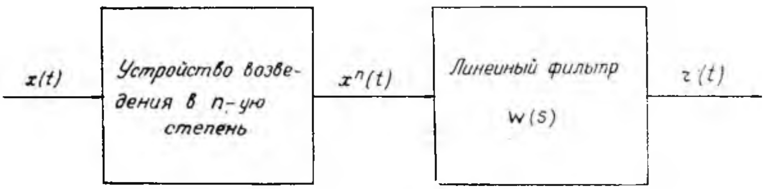

Рис. 2.

Используя методику, изложенную в [3], находим

$$r(s_1, s_2, \ldots, s_n) = W(s_1 + s_2 + \cdots + s_n) X(s_1, s_2, \ldots, s_n). \quad (16)$$

Применяя многомерное преобразование Лапласа к уравнению (10), получим

$$X(s_1, s_2, \ldots, s_n) = W(s) Y(s) - \varepsilon W(s_1 + s_2 + \cdots + s_n) X(s_1) X(s_2) \ldots$$

$$\ldots X(s_n) - kW(s_1 + s_2) X(s_1) M(s_2). \quad (17)$$

Для решения задачи определения $X(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ применим метод последовательных приближений в комплексной области. Заметим, что в большинстве практических случаев ряд, составленный из последовательных приближений, сходится

$$X(s_1, s_2, \ldots, s_n) = X_1(s_1, s_2, \ldots, s_n) + X_2(s_1, s_2, \ldots, s_n) + \cdots \quad (18)$$

Важным условием сходимости ряда является необходимость затухания функций $W(\tau)$. В качестве первого приближения имеем

$$X_1(s_1) = W(s_1)\, y(s_1).$$

Второе приближение определяется формулой

$$X_2(s_1, s_2, \ldots, s_n) = W(s_1)\, Y(s_1) - \varepsilon W(s_1+s_2+\cdots+s_n)\, X_1(s_1)\, X_1(s_2) \ldots$$
$$\ldots X_1(s_n) - kW(s_1+s_2)\, X_1(s_1)\, M(s_2), \quad (19)$$

. . . .

n-ое приближение имеет вид

$$X_n(s_1, s_2, \ldots, s_n) = W(s_1)\, Y(s_1) - \varepsilon W(s_1+s_2+\cdots+s_n)\, X_{n-1}(s_1)\, X_{n-1}(s_2) \ldots$$
$$\ldots X_{n-1}(s_n) - kW(s_1+s_2)\, X_{n-1}(s_1)\, M(s_2). \quad (20)$$

Выходную реакцию нелинейной системы будем находить в виде ортогонального ряда [1]

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} c_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\, \varphi_{i_1}(t_1)\, \varphi_{i_2}(t_2) \ldots \varphi_{i_n}(t_n), \quad (21)$$

где $\{\varphi_k(t)\}$ — функции ортогональной системы, удовлетворяющие условию:

$$\int_0^{\infty} \varphi_i(t)\, \varphi_j(t)\, dt = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases} \quad (22)$$

Предполагается, что функция $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ принадлежит $L_2[0, \infty)$, т. е. для нее справедливо условие

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} |f(t_1, t_2, \ldots, t_n)|^2\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n < \infty \quad (23)$$

Коэффициенты ортогонального разложения определяются известной зависимостью

$$C_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, \varphi_{i_1}(t_1)\, \varphi_{i_2}(t_2) \ldots \varphi_{i_n}(t_n)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n. \quad (24)$$

Пусть функции $\{\varphi_k(t)\}$ ортогональной системы определяются так [1]:

$$\varphi_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ik}\, e^{-it} = \alpha_{1k}\, e^{-t} + \alpha_{2k}\, e^{-2t} + \cdots + \alpha_{kk}\, e^{-kt}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), получим:

$$C_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} f(t_1, t_2, \dots, t_n) \sum_{j_1=1}^{i_1} \alpha_{j_1 i_1} e^{-j_1 t_1} \sum_{j_2=1}^{i_2} \alpha_{j_2 i_2} e^{-j_2 t_2} \dots$$

$$\dots \sum_{j_n=1}^{i_n} \alpha_{j_n i_n} e^{-j_n t_n} dt_1\, dt_2 \dots dt_n = \sum_{j_1=1}^{i_1} \sum_{j_2=1}^{i_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{i_n} \alpha_{j_1 i_1} \alpha_{j_2 i_2} \dots$$

$$\dots \alpha_{j_n i_n} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} f(t_1, t_2, \dots, t_n) e^{-j_1 t_1} e^{-j_2 t_2} \dots e^{-j_n t_n} dt_1\, dt_2 \dots dt_n =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{i_1} \sum_{j_2=1}^{i_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{i_n} \alpha_{j_1 i_1} \alpha_{j_2 i_2} \dots \alpha_{j_n i_n} \mu_{i_1, i_2, \dots, i_n}, \tag{26}$$

$$\mu_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} f(t_1, t_2, \dots, t_n) e^{-j_1 t_1} e^{-j_2 t_2} \dots e^{-j_n t_n} dt_1\, dt_2 \dots dt_n =$$

$$= F(s_1, s_2, \dots, s_n)\Big|_{\substack{s_1=j_1 \\ s_2=j_2 \\ \dots \\ s_n=j_n}} \tag{27}$$

$$jk = 1, 2, \dots, i_k$$
$$k = 1, 2, \dots, n$$

Ряд последовательных приближений во временной области будет иметь вид:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots, \tag{28}$$

$$x_k(t) = L_n^{-1}\{X_k(s_1, s_2, \dots, s_n)\}\Big|_{\substack{t_1=t \\ t_2=t \\ \dots \\ t_n=t}} = x_k(t_1, t_2, \dots, t_n)\Big|_{\substack{t_1=t \\ t_2=t \\ \dots \\ t_n=t}} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_n=0}^{\infty} c_{i_1, i_2, \dots, i_n} \varphi_{i_1}(t_1) \varphi_{i_2}(t_2) \dots \varphi_{i_n}(t_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots$$

$$\cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} \prod_{j_k}^{i_k} \sum_{j_k=1}^{i_k} \alpha_{j_k i_k} X_k(s_1, s_2, \dots, s_n)\Big|_{\substack{s_1=j_1 \\ s_2=j_2 \\ \dots \\ s_n=j_n}} \cdot \varphi_{i_1}(t_1) \varphi_{i_2}(t_2) \dots \varphi_{i_n}(t_n),$$

$$k = 1, 2, \dots \tag{29}$$

Таким образом, каждая из составляющих суммы (28) находится в виде многомерного ортогонального ряда, после чего все переменные отождествляются.

Итак, имеем

$$x(t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} c^1_{i_1, i_2, \dots, i_n} \varphi_{i_1}(t_1) \varphi_{i_2}(t_2) \dots \varphi_{i_n}(t_n)\Big|_{\substack{t_1=t \\ t_2=t \\ \dots \\ t_n=t}} +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} c^2_{i_1, i_2 \dots, i_n} \varphi_{i_1}(t_1) \varphi_{i_2}(t_2) \dots \varphi_{i_n}(t_n)\Big|_{\substack{t_1=t \\ t_2=t \\ \dots \\ t_n=t}} + \cdots \tag{30}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Применение рядов Вольтерра и обобщенных спектров для анализа и синтеза нелинейных систем. Техническая кибернетика, том III, под ред. В. В. Солодовникова, Москва, Машиностроение, 1969.

2. Ridings Richard V., Higgins Thomas J., Transient response analysis of a class of continuous noulinear time—varying automatic control systems by functional technigues and multidimensional Laplase transforms, «ISA Trans», 7, № 2, pp. 166—172. 1968

3. Y. H. Kuand, A. H. Wolf, Volterra — Wiener Functionals for the Analysis of Nonlinear Systems. Iornal of the Franklin Institute. v 281, № 1 pp. 9—26, 1966.

4. Ван-Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем. Издательство «Мир», 1964.