

В. М. ГОЛОВИН, Ю. Л. ФАЙНИЦКИЙ

О НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРЕВЕ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

x — продольная координата, связанная с потоком и отсчитываемая вдоль стенки;

y — поперечная координата, связанная с потоком и отсчитываемая по нормали к стенке;

x', y' — координаты, аналогичные x, y , но связанные со стенкой;

u — скорость потока в направлении оси x ;

v — скорость потока в направлении оси y ;

T — температура жидкости;

T_w — температура стенки;

ω — частота колебаний стенки;

ν — кинематический коэффициент вязкости;

σ — число Прандтля;

λ — коэффициент теплопроводности жидкости.

Рассмотрим, подобно Глауэрту [1] и Ротту [2], двумерное обтекание несжимаемой жидкостью пластины, установленной перпендикулярно набегающему потоку и колеблющейся в своей плоскости. Оба автора отмечают, что при температуре поверхности, постоянной по продольной координате и по времени, колебания не влияют на температурное поле жидкости. Однако, как указывает Ротт, можно получить нетривиальное решение уравнения энергии в случае гармонического изменения температуры поверхности по времени. Рассмотрение этого случая является предметом настоящей статьи.

Будем отсчитывать абсциссы вдоль пластины, ординаты нормально к ней. Начало системы координат x, y , связанной с потоком, расположим в плоскости симметрии внешнего по отношению к пограничному слою потенциального течения. Введем также

систему координат x', y' , связанную со стенкой, и примем закон изменения температуры поверхности по x' линейным. При законе изменения скорости поверхности по времени

$$u|_{y=0} = a e^{i\omega t},$$

т. е. при соотношении между продольными координатами x' и x вида

$$x' = x + \frac{a t}{\omega} e^{i\omega t},$$

линейное распределение температуры по поверхности тела

$$T_w = T_1 + b x'$$

приводит, очевидно, к следующему краевому условию для уравнения энергии

$$T_w = T_1 + b x + i \frac{ab}{\omega} e^{i\omega t}.$$

Тогда поле температур жидкости определяется следующей системой:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (1)$$

$$T|_{y=0} = T_1 + b x + i \frac{ab}{\omega} e^{i\omega t}; \quad (2)$$

$$T|_{y \rightarrow \infty} = T_{\infty}. \quad (3)$$

Ограничимся рассмотрением случая, представляющего интерес с физической точки зрения, когда $a = a(\omega)$ и

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{a(\omega)}{\omega} = d, \quad d = \text{const.}$$

Величину температуры удобно представить в виде суммы стационарной и нестационарной составляющих:

$$\begin{aligned} T &= T_0 + T_i; \\ T_0|_{y=0} &= T_1 + b x; \quad T_0|_{y \rightarrow \infty} = T_{\infty}; \\ T_i|_{y=0} &= i \frac{ab}{\omega} e^{i\omega t}; \quad T_i|_{y \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned}$$

Нестационарную составляющую ищем в виде

$$T_i = i \frac{ab}{\omega} \vartheta(\eta) e^{i\omega t}, \quad \eta = \left(\frac{c}{\nu}\right)^{1/2} y$$

и c определяем из соотношения $u|_{y \rightarrow \infty} = c x$.

Согласно [1, 2], наличие колебаний не изменяет нормальной составляющей скорости в пограничном слое по сравнению со стационарным ее значением

$$v = -(c\nu)^{1/2} f(\eta),$$

где $f(\eta)$ — функция Хименца.

После соответствующих подстановок вместо (1) получим:

$$\vartheta'' + \sigma f \vartheta' = \sigma \frac{i\omega}{c} \vartheta;$$

$$\vartheta|_{\eta=0} = 1; \quad \vartheta|_{\eta \rightarrow \infty} = 0.$$

Рассмотрим отдельно случаи малых и больших частот. При малых частотах решение будем искать в виде

$$\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\omega}{c} \right)^n \vartheta_n(\eta).$$

Члены этого разложения определяются уравнениями:

$$\vartheta_0'' + \sigma f \vartheta_0' = 0 \quad (n=0) \quad (4)$$

$$\vartheta_0|_{\eta=0} = 1; \quad \vartheta_0|_{\eta \rightarrow \infty} = 0 \quad (5)$$

$$\vartheta_n'' + \sigma f \vartheta_n' = \sigma \vartheta_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (6)$$

$$\vartheta_n|_{\eta=0} = 0; \quad \vartheta_n|_{\eta \rightarrow \infty} = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (4) при граничных условиях (5) имеет вид [3]

$$\vartheta_0 = 1 - \frac{\int_0^{\eta} e^{-\sigma f^0} d\eta}{\int_0^{\infty} e^{-\sigma f^0} d\eta}, \quad (8)$$

$$f^0 = \int_0^{\eta} f d\eta.$$

Уравнение (6) при граничных условиях (7) дает рекуррентное соотношение

$$\vartheta_n = \sigma \int_0^{\eta} e^{-\sigma f^0} \left[\int_0^{\eta} \vartheta_{n-1} e^{\sigma f^0} d\eta \right] d\eta - \sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma f^0} \left[\int_0^{\eta} \vartheta_{n-1} e^{\sigma f^0} d\eta \right] d\eta \frac{\int_0^{\eta} e^{-\sigma f^0} d\eta}{\int_0^{\infty} e^{-\sigma f^0} d\eta}. \quad (9)$$

При достаточно больших значениях частоты колебаний удобно перейти, следуя Глауэрту, к переменной

$$Y = \left(\frac{i\omega}{c} \right)^{1/2} \eta.$$

Обозначая

$$\left(\frac{c}{i\omega} \right)^{1/2} = \alpha \quad \text{и} \quad \sqrt{\sigma} = \beta,$$

получим уравнение:

$$\vartheta_{YY} - \beta^2 \vartheta = -\alpha \beta^2 f \vartheta'; \quad (10)$$

$$\vartheta|_{Y=0} = 1; \quad \vartheta|_{Y \rightarrow \infty} = 0.$$

Используя выражение для функции $f(\tau_1)$, приведенное в работе [1] и имеющее место при малых значениях аргумента

$$f = \frac{1}{2} A \alpha^2 Y^2 - \frac{1}{6} \alpha^3 Y^3 + \frac{1}{120} A^2 \alpha^5 Y^5 - \frac{1}{360} A \alpha^6 Y^6 + \frac{1}{2520} \alpha^7 Y^7,$$

$A = f''|_{\tau=0} = 1,2325877$ (см. [4] стр. 35), ищем решение уравнения 10) в виде

$$\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \psi_n(Y). \quad (11)$$

Краевые условия для функции $\psi_n(Y)$:

$$\begin{aligned} \psi_0|_{Y=0} &= 1; & \psi_0|_{Y \rightarrow \infty} &= 0; & (n=0) \\ \psi_n|_{Y=0} &= 0; & \psi_n|_{Y \rightarrow \infty} &= 0; & (n \geq 1) \end{aligned} \quad (12)$$

После подстановки ряда (11) в уравнение (10) для функции ψ_0 получим

$$\psi_{0YY}'' - \beta^2 \psi_0 = 0.$$

Его решение при краевом условии (12) есть

$$\psi_0 = e^{-\beta Y}.$$

Следующие функции

$$\psi_1 \equiv \psi_2 \equiv 0;$$

для функции ψ_3 получается уравнение

$$\psi_{3YY}'' - \beta^2 \psi_3 = -\frac{1}{2} A \beta^2 Y^2 \psi_0'. \quad (13)$$

Ищем функции ψ_n ($n \geq 3$) в виде

$$\psi = e^{-\beta Y} \sum_{k=0}^{\infty} a_k Y^k.$$

Учитывая, что

$$\psi_{YY}'' - \beta^2 \psi = e^{-\beta Y} \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2\beta(k+1)a_{k+1}] Y^k,$$

получим решение уравнения (13)

$$\psi_3 = A e^{-\beta Y} \left(\frac{1}{8} Y + \frac{1}{8} Y^2 + \frac{1}{12} \beta Y^3 \right).$$

Аналогично:

$$\psi_4 = e^{-\beta Y} \left(\frac{1}{16} \beta^{-1} Y + \frac{1}{16} Y^2 + \frac{1}{24} \beta Y^3 + \frac{1}{48} \beta^2 Y^4 \right),$$

$$\psi_5 = 0,$$

$$\begin{aligned} \psi_6 = -A^2 e^{-\beta Y} \left[\left(\frac{1}{128} \beta^{-1} + \frac{1}{64} \beta^{-3} \right) Y + \left(\frac{1}{128} + \frac{1}{64} \beta^{-2} \right) Y^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{192} \beta + \frac{1}{96} \beta^{-1} \right) Y^3 - \left(\frac{1}{384} \beta^2 - \frac{1}{192} \right) Y^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{240} \beta^3 - \frac{1}{480} \beta \right) Y^5 - \left(\frac{1}{288} \beta^4 - \frac{1}{1440} \beta^2 \right) Y^6 \Big], \\
\psi_7 = & A e^{-\beta Y} \left[\left(\frac{1}{128} \beta^{-2} + \frac{1}{64} \beta^{-4} \right) Y + \left(\frac{1}{128} \beta^{-1} + \frac{1}{64} \beta^{-3} \right) Y^2 + \right. \\
& + \left(\frac{1}{192} + \frac{1}{96} \beta^{-2} \right) Y^3 + \frac{1}{192} \beta^{-1} Y^4 - \left(\frac{1}{384} \beta^2 - \frac{1}{480} \right) Y^5 - \\
& - \left(\frac{1}{384} \beta^3 - \frac{1}{1440} \beta \right) Y^6 - \left(\frac{1}{576} \beta^4 - \frac{1}{5040} \beta^2 \right) Y^7 \Big], \\
\psi_8 = & - e^{-\beta Y} \left[\left(\frac{1}{572} \beta^{-3} + \frac{1}{128} \beta^{-5} \right) Y + \left(\frac{1}{512} \beta^{-2} + \frac{1}{128} \beta^{-4} \right) Y^2 + \right. \\
& + \left(\frac{1}{768} \beta^{-1} + \frac{1}{192} \beta^{-3} \right) Y^3 + \left(\frac{1}{1536} + \frac{1}{384} \beta^{-2} \right) Y^4 - \\
& - \left(\frac{1}{3840} \beta - \frac{1}{960} \beta^{-1} \right) Y^5 - \left(\frac{1}{2304} \beta^2 - \frac{1}{2880} \right) Y^6 - \\
& - \left(\frac{1}{2688} \beta^3 - \frac{1}{10080} \beta \right) Y^7 - \left(\frac{1}{4608} \beta^4 - \frac{1}{40320} \beta^2 \right) Y^8 \Big].
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\vartheta'_n = \frac{1}{\alpha} \vartheta'_Y = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n-1} \psi'_{nY}(Y),$$

получим

$$\begin{aligned}
\vartheta'_{n=0} = & - \left[\frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\frac{c}{\omega} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{32} \beta^{-1} \left(\frac{c}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}} - A^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{256} \beta^{-1} + \frac{\sqrt{2}}{128} \beta^{-3} \right) \times \right. \\
\times & \left(\frac{c}{\omega} \right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1024} \beta^{-3} + \frac{\sqrt{2}}{256} \beta^{-5} \right) \left(\frac{c}{\omega} \right)^{\frac{7}{2}} \Big] - i \left[\frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\frac{c}{\omega} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} A \frac{c}{\omega} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{2}}{32} \beta^{-1} \left(\frac{c}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}} + A^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{256} \beta^{-1} + \frac{\sqrt{2}}{128} \beta^{-3} \right) \left(\frac{c}{\omega} \right)^{\frac{5}{2}} - \\
& - A \left(\frac{1}{128} \beta^{-2} + \frac{1}{64} \beta^{-4} \right) \left(\frac{c}{\omega} \right)^3 + \left. \left(\frac{\sqrt{2}}{1024} \beta^{-3} + \frac{\sqrt{2}}{256} \beta^{-5} \right) \left(\frac{c}{\omega} \right)^{\frac{7}{2}} \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

На рис. 1—2 приведены результаты расчета градиента функции $\vartheta(\eta)$ на стенке. Данные, полученные по соотношениям (8—9), нанесены сплошной линией, по соотношению (14) — пунктирной.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Синусоидальные колебания поверхности приводят к синусоидальным колебаниям поля температур жидкости. Высшие гармоники не возникают, не появляются добавочных стационарных составляющих теплового потока

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

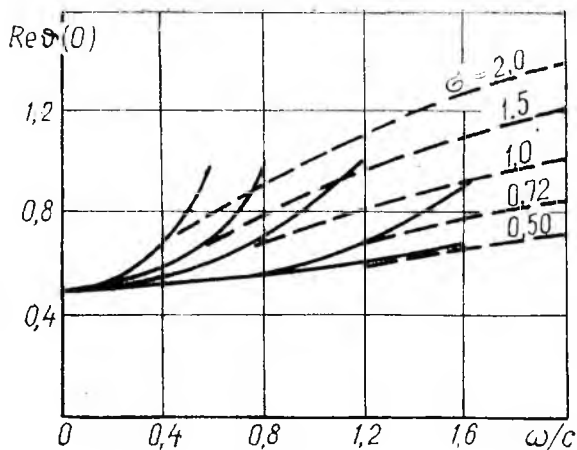


Рис. 1.

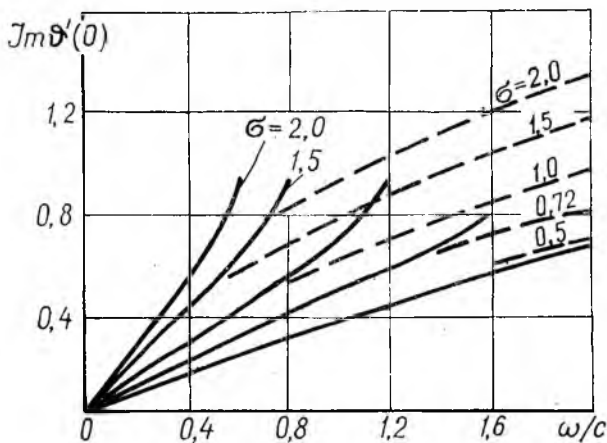


Рис. 2.

Происходит лишь сдвиг фазы колебаний теплового потока относительно фазы колебаний температуры поверхности. При очень малых частотах сдвиг близок к нулю, имеет место квазистационарная картина изменения теплового потока, «следящего» за мгновенным значением температуры поверхности. Если при этом $a = d\omega$, где $d = \text{const}$, то амплитуда теплового потока $|q|_{\text{max}} \approx 0,5db\lambda \left(\frac{c}{v}\right)^{1/2}$.

С увеличением частоты колебаний амплитуда теплового потока увеличивается, он начинает опережать колебания температуры стенки. Это опережение увеличивается до $\frac{\pi}{4}$ при больших частотах. При этом амплитуда колебаний теплового потока растет пропорциональ-

по квадратному корню из частоты. При больших частотах она пропорциональна также и числу Прандтля.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. B. Glauert. The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders. *Journal of fluid mechanics*, 1, 1, 1956.
 2. N. Rott. Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point. *Quart. of appl. math.* vol XIII, № 4, 1956.
 3. K wang—T z u Y a n g. Unsteady laminar boundary layers in an incompressible stagnation flow. *Journal of applied mechanics*, 1958, 25, № 4.
 4. М. В а н - Д а й к. Методы возмущений в механике жидкости. «Мир», 1967.
-